力学（森松）２０１１年度解答例

1.(1) 運動方程式は地球と物体との距離が $z+R$ であることに注意して、

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{GMm}{(R+z)^2} \ \cdots ①$$

となる。ここで、$z=0$ のとき重力加速度 g を用いて物体にかかる力を表すと、

$$-\frac{GMm}{R^2} = -mg$$

$$GM = gR^2$$

となるので、① を書き直すと、

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg\frac{R^2}{(R+z)^2} \ \cdots ②$$

となる。よってエネルギー保存則から、

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{mgR^2}{R+z} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR \ \cdots ③$$

となるので、これを整理して、

$$v = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+z} - 2gR + v_0^2} \ \cdots ④$$

となる。④ において $z \to \infty$ としたときに v の値が実数値として残るような v_0 の範囲は

$$-2gR + v_0^2 \geqq 0$$

なので、求める最小値は

$$v_e = \sqrt{2gR}$$

であり、その値は

$$v_e = 1.12 \times 10^4 m/s$$

(2)(1) の計算から ④ より

$$v = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+z}}$$

となるので、$v = \dfrac{dz}{dt}$ と戻して、変数分離をすると、

$$\sqrt{R+z}\frac{dz}{dt} = \sqrt{2gR^2}$$

となるので、両辺を $t=0$ から $t=t$ まで積分すると、

$$\int_0^z \sqrt{R+z}dz = \int_0^t \sqrt{2gR^2}dt$$
$$\frac{2}{3}(R+z)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2g}Rt + \frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}}$$
$$z = \left\{\frac{3}{2}\sqrt{2g}Rt + R^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{2}{3}} - R$$

となる。

(3)$z|_{t=0}=0, \dfrac{dz}{dt}|_{t=0} = v_e = \sqrt{2gR}$ は条件から自明。次に ② より

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g\frac{R^2}{(R+z)^2} \quad \cdots ②'$$

だから、

$$\frac{d^2z}{dt^2}|_{t=0} = -g$$

また、②$'$ を t で微分すると、

$$\frac{d^3z}{dt^3} = \frac{2gR^2}{(R+z)^3}\cdot\frac{dz}{dt}$$

となるから、

$$\frac{d^3z}{dt^3}|_{t=0} = \frac{2g}{R}\cdot\sqrt{2gR}$$

である。よって z の t についての $Taylor$ 展開の 3 次までの項は

$$z = \sqrt{2gR}t - \frac{g}{2}t^2 + \frac{g}{3}\sqrt{\frac{2g}{R}}t^3$$

となる。この物理的意味は、$\sqrt{2gR}t - \dfrac{g}{2}t^2$ までが、自由落下で、$\dfrac{g}{3}\sqrt{\dfrac{2g}{R}}t^3$ は自由落下に対して実際の物体に働く力が一定でないことの効果である。

2. まず重力 g の下での長さ ℓ、重さ m の振り子の周期 T を求める。振れ角を θ とすると、$|\theta| \ll 1$ であるから、運動方程式の接線方向成分は、

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$$

となるので、$\theta = \theta_0\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t+\alpha\right)$ となるから、周期は $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ である。

次に各設問において物体に働く見かけの重力 g' を求めると、振り子の周期は $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g'}}$ となる。

(1) つりあいの状態において、糸の張力を T とすると、つりあいの式は、

$$mg\cos\theta + m\alpha\sin\theta = T \ \cdots ①$$

$$mg\sin\theta = m\alpha\cos\theta \ \cdots ②$$

だから、② より $\tan\theta = \dfrac{\alpha}{g}$ なので、見かけの重力は、

$$g' = g\cos\theta + \alpha\sin\theta = \cos\theta\left(g+\frac{\alpha^2}{g}\right) = \sqrt{\frac{g^2}{\alpha^2+g^2}}\frac{\alpha^2+g^2}{g} = \sqrt{\alpha^2+g^2}$$

なので、求める周期は $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{\alpha^2+g^2}}}$ である。

(2) 等速円運動する列車に働く加速度は中心方向に $\alpha' = \dfrac{v^2}{r}$ なのでこれを (1) の解に代入して、求める周期は $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{\left(\frac{v^2}{r}\right)^2+g^2}}}$ である。

3.(1) まず万有引力は中心力なので、惑星の角運動量 $\vec{\ell}$ は一定である。
また、定義から $\vec{\ell}=\vec{r}\times\vec{p}$ なので、$\vec{\ell}\cdot\vec{r}=0$ であるから、常に $\vec{\ell}\perp\vec{r}$ である。いま $\vec{\ell}$ は一定で、$\vec{r}$ の始点は太陽だから、$\vec{r}$ は常に、太陽を通り $\vec{\ell}$ を法線ベクトルとする平面上にある。
つまり、惑星は、常に太陽を含むある平面上を運動する。

(2) 運動方程式から、

$$m\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]=0$$

なので、角運動量保存則は、

$$mr^2\frac{d\theta}{dt}=\ell$$

次に万有引力は、

$$F(r)=-\frac{k}{r^2}\ ,\ V(r)=-\frac{k}{r}$$

と表すことができるので、

$$V_{eff}(r)=-\frac{k}{r}+\frac{\ell^2}{2mr}$$

となる。よってエネルギー保存則は、

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{k}{r}+\frac{\ell^2}{2mr}=E$$

である。

(3) 惑星が運動する範囲を求めると、条件式は、

$$V_{eff}(r) \leqq E$$

なので、求める r の範囲は、$d = \dfrac{\ell^2}{km}$、離心率を $e = \sqrt{1 + \frac{2mE}{\ell^2} d^2}$ とおくと、

$$\frac{1-e}{d} \leqq \frac{1}{r} \leq \frac{1+e}{d}$$

となるので、E の正負で場合分けすると、

$$E \geqq 0 \text{ のとき、} \frac{d}{1+e} \leqq r$$
$$E < 0 \text{ のとき、} \frac{d}{1+e} \leqq r \leqq \frac{d}{1-e}$$

である。

(4) まず、運動方程式は、

$$r\text{ 方向：}\ m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = m\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{\ell^2}{mr^3} = -\frac{K}{r^2}$$
$$\theta\text{ 方向：}\ \ell = mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

次に変数変換をして、r 方向の運動方程式を、θ で微分した方程式にする。

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dr}{d\theta} = \frac{\ell}{mr^2} \cdot \frac{dr}{d\theta}$$
$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dr}{d\theta}\right) = \cdots = -\frac{\ell^2}{m^2r^2} \cdot \frac{d^2(r^{-1})}{d\theta^2}$$

となるので、$s = r^{-1}$ とおくと、r 方向の運動方程式は

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = \frac{1}{d}$$

となる。

(5)(4) の微分方程式の特解は $s = \dfrac{1}{d}$ だから、一般解は、

$$s = A\cos(\theta + \theta_0) + \frac{1}{d}$$

であるので、上で求めたrの範囲から、Eの正負にかかわらずsの最大値は$\dfrac{1+e}{d}$であるので、このとき$\theta=0$であるような座標系を考えれば、

$$s=\frac{1+e\cos\theta}{d}$$

$$r=\frac{d}{1+e\cos\theta}$$

となる。よってこれを直交座標系に戻すと、

$$r+er\cos\theta=d$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=d-ex$$

$$x^2+y^2=d^2-2edx+e^2x^2 \ \cdots ①$$

となるここで、Eと0の大小で場合分けすると、
1.$E>0$のとき、$e>1$だから①は、

$$\left(1-e^2\right)\left(x+\frac{ed}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{d^2}{1-e^2}$$

$$\frac{\left(x-\frac{ed}{e^2-1}\right)^2}{\frac{d^2}{(e^2-1)^2}}-\frac{y^2}{\frac{d^2}{e^2-1}}=1$$

となり、双曲線となる。
2.$E=0$のとき、$e=1$だから①は

$$2dx+y^2=d^2$$

$$x=\frac{d}{2}-\frac{y^2}{2d}$$

となり、放物線となる。
3.$E<0$のとき、$e<1$だから①は

$$\left(1-e^2\right)\left(x+\frac{ed}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{d^2}{1-e^2}$$

$$\frac{\left(x+\frac{ed}{1-e^2}\right)^2}{\frac{d^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{d^2}{1-e^2}}=1$$

となり楕円となる。