力学（森松）2009 年度解答例

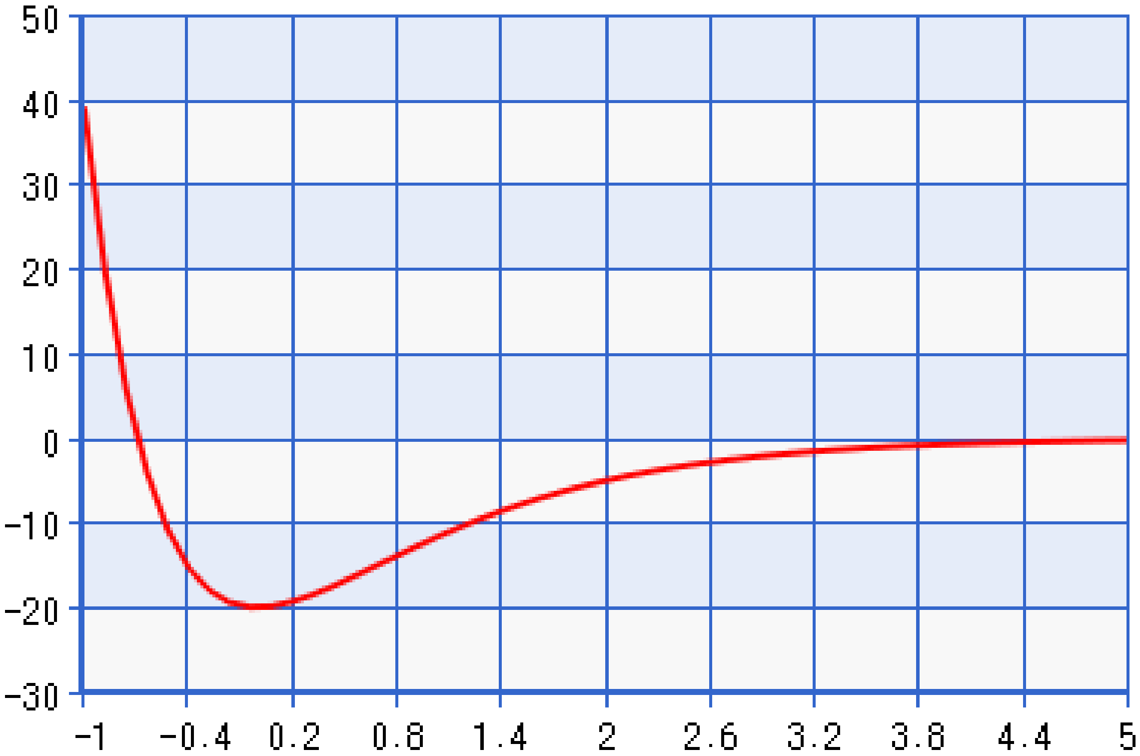
1. 定義より、$\lim_{x\to\infty} V(x) = 0$ に注意して、

$$V(x) = \int_{\infty}^{x} -F(x)dx = D(e^{-2ax} - 2e^{-ax})$$

である。また、

$$V'(x) = -F(x) = 2aDe^{-ax}(1 - e^{-ax})$$

より、$V(x)$ のグラフは下図となる。



(2) 求める x の範囲は $V(x) \leqq E$ なので、(1) のグラフより場合分けをする。
①$E > 0$ のとき、$V(x) = E$ を解くと、

$$x = \frac{1}{a}\log\frac{-D + \sqrt{D^2 + DE}}{E}$$

となるので、求める範囲は、

$$x \geqq \frac{1}{a}\log\frac{-D + \sqrt{D^2 + DE}}{E}$$

である。

②$E=0$ のとき、$V(x)=E$ を解くと、

$$x=-\frac{1}{a}\log 2$$

となるので、求める範囲は、

$$x \geqq -\frac{1}{a}\log 2$$

である。

③$E<0$ のとき、$V(x)=E$ を解くと、

$$x=\frac{1}{a}\log\frac{-D\pm\sqrt{D^2+DE}}{E}$$

となるので、求める範囲は、

$$\frac{1}{a}\log\frac{-D+\sqrt{D^2+DE}}{E} \leqq x \leqq \frac{1}{a}\log\frac{-D-\sqrt{D^2+DE}}{E}$$

である。

以上をまとめると、

$E>0$ のとき、$x \geqq \frac{1}{a}\log\frac{-D+\sqrt{D^2+DE}}{E}$

$E=0$ のとき、$x \geqq -\frac{1}{a}\log 2$

$E<0$ のとき、$\frac{1}{a}\log\frac{-D+\sqrt{D^2+DE}}{E} \leqq x \leqq \frac{1}{a}\log\frac{-D-\sqrt{D^2+DE}}{E}$

となる。

(3) エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+V(x)=E=0$$

ここで、$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=ay\frac{dx}{dt}$ であることを用いると、

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=a^2y^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=4a^2\frac{D}{m}\left(y-\frac{1}{2}\right)$$

となるので、

$$\frac{dy}{dt}=\pm 2a\sqrt{\frac{D}{m}}\sqrt{y-\frac{1}{2}}$$

である。

(4)(3) より

$$\left(y-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dt}=\pm 2a\sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\left[2\sqrt{y-\frac{1}{2}}\right]_s^y=\pm 2a\sqrt{\frac{D}{m}}t$$

$$2\sqrt{y-\frac{1}{2}}=\pm 2a\sqrt{\frac{D}{m}}t+2\sqrt{s-\frac{1}{2}}$$

ここで $\pm$ が-の方だとすると $t\to\infty$ のとき $\sqrt{y-\frac{1}{2}}<0$ となるので不合理。よって

$$2\sqrt{y-\frac{1}{2}}=2a\sqrt{\frac{D}{m}}t+2\sqrt{s-\frac{1}{2}}$$

となるので、y を x に戻すと、

$$y-\frac{1}{2}=\left(a\sqrt{\frac{D}{m}}t+\sqrt{s-\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$y=e^{ax}=a^2\frac{D}{m}t^2+2a\sqrt{\frac{D}{m}\left(s-\frac{1}{2}\right)}t+s$$

$$x=\frac{1}{a}\log\left(a^2\frac{D}{m}t^2+2a\sqrt{\frac{D}{m}\left(s-\frac{1}{2}\right)}t+s\right)$$

となる。ここで、$\frac{dx}{dt}|_{t=0}=\frac{1}{a}\cdot\frac{2a\sqrt{\frac{D}{m}\left(s-\frac{1}{2}\right)}}{s}=0$ なので、$s=\frac{1}{2}$ だから、

$$x=\frac{1}{a}\log\left(a^2\frac{D}{m}t^2+\frac{1}{2}\right)$$

である。

(コメント) 本問で用いられた $V(x)$ は実は $Morse$ ポテンシャルと呼ばれ、原子相互作用のポテンシャルモデルのひとつとして提案されたものです。どうでもいいですね。計算に注意すれば簡単に解ける問題でしょう。

2.(1) 運動量保存則より、

$$mv=\Delta m(u-v)+(m+\Delta m)(v+\Delta v)$$

$$m\Delta v+u\Delta m+\Delta m\Delta v=0$$

ここで微小について一次近似をすると、

$$m\Delta v + u\Delta m = 0$$

が成り立つ。

(2)(1) より

$$\frac{\Delta v}{\Delta m} = -\frac{u}{m}$$

なので、連続量にして

$$\frac{dv}{dm} = -\frac{u}{m}$$

両辺を $m = m_0$ から $m = m$ まで積分して、

$$v - v_0 = u\log\frac{m_0}{m}$$

$$v = v_0 + u\log\frac{m_0}{m}$$

となる。

(3)(2) に $v_0 = 0, v = 12, u = 3$ を代入すると、

$$12 = 3\log\frac{m_0}{m}$$

$$\frac{m_0}{m} = e^4$$

$$m = e^{-4}m_0$$

ここで、

$$e^4 \approx 53$$

となるのでこのとき m は m_0 の 53 分の一となる。

(コメント) 森松師はこの手の問題が好きなようなので、しっかりと（1）ができるようにしておきましょう。みればわかるようにこの問題は 0 点か満点かなので (1) を正答できるかどうかが分かれ道です。できなかった人はよく復習しましょう。

3.(1)$\vec{e_x'} = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}, \vec{e_y'} = \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix}$ なので、

$$x'\vec{e_x'} + y'\vec{e_y'} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\omega t + y\sin\omega t \\ -x\sin\omega t + y\cos\omega t \end{pmatrix}$$

である。

(2)(1) より、

$$\frac{dx'}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} + y\omega\right)\cos\omega t + \left(\frac{dy}{dt} - x\omega\right)\sin\omega t$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\omega - x\omega^2\right)\cos\omega t + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt}\omega - y\omega^2\right)\sin\omega t$$

$$\frac{dy'}{dt} = \left(\frac{dy}{dt} - x\omega\right)\cos\omega t - \left(\frac{dx}{dt} + y\omega\right)\sin\omega t$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt}\omega - y\omega^2\right)\cos\omega t - \left(\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\omega - x\omega^2\right)\sin\omega t$$

だから非慣性系における運動方程式は、

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = \left(F_x + 2m\frac{dy}{dt}\omega - xm\omega^2\right)\cos\omega t + \left(F_y - 2m\frac{dx}{dt}\omega - ym\omega^2\right)\sin\omega t$$

$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = \left(F_y - 2m\frac{dx}{dt}\omega - ym\omega^2\right)\cos\omega t - \left(F_x + 2m\frac{dy}{dt}\omega - xm\omega^2\right)\sin\omega t$$

である。

(3)(a)(1) より、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\omega t\cos\omega t + r\sin\omega t\sin\omega t \\ -r\cos\omega t\sin\omega t + r\sin\omega t\cos\omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので、Σ' においては静止していると観測される。

(b)(1) より、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\omega t + 0\sin\omega t \\ -r\sin\omega t + 0\cos\omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ -r\sin\omega t \end{pmatrix}$$

となるので、Σ' においては時計回りに円運動していると観測される。

(コメント) 今回は定義からやりましたが、一般的な非慣性系における運動方程式に直接代入してももちろん大丈夫です。でもアレを全部正確に覚えてる人が何人いるのか…。