数学 I 橋本義武 2011 年度冬学期解説

製作者：理 1

1

不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$ を求めよ。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin x} &= \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{(1+\cos x)(1-\cos x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x}\right)\sin x \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\cos x} - \frac{1}{\cos x - 1}\right)(\cos x)' = \frac{1}{2}\left(-\log\left|\frac{1+\cos x}{\cos x - 1}\right|\right)' = \frac{1}{2}\left(\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)' \end{aligned} \tag{1}$$

と考えればよい。計算が煩雑になるという点で良い解法とは言えないが、$\tan\dfrac{x}{2} = t$ と置換して考える方法もある。そちらについては、各自で試みよ。

2

正数 $n \geq 0$ に対し、定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^n x dx$ を求めよ。

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^n x dx = I_n$ と置く。I_n についての漸化式を得たい。$n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} \sin^{n-1}x(-\cos x)'dx = \left[\sin^{n-1}x(-\cos x)\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x dx \\ &= (n-1)\int_0^{2\pi}\left(\sin^{n-2}x - \sin^n x\right)dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned} \tag{2}$$

(2) 式から、

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n \geq 2) \tag{3}$$

を得る。(3) 式を繰り返し用いる。

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4} = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}I_{n-6} = \cdots = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}I_0 & n\text{ が偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}I_1 & n\text{ が奇数} \end{cases} \tag{4}$$

あとは、I_0, I_1 を求めればよい。

3

$a > 0$ に対し、広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2}(x+3)dx$ を求めよ。

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}(x+3)dx = \int_0^{\infty}(xe^{-ax^2} + 3e^{-ax^2})dx \tag{5}$$

この時点では、この広義積分が収束するかは分からないから、

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}(x+3)dx = \int_0^\infty xe^{-ax^2}dx + \int_0^\infty 3e^{-ax^2}dx \tag{6}$$

と書くのはよくない。

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx = \int_0^\infty \left(-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\right)' dx = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\right) - \left(-\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{2a} \tag{7}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \int_0 \tag{8}$$

$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx$ については、$t=\sqrt{a}x$ と置換したうえで、ガウス積分 $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ の値を用いればよい。

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{9}$$

以上より題の広義積分は収束して、その値は、

$$\frac{1}{2a} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

である。

4

次の積分の順序を入れ替えよ。$\int_0^1 dy \int_{2y}^{y+1} f(x,y)dx$

積分の記法については、いろいろとあるから、不安のある者は復習しておくとよい。例えば、この積分は、$\int_0^1 dy \int_{2y}^{y+1} dx f(x,y)$ と書いてもよい。
$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 2y\le x\le y+1,\ 0\le y\le 1\}$ とおくと、領域 D は、xy 平面上の 3 点 $(0,0),(1,0),(2,1)$ の内部および周上であるから、$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| \begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le \frac{1}{2}x\end{cases} \text{または} \begin{cases}1\le x\le 2\\ x-1\le y\le \frac{1}{2}x\end{cases}\right\}$ とも表せる。ゆえに、

$$\int_0^1 dy\int_{2y}^{y+1} f(x,y)dx = \int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{2}x} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_{x-1}^{\frac{1}{2}x} f(x,y)dy \tag{10}$$

と積分の順序を $x\to y$ から、$y\to x$ に変更できる。

5

極座標 (r,θ) で表された曲線 $C: r=\cos^2\frac{\theta}{2}(0\le\theta\le 2\pi)$ について、次の問に答えよ。
(1)C を図示せよ。(2)C の長さを求めよ。

(1) 図の作成が面倒なので省略する。少し考えれば、分かるはず。
(2)$f(\theta)=\cos^2\frac{\theta}{2}$ とおく。求める曲線の長さを l とすると、

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{d}{d\theta}(f(\theta)\cos\theta)\right)^2+\left(\frac{d}{d\theta}(f(\theta)\sin\theta)\right)^2}d\theta = (\text{略}) \\ &= \int_0^{2\pi}\sqrt{f(\theta)^2+f'(\theta)^2}d\theta \end{aligned} \tag{11}$$

が成り立つ。この先の計算は各自で試みよ。私の計算が間違っていなければ、$l=4$ となる。