2010年7月26日　**量子論試験解答**　担当教員　加藤光裕

I. 光の粒子性と波動性について以下の問に簡潔に答えよ.

(1) 光の波動性を示す現象を一つあげ,それに基づいて光を波動と考える理由を述べよ.

(2) 光の粒子性を示す現象を一つあげ,それに基づいて光を粒子と考える理由を述べよ.

(3) 量子論においては,上にあげたような現象をどのように統一的に理解するのか説明せよ.

(解)

(1) 干渉

理由 Young の実験においては,干渉計の中に平均 1 個の光子しかないくらいに光源を弱くしても干渉縞が観測され,光を粒子と考えると説明できないから.

(2) 光電効果

理由 飛び出す電子の個数が光の強さによらず,一方で電子のエネルギーは光の強さによらず振動数だけで決まるから.

(3) 光は波動性と粒子性とを併せ持った「量子」であると考える.

II. 質量m,角振動数ωの調和振動子の Lagrangian は,

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

で与えられる.

(1) この Lagrangian から,座標xに対する共役運動量pを求め,Hamiltonian $H(x,p)$を導け.

(2) この系に対する時間依存しない Schrödinger 方程式を微分方程式として書き下せ.

(3) 前問の方程式の最低エネルギー状態(基底状態)に対するエネルギー固有値を,不確定性関係を用いて評価せよ.

(4) 前問の基底状態の規格化された波動関数は,$\varphi_0(x) = C\exp(-\alpha x^2)$なる形をしている.定数$C$および$\alpha$を決定せよ.また対応するエネルギー固有値を求めよ.但し,必要ならば次の公式を利用してもよい.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ay^2}dy = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

(5) 前問の波動関数を用いて,座標演算子$\hat{x}$と運動量演算子$\hat{p}$に対するゆらぎ$\langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2$および$\langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2$を求めよ.

(解)

(1) 共役運動量pは

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}.$$

また,Hamiltonian は

$$H(x,p) = p\dot{x} - L = m\dot{x}^2 - \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

(2) pを演算子

$$\hat{p} = -ih\frac{d}{dx}$$

と置き換えると

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\varphi = E\varphi.$$

(3) 基底状態において,エネルギーEは座標xと運動量pの量子的ゆらぎにより

$$E \sim \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$$

と書けるから,不確定性関係

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

の下で

$$E \geq 2\sqrt{\frac{1}{2m}(\Delta p)^2 \cdot \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2} = \omega(\Delta x \Delta p) \geq \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

(4) 波動関数φ_0とそのエネルギー固有値E_0に対する Schrödinger 方程式を変形すると

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} = \left(\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - E_0\right)\varphi_0$$

となる.この式に$\varphi_0(x) = C\exp(-\alpha x^2)$を代入すると

$$\left(\frac{2\hbar^2}{m}\alpha^2 x^2 - \frac{\hbar^2}{m}\alpha\right)Ce^{-\alpha x^2} = \left(\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - E_0\right)Ce^{-\alpha x^2}.$$

この式がxの恒等式として成り立つから

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}, E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

を得る.さらに,規格化条件より

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_0(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty}C^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}C^2 = 1$$

$$\therefore C = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}.$$

(5) <u>座標演算子$\hat{x}$に対するゆらぎ</u>

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0^* x^2 \varphi_0 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{\pi m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\right)' dx$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{\pi m\omega}} \left(\left[x e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx \right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{\pi m\omega}} \left(0 - \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega},$$

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0^* x \varphi_0 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx = 0$$

$$\therefore \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}.$$

<u>運動量演算子$\hat{p}$に対するゆらぎ</u>

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0^* \left(-\hbar^2 \frac{d^2\varphi_0}{dx^2} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} (m\hbar\omega - m^2\omega^2 x^2) e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx$$

$$= m\hbar\omega \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx - m^2\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx = m\hbar\omega - \frac{1}{2} m\hbar\omega$$

$$= \frac{1}{2} m\hbar\omega.$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0^* \left(-i\hbar \frac{d\varphi_0}{dx} \right) dx = im\omega \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} x e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx = 0$$

$$\therefore \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = \frac{1}{2} m\hbar\omega.$$

III. 量子力学に関する以下の事がらについてポイントを簡潔に説明せよ.

(1) 波動力学の確率解釈.

(2) 観測量が Hermite 演算子で表される事.

(解)

(1) 粒子を時刻tに位置$x \sim x + dx$で観測する確率は

$$|\psi(x,t)|^2 dx$$

に比例する.全観測確率が 1 であることを要求すると,規格化条件

$$\int |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

を得る.すなわち,波動関数の絶対値の 2 乗$|\psi(x,t)|^2$は,時刻tにおける粒子の観測確率密度を与える.

(2) 一般に,観測量Oに対して

$$\langle O \rangle = \int \psi^* O \psi dx = \int (\psi^* O \psi)^* dx = \langle O \rangle^*$$

が成り立つこと.実際に座標演算子$\hat{x}$と運動量演算子$\hat{p}$が,それぞれ Hermite 演算子であることを示そう:

$$\langle \hat{x} \rangle = \int \psi^* x \psi dx = \int (\psi^* x^* (\psi^*)^*)^* dx = \int (\psi^* x \psi)^* dx = \langle \hat{x} \rangle^*,$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \int \psi^* \left(-ih\frac{d\psi}{dx}\right) dx = \int (-ih)\left(-\frac{d\psi^*}{dx}\right)\psi dx = \int \left(-ih\frac{d\psi}{dx}\right)^* \psi dx = \int \left(\psi^*\left(-ih\frac{d\psi}{dx}\right)\right)^* dx$$
$$= \langle \hat{p} \rangle^*.$$

…間違いなどあったら,お知らせください.

2010 年 8 月 4 日　　髙橋　一史