数学ＩＡシケプリ　講義内容編

稲垣

平成17年8月13日

シケプリ講義内容編について

このシケプリ講義内容編は上村先生が黒板に書かれたものを元に作られてます。ただ、板書をすべて載せようとすると量が多くなるので、定理の証明は教科書に任せました。それ以外をほぼすべて載せました。要点がわかりにくいので、シケプリテスト対策編を併用してください。

1　数列・集合・関数

まずは基本的なことから
$a \in A \cdots a$ は集合 A に含まれる. a は集合 A の要素である.
$A \subset B \cdots$ 集合 A は集合 B に含まれる.
　　集合 A の要素全てが集合 B の要素である.
$\forall \cdots$ 任意の、全ての
$\exists \cdots$ 存在する
$\phi \cdots$ 空集合、この集合にはひとつも要素がない.

この先の４つは $\mathbf{R}$ だけ覚えればいい
$\mathbf{N} \cdots$ 自然数全体の集合（0は含まず）
$\mathbf{Z} \cdots$ 整数全体の集合
$\mathbf{Q} \cdots$ 有理数全体の集合
$\mathbf{R} \cdots$ 実数全体の集合
よって $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$

最大値

A を実数を要素とする集合とする.（$A\subset\mathbf{R}$）
A に対しβが
(1) 任意の $a\in A$ に対し $a\leqq\beta$である. ($\forall a\in B\Rightarrow a\leqq\beta$)
(2)$\beta\in A$
を満たすとき
β は A の最大値（maximum）であるといい, $\beta=$max$A$ と書く.

同様に最小値 (minimum) も定義される.

上界・上限

$A\subset\mathbf{R}$ で $A\neq\phi$である.
$\forall a\in A$ に対し, $a\leqq\gamma$となるγが存在するとき
A は上に有界であるという.
そのようなγを A の上界 (upper bound) といい,
A の上界全体を U_Aと書く.
U_Aの最小値αを A の上限 (supremum) といい
$\alpha=\sup A$ と書く

同様に下界 $L_A\left\{\gamma\in R\;\middle|\;\forall a\in A\text{ に対し}\gamma\leqq a\right\}$
の最大値を下限 (infimum) といい,inf A と書く.

命題 1.1

$$\alpha=\sup A\Longleftrightarrow\begin{cases}(1)\forall a\in A\Rightarrow a\leqq\alpha\\(2)\forall\varepsilon>0\text{ に対し}\quad\alpha-\varepsilon>a\text{ なる }a\in A\text{ が存在する}\end{cases}$$

(1) はαが A の上界である
(2) はαより小さいと上界にはならない
ということ

注意　最大値は上限　 つまり $\alpha=$max$A\Rightarrow\alpha=\sup A$
$\because a\in A$ より (2) の a としてα自身を持ってこれば よい.

同様に,

$$\alpha=\inf A\Longleftrightarrow\begin{cases}(1)\forall a\in A\Rightarrow a\geqq\alpha\\(2)\forall\varepsilon>0\text{ に対し}\quad\alpha+\varepsilon>a\text{ なる }a\in A\text{ が存在する}\end{cases}$$

例 1　$A=[-1,2)$

　　$\max A$ は存在しない　$\min A=-1$

　　$\sup A=2$　　　　　　$\inf A=-1$

例 2　$A=\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n=1,2,3,\ldots\right\}$

　　$\max A=1$　　　　　　$\min A$ は存在しない

　　$\sup A=1$　　　　　　$\inf A=0$

例 3　$A=\{$ 5 以下の無理数 $\}$

　　$\max A$ は存在しない．しかし，$\sup A=2$

　下界がないから下限もない．つまり A は下に有界ではない．

このことを $\inf A=-\infty$ と書く．

例 4　$A=\left\{\frac{n}{n+1}\,\middle|\, n=1,2,3,\ldots\right\}$

　　$\max A$ は存在しない．しかし，$\sup A=1$

　　$\min A=\frac{1}{2}$　　$\therefore\ \inf A=\frac{1}{2}$

例 5　$A=\left\{m+\frac{1}{n}\,\middle|\, n=1,2,3,\ldots m=1,2,3,\ldots\right\}$

　上界がないから最大値, 上限がない

　　minA は存在しない. しかし $\inf A=1$

　存在について

定理 1.2 (実数の連続性)$\phi\neq A$ が $\begin{cases}\text{上に有界} \Rightarrow \sup A \text{ が存在する}\\ \text{下に有界} \Rightarrow \inf A \text{ が存在する}\end{cases}$

実数の連続性は認めてこれから進める

　数列

以下数列といったら無限数列をさすことにする.

無限数列を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書く.

高校では, n が限りなく大きくなるにつれて a_nが一定の値 a に近づくとき

a_nが a に収束するといい $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ と書く.

　定義

$\forall\varepsilon>0$ に対して $n>N(\in\mathbf{N})\Rightarrow|a_n-a|<\varepsilon$のとき,

a_nが a に収束すると定義し,

$\lim_{n\to\infty} a_n=a$ と書く.

$|a_n-a|<\varepsilon\Leftrightarrow a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$だから,

この定義は，どんな正の数εに対して, a_{N+1}から先のものが全てある区間 $(a-\varepsilon<a+\varepsilon)$ の中に収まる自然数 N があるとにいうこと.

例　$a_n = \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$　　$n=1,2,3,\ldots$　のとき $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$を求める.

$\forall\varepsilon>0$ に対し　$n>N_0 \Rightarrow \dfrac{1}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$となる N_0が存在する.

さて, $n>N_0$として

$$a_n = \frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N_0}+\quad \underbrace{\frac{1}{N_0+1}+\cdots+\frac{1}{n}}_{\text{全て}\frac{\varepsilon}{2}\text{未満}\ (n-N_0)\text{個}}\quad)$$

$$<\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N_0})+\frac{\varepsilon}{2}(n-N_0)$$

$$<\frac{1}{n}\underbrace{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N_0})}_{n\text{ が変化しても一定}}+\frac{\varepsilon}{2}(n-N_0)\quad\left(\because \frac{1}{n}(n-N_0)<1\right)$$

ここで　$n>N \Rightarrow \dfrac{1}{n}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{N_0})<\dfrac{\varepsilon}{2}$となる N(ただし $N>N_0$) をとると

$\forall\varepsilon>0$ に対し $n>N$ とすると

$(-\varepsilon<)0<a_n=\dfrac{1}{n}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n})<\varepsilon$とできる

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

補足　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ とは

$\forall M>0$ に対し $n>N \Rightarrow a_n>M$ となる自然数 N があること

定理 1.3

上に有界である単調増加

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$(全ての n に対して $a_n \geqq$ となる M が存在し，常に $a_n \geqq a_{n+1}$である) は収束する

下に有界である単調減少数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する

上極限・下極限

収束しない例 1　$a_n=n$　　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$

収束しない例 2　$a_n=(-1)^n\dfrac{n+1}{n}$　　$n=1,2,\ldots$

有限数列だが収束しない

しかし $1,-1$ はこの数列にとって特徴的な数.それぞれのまわりには無限に多くの a_n があり（集積しており）1 はそのような数の最大　-1 はそのような数の最小

このような ”集積点の最大のもの ”を上極限

このような ”集積点の最小のもの ”を下極限　という

定義は 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$に対し

(1)$\forall\varepsilon>0 a_n \geqq \lambda+\varepsilon$なる a_n は有限個しかなく

(2)$\forall\varepsilon>0$ に対し $a_n>\lambda-\varepsilon$なる a_nは無限個ある

の 2 条件を満たす数 λを数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の上極限(upper limit)といい

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n=\lambda$と書く.

上極限は１つまでしかない

(1)$\forall\varepsilon > 0 a_n \leqq \mu - \varepsilon$なる a_n は有限個しかなく
(2)$\forall\varepsilon > 0$ に対し $a_n < \mu + \varepsilon$なる a_nは無限個ある
の２条件を満たす数 u を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の下極限(lower limit) といい
$\liminf_{n\to\infty} a_n = \mu$と書く.

定理 1.4
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が有界数列 $(\exists M; |a_n| \leqq M)$
$\Rightarrow \exists \limsup_{n\to\infty} a_n,\quad \exists \liminf_{n\to\infty} a_n$

命題 1.5
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が収束する
$\Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n$と $\liminf_{n\to\infty} a_n$　が存在して
$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$

定理 1.6 (Bolzano Weierstrass の定理)
有界数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束する部分列を持つ

$$
\begin{array}{l}
a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots a_n \ldots \\
\qquad\qquad\qquad \downarrow \;\; \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\
\qquad\qquad\qquad \underbrace{a_{i_1} \;\; a_{i_2} \qquad\qquad a_{i_m}}_{\text{選び出す}} \cdots \to a
\end{array}
$$

定理 1.7　 Cauchy（コーシー）の判別法
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が収束する
$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ に対し $n, m > N \quad \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$となる自然数 N がとれる
極限値を求めずに数列そのものから収束するかどうかを判定する方法

例
$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, \ldots \qquad a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{11}{6}, \ldots$

$$
\begin{aligned}
a_{2n} - a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
&> \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\text{ 個}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がもし Cauchy の判定法の条件を満たすなら $\varepsilon < \frac{1}{2}$に対し, ある N がとれて $n, m > N \;\Rightarrow\; |a_n - a_m| < \varepsilon < \frac{1}{2}$となるが上で見たようにこの a_nはそうなっていない.
よって Cauchy の判定法よりこの a_nは収束しない

特に$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\infty \ \ as \ \ n\to\infty$

例
$a_n = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}$
$n>m$として
$a_n - a_m = \frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$
$< \frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$
$= \frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m-2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$
$= \frac{1}{m}-\frac{1}{n}<\frac{1}{m}$
$\frac{1}{N}<\varepsilon$となるようにNをとり$n>m>N$とすると$|a_n-a_m|<\frac{1}{m}<\frac{1}{N}<\varepsilon$
よってのCauchyの判別法よりa_nは収束する
また$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$は$\alpha>1$なら収束$\alpha\leqq 1$なら発散

n次元空間と点列
$(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leftarrow n$個の実数の組
の全体を$\mathbf{R}^n$と書く
$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mid x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbf{R}\}$
$\mathbf{R}^n$の元を$X,Y,Z,A,B,\ldots$　などと書く
$X,Y\in\mathbf{R}^n$に対し2点間の距離$|X-Y|$を
$|X-Y|=\sqrt{\sum_{n}^{i=1}(x_i-y_i)^2}$と定義する

$|X-Y|$は次の性質を持つ
(1)$|X-Y|\geqq 0, |X-Y|=0\Leftrightarrow X=Y$
(2)$|X-Y|=|Y-X|$
(3)$|X-Y|\leqq|X-Z|+|Z-Y|$
これらは定義から確かめられる

定義
$\mathbf{R}^n$の点列$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$に対し$\lim_{k\to\infty}|A_k-A|=0$のとき
$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$はAに収束するといい$\lim_{k\to\infty}A_k=A$と書く
$\lim_{k\to\infty}A_k=A$のためにはA_kの各成分（のなす数列）がAの対応する成分に収束する
ことが必要十分である
また$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$が収束する$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$に対して
$j,k>N\Rightarrow|A_j-A_k|<\varepsilon$となる自然数$N$が存在する

開集合・閉集合
$A \in \mathbf{R}^n$と$\delta > 0$ に対し
$U_\delta = \left\{X \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; |X - A| < \delta\right\}$ を
A の$\delta -$ 近傍という

定義
D(集合) $\subset \mathbf{R}^n, A$(元) $\in \mathbf{R}^n$に対し
(1)A が D の内点であるあるδ> 0 があって $U_\delta(A) \subset D$
$D^C \left\{X \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; X \notin D\right\}$ とは D の補集合のこと
もちろん D の内点は D の元 $U_\delta(A) \cap D^C = \phi$
(2)A が D の外点である
ある$\delta > 0$ があって $U_\delta(A) \subset D_C$
$\Leftrightarrow U_\delta(A) \cap D = \phi$
もちろん D の元は D の外点でない
(3)A が D の境界点である
$\forall\delta > 0$ に対し $U_\delta(A) \cap D \neq \phi$ かつ $U_\delta(A) \cap D^C \neq \phi$
どんなにδを小さくとっても $U_\delta(A)$ に D の元と D^Cの元が混在する

D が与えられたとき $\mathbf{R}^n$の元 A は
D の内点であるか, 外点であるか, 境界点であるかのいずれかである

D の境界点の全体を D の境界 (boundary) といい
∂D と書く　　　∂:round di (ラウンド　ディー)
定義より$\partial D = \partial D^C$

定義
$D \subset \mathbf{R}^n$
D が開集合 $\cdots \partial D \cap D = \phi \leftarrow$ D の点はすべて内点
D が閉集合 $\cdots \partial D \subset D \leftarrow$ 境界点はすべて D に属す

補題 1.8
$D \neq \phi$のとき
(1)D が開集合 $\Leftrightarrow$ D の任意の元 A に対して $\exists\delta > 0$　が存在して $U_\delta(A) \subset D$
(2)D が閉集合 $\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} A_k(\in D) = A \Rightarrow A \in D$
$\leftarrow$ D 内の点列が収束したとするとその極限も D の元である
(3)D が閉集合 $\Leftrightarrow$ D^Cが開集合
D が開集合 $\Leftrightarrow$ D^Cが閉集合

補足 $D = \mathbf{R}^n$は開集合でもあるし閉集合でもある
ϕ(空集合) も開集合かつ閉集合と規定する

例

$D=\left\{X\in\mathbf{R}^n\;\middle|\;|X|\leqq 1\right\}$

この D に対し$\partial D=\left\{X\in\mathbf{R}^n\;\middle|\;|X|=1\right\}$

$\therefore \partial D\subset D$

$\therefore D$ は閉集合

あるいは D^Cは補題 1.8 の (1) の条件を満たす

よって D^Cは閉集合

補題 1.8 の (3) より D は閉集合

$A\in D^C$に対し $U_\delta(A)\subset D^C$となる$\delta>0$ がある

例

$D=\left\{X\in\mathbf{R}^n\;\middle|\;|X|<1\right\}$

$D\cap D=\phi\ \therefore D$ は開集合$\partial D\subset D$

例

$D=\left\{X\in\mathbf{R}^n\;\middle|\;|X|=1\right\}$

これでは$\partial D=D$ よって $\partial D\subset D\therefore D$ は閉集合

例

$D=\left\{X\in\mathbf{R}^n\;\middle|\;0<|X|\leqq 1\right\}$

$\partial D=\{|X|=1\}\cup\{X=0\}$

よって、開集合でも閉集合でもない

定理 1.9(Bolzano-Weierstrass)

D は $D\subset\mathbf{R}^n$で有界閉集合

$\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$は D における点列

$\Rightarrow \{X_k\}_{k=1}^{\infty}$の部分列 $\{X_{kj}\}_{j=1}^{\infty}$で D 内で収束する部分列をもつ

連続関数

最大・最小の原理

(1)閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 f には最大値・最小値が存在する

(2) もし最大・最小をとる x が $[a,b]$ の内部にあり

そして f が微分可能ならば　$f'(x)=0$

連続関数の定義

集合 $D\subset\mathbf{R}^n$

$F:D$ の各点に数を対応させる写像を関数(function) という

このときは n 変数関数という

$f\ :\ D(\subset \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}\quad A \in D$ とする
$\forall\varepsilon > 0$ に対して
$|X - A| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$となる$\delta > 0$ があるとき
f は点 A で連続である (continuous) という
f が D の各点で連続であるとき
f は D において連続であるという
連続関数の和、差、積、商 (分母 $\neq 0$)、合成は連続関数になる

例
$$f(x,y) = \frac{\sin x^5 + y^6}{x^4 + y^4 + 1}$$
f は $\mathbf{R}^2$全体で定義された関数とする　$f\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$
f は連続関数の和、差、積、商（分母 $\neq 0$)、合成であるので
$\mathbf{R}^2$上の連続関数である

例
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^5 + y^6}{x^4 + y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
これは、$\mathbf{R}^2$全体で定義された関数であるが連続関数か？
原点（$0,0$）以外では前と同様にして連続である
問題は原点 $(0,0)$ で連続か？
連続の定義は $|X - A| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$だから
つまり $\forall\varepsilon > 0$ に対して
$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta\ \Rightarrow \left|\frac{\sin x^5 + y^6}{x^4 + y^4}\right| < \varepsilon$$
となる$\delta > 0$ が取れるか
$\left|\dfrac{\sin t}{t}\right| \leqq 1$ ($\forall t \in \mathbf{R}$) に注意して
$$\left|\frac{\sin x^5 + y^6}{x^4 + y^4}\right| = \left|\frac{\sin x^5 + y^6}{x^5 + y^6}\right| \cdot \left|\frac{x^5 + y^6}{x^4 + y^4}\right| \leqq \left|\frac{x^5 + y^6}{x^4 + y^4}\right|$$
$$= \left|\frac{x^5}{x^4 + y^4} + \frac{y^6}{x^4 + y^4}\right| \leqq \left|\frac{x^5}{x^4 + y^4}\right| + \left|\frac{y^6}{x^4 + y^4}\right|$$
$$\leqq \left|\frac{x^5}{x^4}\right| + \left|\frac{y^6}{y^4}\right| = |x| + |y^2|$$
そこで$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$とすると
$|x| \leqq x^2 + y^2 < \delta\quad ,\quad |y^2| < \delta^2$
$\sqrt{x^2+y^2} < \delta\ \Rightarrow\ |f(x,y)| < \delta + \delta^2$
$\varepsilon = \delta^2 + \delta$を考えて$\delta > 0$ をとると
$\sqrt{x^2+y^2} < \delta\ \Rightarrow |f(x,y)| < \delta + \delta^2 < \varepsilon$
よって $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ でも連続
$\therefore f(x,y)$ は連続である

例

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

これも $f\ :\mathbf{R}^2\ \to \mathbf{R}$ であり原点 $(0,0)$ 以外では前と同様に連続である

原点 $(0,0)$ でも連続か？

極座標 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を用いると

$F(x,y) = \dfrac{r^2 \sin\theta\cos\theta}{r^2} = \sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$であり

f はθを与えるごとに　(すなわち (x,y) 平面の原点を通る直線を与えるごとに)

異なる値を取り連続とは思えない

$\sqrt{x^2+y^2} < \delta\ \Rightarrow |f(x,y)| < \dfrac{1}{4}$とはならないことを示す

$\leftarrow$　定義を満たさないことを示す

$x = y$ とすると x を十分小さくすれば$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$となるが

$|f(x,y)| = \left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right| = \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{4}$ではない

定義に反す

$\therefore$　連続ではない

定理 1.10　(Weierstrass)

f ：有界閉集合 D 上の連続関数 $\Rightarrow f$ は D において最大値および最小値を持つ

定理 1.11　（平均値の定理）

$f(x)$ は $[a,b]$ で連続 (a,b) で微分可能

$\Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ となる$\xi \in (a,b)$ がある

定理 1.12

$f(x)$ は $[a,b]$ で連続 (a,b) で微分可能かつ $f'(x) \equiv 0 (a < x < b)$

$\Rightarrow f$ は定数関数

2　多変数関数の微分法

D は $\mathbf{R}^n$ の開集合で f は $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ の n 変数関数
多変数関数 f が微分可能とはどう定義したらよいか？

復習 (１変数関数)
$f(x)$ が $x = a$ で微分可能 $\Leftrightarrow \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha$ となる α がある
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - \{f(a) + \alpha(x - a)\}}{x - a} = 0$
$\Leftrightarrow \varepsilon(x) = f(x) - \{f(a) + \alpha(x - a)\}$ とするとき $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\varepsilon(x)}{|x - a|}$ となる数 α がある
($\varepsilon(x)$ は距離（$|x - a|$ で割っても $x \to a$ とするとき 0 になるぐらい小さい)
$\Leftrightarrow f(x) = f(a) + \alpha(x - a) + \varepsilon(x)$ かつ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\varepsilon}{|x - a|} = 0$ となる α がある
　　$\leftarrow f(x)$ が $x = a$ の近くで直線 $y = f(a) + \alpha(x - a)$ に近似できる
　　２変数関 $z = f(x, y)$ に対しても同様に考える

　定義
D は $\mathbf{R}^n$ の開集合で、f は $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ の n 変数関数
$A = (a, b) \in D$ として $f(x, y)$ が
$f(x, y) = f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b) + \varepsilon(x, y)$ かつ
$\lim\limits_{分母 \to 0} \dfrac{\varepsilon(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$ となる α, β があるとき
f は点 $A = (a, b)$ において微分可能(differentiable)であるという
$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ は距離をあらわす

図形的には $f(x, y)$ と点 $(a, b, f(a, b))$ を通る平面
z と $f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b)$ との差 $\varepsilon(x, y)$ が
$\lim\limits_{分母 \to 0} \dfrac{\varepsilon(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$　　を満たすようにできるように α, β をとったときの
$z = f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b)$ を
曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(a, b, f(a, b))$ における接平面という

　もし $f(x, y)$ が (a, b) で微分可能なら、このとき $y = b$ として
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\varepsilon(x, b)}{\sqrt{(x - a)^2}} = 0$　　$\varepsilon(x, b) = f(x, b) - f(a, b) - \alpha(x - a)$ より
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x, b) - f(a, b) - \alpha(x - a)}{|x - a|} = 0$
$\therefore \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x, b) - f(a, b) - \alpha(x - a)}{x - a} = 0$
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \alpha$
同様に β も計算できる

以上により、$f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば

$$\begin{cases} \alpha = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \\ \beta = \lim_{y\to b} \dfrac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} \end{cases}$$

となる (右辺の極限値は存在する)

右辺の極限値を (それぞれ)$f(x,y)$ の (a,b) での x,y に関する偏微分係数といい

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ あるいは $f_x(a,b), f_y(a,b)$ と書く

$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$, $\lim_{y\to b} \dfrac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$ の極限が存在するとき

f は (a,b) で偏微分可能であるという

偏微分に対して、微分を全微分ともいう

ここは重要なのでまとめ（と補足）

D を $D \subset \mathbf{R}^2$の開集合、$f(x,y)$ を $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ の 2 変数関数とする

$(a,b) \in D$ のとき

f が (a,b) で微分可能 (全微分可能ともいう) とは

$f(x,y) = f(a,b) + \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \varepsilon(x,y)$ かつ $\displaystyle\lim_{\text{分母}\to 0} \frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$

となる定数α, βが存在することをいう

f が微分可能であるとき

f は偏微分可能でα, βは $\begin{cases} \alpha = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \leftarrow f(x,b) \text{ の 1 変数関数としての微分係数} \\ \beta = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y\to b} \dfrac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} \leftarrow f(a,y) \text{ の 1 変数関数としての微分係数} \end{cases}$

と偏微分係数に一致する

α, βは存在するかどうかわからないが存在するとしたら一通りのみ

α, βが存在するとき f は (a,b) で偏微分可能という

定理 2.1

(1)f が (a,b) で微分可能 $\Rightarrow$ f は (a,b) で偏微分可能

(2)f が (a,b) で微分可能 $\Rightarrow$ f は (a,b) で連続

(1) の逆つまり f が (a,b) で偏微分可能

$\Rightarrow$ f は (a,b) で微分可能は一般には成り立たない

f が (a,b) で偏微分可能のとき

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$$

ならば f が (a,b) で微分可能である

(1) の逆が成り立たない例

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ は

原点 $(0,0)$ では $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\dfrac{0-0}{x}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

と偏微分可能である。ところが $f(x,y)$ は原点で連続ですらない

よって定理 2.1 の (2) より f は原点で微分可能でない

f が偏微分可能であるとき

微分可能の定義を調べる以外方法で

微分可能になるための十分条件であることを示す方法を考える

定義

f が D において偏微分可能 (D の各点で偏微分可能) ならば D の各点 (x,y) で

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ が定まる。これらを x と y の関数と考えるとき

これらを f の偏導関数 (partial derivatives) という

(これは片方の変数を止めて、もう片方の変数で微分したもの)

$f(x,y)=\log\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1+\dfrac{y}{x}\right\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+\dfrac{y}{x}}=-\frac{y}{x(x+y)}\quad,\quad\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{y}{x}}=\frac{1}{x+y}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を f_x とも書く , $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を f_y とも書く

定理 2.2

f が D において偏微分可能で偏導関数が D において連続

$\Rightarrow$ f は D において微分可能

定理 2.2 より $f(x,y)=\log\left(1+\dfrac{y}{x}\right):D(\subset\mathbf{R}^2)\to\mathbf{R}$

は D において微分可能であることはすぐわかる

つまり初等関数の偏導関数は初等関数で

分母 $\neq 0$ のところでいつでも連続であり

よって定理 2.2 から f は微分可能

定義

f が偏微分可能で偏導関数が連続であるとき

f は C^1 級の関数(f is a function of class C^1) であるという

この用語を使うと定理 2.2 は「C^1 級 $\Rightarrow$ 微分可能」といえる

定義
関数 $f(x,y)$ が微分可能であるとき
$z-f(a,b)=\dfrac{f}{x}(a,b)(x-a)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$
を曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面という
(a,b,c) を通る平面の方程式は$\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)=0$ と表せる

例
$z=\log\left(1+\dfrac{y}{x}\right)$ の $(1,1,\log 2)$ における接平面の方程式は
$x-y+2z-\log 4=0$ である

n 変数関数の微分可能性
$f(X):D(\subset \mathbf{R}^n$で開集合$)\ \to \mathbf{R}$
$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, 定点 $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ がある
f が定数$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$により
$f(x)=f(A)+\alpha_1(x_1-a_1)+\alpha_2(x_2-a_2)+\ldots\alpha_n(x_n-a_n)+\varepsilon(x)$
かつ $\displaystyle\lim_{X\to A}\frac{\varepsilon(x)}{|X-A|}=0$
と書けるとき f は A で微分可能

定理 2.1 と 2.2 の n 変数版
f が C^1級 $\Rightarrow$ 微分可能 $\Rightarrow$ 連続
f が C^1級 $\Rightarrow$ 微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能

微分
$df=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_2+\ldots\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_n$
を f の微分という
高校で習ったのは「微分する」という動詞。この「微分」は名詞

df（関数の記号）は $x_1,x_2,\ldots,x_n,dx_1,dx_2,\ldots,dx_n$の 2 n 個の変数の関数である
2 変数なら $df=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$ が微分
概念的には $f(X+dX)-f(X)\approx df$
$\approx$:近似

2階偏導関数

2変数関数 $f(x,y)$ が偏微分可能なら$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ がある

これらがさらに偏微分可能なら$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right), \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right), \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right), \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

の4つの関数が定められる

これらを f の2階偏導関数 (the derivatives of the second order) といい

それぞれ

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

あるいは f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} , f_{yy}と書く

f_{xy}と f_{yx}は違う

f_{xy}は x で微分した後, y で微分する

f_{yx}は y で微分した後, x で微分する

例 $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ $\quad \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \leftarrow$ 原点 $(0,0)$ を除いたところで定義

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

計算すると

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{6xy-2x^3}{(x^2+y^2)^3}$

この例では$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ が成立している

定理 2.3(Schwartz の定理)

$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$が存在し$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$が連続

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$が存在し $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

定義

f の2階偏導関数が全て連続であるとき f はC^2級の関数であるという

例題

C^2級の関数 $u(x,y)$ が $u_x + u_y = (x+y)e^x$ $\quad$ (1) を満たすとき

$u_{xx} - u_{yy} = (x+y)e^x$を満たすことを示せ

(1) を x で微分して $u_{xx} + u_{yx} = (x+y)e^x + e^x$

(1) を y で微分して $u_{xy} + u_{yy} = e^x$

$u(x,y)$ はC^2級だから $u_{xy} = u_{yx}$

この3つより

$u_{xx} - u_{yy} = (x+y)e^x$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$ が C^2級に対して成り立つ

定義
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ とする
f の m 階までの偏導関数が全て存在して
連続であるとき f は D 上の C^m級の関数であるという
f は D 上の関数であることを $f \subset C^m(D)$ と書く
初等関数の加減乗除と合成で得られる関数は（$\forall m$ に対して）C^m級になる

定理 2.4
f が D 上の C^m級関数ならば m 階偏導関数は
（$x_1, x_2, \ldots, x_n$でそれぞれ何回微分したかで決まり）微分の順序によらない

$$\frac{\partial^{12}}{\partial z \partial t \partial y \partial z \partial x \partial z \partial y \partial z \partial x \partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^{12}}{\partial x^3 \partial y^3 \partial z^5 \partial t}$$

n 変数関数の m 階偏導関数は$\dfrac{\partial^m}{\partial {x_1}^{j_1} \partial {x_2}^{j_2} \ldots\ldots \partial {x_n}^{j_n}}$と表せる
ただし $j_1 \geqq 0, j_2 \geqq 0, \ldots, j_n \geqq 0$
$j_1 + j_2 + \cdots + j_n = m$

例題
C^m級関数 f が$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$を満たすとき
$\dfrac{\partial^m f}{\partial x^m} = \dfrac{\partial^m f}{\partial y^m}$となることを示せ
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 以下同様

合成関数の微分法
$\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$の多変数版
$T = (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in E \subset \mathbf{R}^m$
$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in D \subset \mathbf{R}^n$
$E \xrightarrow{\text{写像}\Phi} D \xrightarrow{\text{写像 } f} \mathbf{R}$
$E \xrightarrow{F} \mathbf{R}$
$F(T) = f(\Phi(T))$ $\leftarrow f$ と Φ の合成関数 $f \circ \Phi$と書く

$$\Phi \begin{cases} x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_m) \\ x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots, t_m) \\ \vdots \quad = \vdots \\ x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_m) \end{cases}$$

$x_1 \leftarrow$ 数
$x_1(t_1, t_2, \ldots, t_m) \leftarrow$ 関数 変数 t_1〜t_mによって求まる
$F(t_1, t_2, \ldots, t_m) = f(x_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots x_n(t_1, t_2, \ldots, t_m))$
f と $x_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ の偏導関数で
F の偏導関数を表せる

定理 2.5
f が微分可能な n 変数関数で
$x_1(t_1,t_2,\ldots,t_m), x_2(t_1,t_2,\ldots,t_m),\ldots\ \ x_n(t_1,t_2,\ldots,t_m)$ が全て微分可能な m 変数関数
$\Rightarrow F(t_1,t_2,\ldots,t_m)$ も微分可能で

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}=\frac{\partial F}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_j}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_j}+\ldots\frac{\partial F}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_j}\quad(j=n=1,2,\ldots m)$$

正確に示すと

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t_1,t_2,\ldots,t_m)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(x_1(t_1,t_2,\ldots,t_m),x_2(t_1,t_2,\ldots,t_m),\ldots,x_n(t_1,t_2,\ldots,t_m)\right)\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$$

行列を用いて

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t_1},\frac{\partial F}{\partial t_2},\ldots,\frac{\partial F}{\partial t_m}\right)=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\frac{\partial F}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}&\frac{\partial x_1}{\partial t_2}&\cdots&\frac{\partial x_1}{\partial t_m}\\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1}&\frac{\partial x_2}{\partial t_2}&\cdots&\frac{\partial x_2}{\partial t_m}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1}&\frac{\partial x_n}{\partial t_2}&\cdots&\frac{\partial x_n}{\partial t_m}\end{pmatrix}$$

と表せる

まとめ
$(t_1,t_2,\ldots,t_m)\in E\subset\mathbf{R}^m$
$(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in D\subset\mathbf{R}^n$
$E\xrightarrow{\Phi}D\xrightarrow{f}\mathbf{R}$
$E\xrightarrow{F}\mathbf{R}$
で $f,\ x_1(t_1,t_2,\ldots,t_m),x_2(t_1,t_2,\ldots,t_m),\ldots\ \ x_n(t_1,t_2,\ldots,t_m)$ が微分可能
$\Rightarrow F$ も微分可能で

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_j}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_j}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_j}$$

注意
$f,x_i(t_1,t_2,\ldots,t_m)\ \ i=n=1,2,\ldots n$ が偏微分可能
$\Rightarrow F$ が偏微分可能という命題は成り立たない

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad\text{で}\qquad x(t)=t,y(t=t)\ \text{のとき}$$

$$F(t)=\quad\begin{cases}\dfrac{1}{2} & t\neq0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

$F(t)$ は連続ですらない

定理2.5の系１　$m=1$のとき
$f, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ は微分可能
$\Rightarrow f\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)$ は微分可能で
$\dfrac{d}{dx} f\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \dfrac{dx_2}{dt} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \dfrac{dx_n}{dt}$

例題
$u(x,y)$ が $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ を満たす
u を C^1級関数とするとき $u(e^t, e^{-t})$ は定数であることを示せ
$\dfrac{d}{dt}u(e^t, e^{-t}) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(e^t, e^{-t}) \cdot \dfrac{d}{dt}e^t + \dfrac{\partial u}{\partial y}(e^t, e^{-t}) \cdot \dfrac{d}{dt}e^{-t} = e^t\dfrac{\partial u}{\partial x}(e^t, e^{-t}) - e^{-t}\dfrac{\partial u}{\partial y}(e^t, e^{-t})$
$x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ に $x = e^t, e^{-t}$を代入してみて
$e^t\dfrac{\partial u}{\partial x}(e^t, e^{-t}) - e^{-t}\dfrac{\partial u}{\partial y}(e^t, e^{-t}) = 0$
よって$\dfrac{d}{dt}u(e^t, e^{-t}) = 0$　　これより $u(e^t, e^{-t})$ は定数関数

系２
f が微分可能で
$x_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ が偏微分可能
$\Rightarrow F(t_1, t_2, \ldots, t_m) = (x_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_m))$ は偏微分可能で
$\dfrac{\partial F}{\partial t_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \dfrac{\partial x_2}{\partial t_j} + \ldots \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \dfrac{\partial x_n}{\partial t_j}$が成り立つ
（$t = t_j$ として系１を適用）
系３
f が C^1級で
$x_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ が C^1級
$\Rightarrow F(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ も C^1 級

例題

２次元極座標 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ により $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ はどう変換されるか？

$\dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}$

$\dfrac{\partial f}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \theta} == -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}$

よって

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\cos\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

右から逆行列をかけて

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

合成関数の高階の偏導関数の計算則も同様に計算される

例えば今の極座標の変換より

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \ldots$

以下計算して

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r$ と θ で表したあまりきれいでない式

同様に

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = r$ と θ で表したあまりきれいでない式

足して

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \leftarrow$ ラプラス作用素の変換式

3　Taylor 展開

　定理 3.1　(ロピタル (l'Hospital) の定理)
(1)$f(x), g(x)$ ：$[a, b)$ で連続 (a, b) で微分可能
$g'(x) \neq 0 \quad \in (a, b)$　,　$f(a) = g(a) = 0$
$\exists L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \;\Rightarrow\; \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が存在して $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ に等しい

(2)$f(x), g(x)$ ： $x > R$ で微分可能で $G'(x) \neq 0$ とする
$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \;\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ で
$\exists L = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \;\Rightarrow\; \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

注意 $[a, x]$ で平均値の定理を用いると
$\exists \xi; g(x) - g(a)(= 0) = g'(\xi)(x - a)$
仮定から $g'(\xi) \neq 0 \quad \therefore g(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a, b]$

(1) では $(a) = g(a) = \infty, \; \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ でもよい

　例
$\lim_{x \to 1} \frac{\log x + 1 - x}{(x-1)^2} \;\leftarrow$　両辺ともに $x \to 1$ で 0 に向かう
$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}$ と存在するから
$\lim_{x \to 1} \frac{\log x + 1 - x}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \;\leftarrow\; \frac{0}{0}$型　　$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$
よって $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$
$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ にロピタルの定理は使えない
$(\sin x)' = \cos x$ を導くのに $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を使っているため
cf.$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = 0$ これを $x - \sin x = o(x^2)$ と書く
もっと一般に $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ であるとき $f(x) = o\left(g(x)\right) \;\; as \;\; x \to a$ と書く

例

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{e^x}\quad \cdots$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha)(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)x^{\alpha-m}}{e^x}$$

$\alpha-m<0$ となるところでロピタルの定理を使う

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0\quad(\forall\alpha)$$

$$x_\alpha=o\left(e^x\right)\quad as\quad x\to\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=\infty\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{1000}}+x^{30}}{x^{2000}+x+1}=\infty\qquad \lim_{x\to\infty}x^\alpha e^{-x}=0$$

また$\alpha>0$ なら

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0$$ より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0\qquad \log x=o(x^\alpha)\quad as\quad x\to\infty$$

$\alpha>0$ なら $\lim_{x\to 0}x^\alpha\log x=\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{t^\alpha}\log x=0$ $(\frac{1}{x}=t$ とおいた$)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0\ \ \forall\alpha>0\quad \lim_{x\to 0}x^\alpha\log x=0\quad \forall\alpha>0$$

$$\lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{10000000}}\log x=0$$

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}=$ 不定などとしてはいけない

実際には $\left|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}\right|\leqq\left|\frac{x^2}{\sin x}\right|\quad\because\quad\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq 1$

$\left|\frac{x^2}{\sin x}\right|=\left|\frac{x}{\sin x}\right|\cdot|x|$ より

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0$$

テイラー展開

$f(x)$ が $x=c$ のまわりで微分可能ならば

$(\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)}{x-c}=0$ ならば)

$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+o(x-c)\ \ as\quad x\to c$ である

次に $f(x)$ が $x=c$ のまわりで 2 回微分可能なとき

$f(x)=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+o\left((x-c)^2\right)$

が成り立つように定数 a_0,a_1,a_2 がとれるかということを考える

必要条件から考える

$x\to c$ として $\lim_{x\to c}\dfrac{o\left((x-c)^2\right)}{x-c}=0$ より $a_0=f(c)$

そこで $a_0=f(c)$ とすると

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=a_1+a_2(x-c)+o(x-c)\ \leftarrow\ \frac{o\left((x-c)^2\right)}{x-c}=o(x-c)$$

ここで $x=c$ として $f'(c)=a_1$

$\therefore a_1=f'(c)$

これより $\dfrac{f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)}{(x-c)^2}=a_2+o(1)$

ここで $x\to c$ とするとロピタルの定理より

$$\text{左辺}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)}{(x-c)^2}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)}{2(x-c)}=\frac{1}{2}f''(c)$$

よって

$f(x)=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+o\left((x-c)^2\right)$ を成り立たせる a_0,a_1,a_2 があれば

$$\begin{cases} a_0=f(c)\\ a_1=f'(c)\\ a_2=\dfrac{1}{2}f''(c)\end{cases}$$

逆に $a_0=f(c),a_1=f'(c),a_2=\dfrac{1}{2}f''(c)$ とすると $f(x)=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+o\left((x-c)^2\right)$ が成り立つことは

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)-\dfrac{1}{2}f''(c)(x-c)^2}{(x-c)^2}=0$$

をロピタルの定理を 2 回用いることによって示せる

もっと一般に

定理 3.2

$f(x)$ は $x=c$ のまわりで n 回微分可能とすると

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\dots$$
$$+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+o\left((x-c)^n\right)\quad as\ \ x\to c$$

例

$f(x) = e^x, \quad c = 0$

$f'(x) = e^x \ , \ f''(x) = e^x, \dots$

$f^{(n)}(0) = 1$

$e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + o(x^n) \quad as \ \ x \to 0$

$f(x) = \sin x \ \ c = 0$

$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x, \dots$

$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0, \dots$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + 0 \times x^{2n+2} + o(x^{2n+2}) \ \ as \ \ x \to 0$$

同様に

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \ \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}) \ \ as \quad x \to 0$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \ \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n) \quad as \quad x \to 0$$

例

Taylor 極限の計算例

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x}$とする。 $\sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$

$$\frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = \frac{x - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)}{x^2\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)} = \frac{\frac{1}{6}x^3 - o(x^4)}{x^3 + o(x^4)} = \frac{1 - o(x)}{6 + o(x)} \quad as \quad x \to 0$$

$x \to 0$ とすれば $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{6}$

次のはすべて成り立つ

$o(x^3) + o(x^3) = o(x^3) \quad as \quad x \to 0$

$o(x^4) + o(x^5) = o(x^4) \quad as \quad x \to 0$

$a \times o(x^3) = o(x^3) \qquad a$ は定数

$o(x^4) \times x^6 = o(x^{10})$

$(1 + o(x))^2 = 1 + o(x)$

$o(x^2) \times o(x^3) = o(x^5)$

剰余項の出現

c：中心

$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \dfrac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n +$ (剰余項)

剰余項を R_{n+1} とおく

剰余項 R_{n+1} を f で表す表現が欲しい

定理 3.3
$f(x)$ は $x=c$ を含む区間で $n+1$ 回微分可能とする
$\forall x \in (\alpha, \beta)$ と $\forall s$ に対し
$R_{n+1} = \dfrac{f^{n+1}\left(\theta x + (1-\theta)c\right)}{n!s}(1-\theta)^{n+1-s}(x-c)^{n+1} \leftarrow$ これ自体は覚えなくてよい

$s=n+1$ のときを Lagrange の剰余項という
$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \dfrac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$
(ξは x による)

$s=1$ のときを Cauchy の剰余項という

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}\left(\theta x + (1-\theta)c\right)}{n!}(1-\theta)^n(x-c)^{n+1}$$

例　以下では $0<\theta<1$

L (1)$e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dots + \dfrac{1}{n!}x^n + \dfrac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}$

L (2)$\sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \dfrac{1}{7!}x^7 + \dots + \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \dfrac{(-1)^n \cos\theta x}{(2n+3)!}x^{2n+3}$

L (3)$\cos x = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \dfrac{1}{6!}x^6 + \dots + \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \dfrac{(-1)^{n+1}\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$

C (4)$\log(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \dfrac{(-1)^n(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$

C (5) $\alpha \in \mathbf{R}$　$f(x) = (1+x)^\alpha$とすると
$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$だから

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

Taylor 展開
$f(x)$ は無限回微分可能
$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \dfrac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_{n+1}$
で $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$ であれば x を固定して級数として
$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \dfrac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots$ となる $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$　ただし $0! = 1$ とする これを Taylor 展開という

補題 3.4
$\forall x \in \mathbf{R}$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$

補題 3.4 より e^x の剰余項 $\dfrac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}$ は
$$\left|\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leqq e^{|x|}\frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \to 0 \qquad as \quad n\to\infty$$
θ は n と x によって変化するので θ は消去する
$$\left|\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leqq e^{|x|}\frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \to 0 \qquad as \quad n\to\infty$$
なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ が任意の自然数 x に対して成立

よって　$e^x = 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots \ (-\infty<x<\infty)$
同様に
$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots \quad (-\infty<x<\infty)$$
$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\ldots \ (-\infty<x<\infty)$$

$\log(1+x)$ では
$$R_{n+1}=\frac{(-1)^n(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$
$|x|<1 \Rightarrow 0<\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}<1$, $\left|\dfrac{1}{1+\theta x}\right|<\dfrac{1}{1-|x|} \leftarrow$ θ を消去
$$-1<x<1 \Rightarrow |R_{n+1}|=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot \frac{1}{|1+\theta x|}\cdot |x|^{n+1}<\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \quad \to 0 \quad as \quad n\to\infty$$
よって $|x|<1$ なら
$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\ldots$$
$x=1$ のときは Langrange の剰余項
$$R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$$
で $x=1$ とした式
$$R_{n+1}=\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}$$ を
$$|R_{n+1}|=\frac{1}{n+1}\to 0 \quad as \quad n\to\infty$$
と評価して成り立つ
以上により
$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\ldots \quad (-1<x\leqq 1)$$
$x=1$ とすると $\log 2 = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{n}+\ldots$

$|a_n| < 1$ である無限数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で
$\lim_{n\to\infty} a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 0$ とは限らない
例えば $a_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ では $|a_n| < 1$ だが
$a_1 a_2 a_3 \dots a_n = \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \dfrac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \dots \cdot \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \dfrac{n+2}{2n+2} \ \to \dfrac{1}{2} \quad as \quad n \to \infty$
$0 < b_1 < b_2 < b_3 < \dots \ \to$ 有限値となる b_n を用意し $a_n = \dfrac{b_n}{b_{n+1}}$ とするといい
上の例では $b_n = \dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

まとめ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \ (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \dots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \ \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \dots \ (-\infty < x < \infty)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \dots \quad (-1 < x \leqq 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n \dots \ (-1 < x < 1)$$

これらは成り立つ範囲も含めて覚える

4　多変数関数の極値

定義

$f:\ D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \qquad X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in D$ とする
A の近傍の任意の点 $X(\neq A)$ に対し
$f(x) < f(A)$ が成り立つとき
f は A で極大であると定義する A の近傍の任意の点 $X(\neq A)$ に対し

$f(x) > f(A)$ が成り立つときは
f で A は極小であると定義する

定理 4.1
D が開集合 $A \in D$ において f は偏微分可能のとき
f が A で極大（または極小）$\Rightarrow f_{x_i}(A) = 0 \ \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$

定理 4.1 の逆は成り立たない
例えば $f(x, y) = xy$ とすると
$f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$ となるが
f は原点 $(0, 0)$ で極大でも極小でもない

$y = x$ のとき $f(x, y) = x^2$
$y = -x$ のとき $f(x, y) = -x^2$
このような点を鞍点 (「あんてん」と読む saddle point) という

正確には

定義
$\exists P \in \mathbf{R}^n\ ; f(a + sP) > f(A) \quad (0 < |s| < \exists\delta)$
$\exists Q \in \mathbf{R}^n\ ; f(a + sQ) < f(A) \quad (0 < |s| < \exists\delta)$
のとき A は f のsaddle point であるという

極値であるための十分条件は何か？

仮定
f は $D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$
C^2級　$f_{x_i}(A) = 0 \ \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$

$X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ に固定し
$g(t) = f(A + tX) = f(a_1 + tx_1, a_2 + tx_2, a_3 + tx_3, \ldots, a_n + tx_n)$ を考える
１次のTaylor 展開 (Lagrange の剰余項) を適用すると
$g(t) = g(0) + g'(0)t + \dfrac{1}{2}g''(\theta t)t^2 \quad (0 < \theta < 1)$ である
$t = 1$ として

$g(1)=g(0)+g'(0)+\dfrac{1}{2}g''(\theta)$
合成関数の微分法により
$$g'(t)=f_{x_1}(a_1+tx_1,a_2+tx_2,\dots,a_n+tx_n)x_1+f_{x_2}(a_1+tx_1,a_2+tx_2,\dots,a_n+tx_n)x_2+\cdots+f_{x_n}(a_1+tx_1,a_2+tx_2,\dots,a_n+tx_n)x_n$$
$$=\sum_{i=1}^{n}f_{x_i}(a_1+tx_1,a_2+tx_2,\dots,a_n+tx_n)x_i$$
$\therefore g'(0)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f_{x_i}x_i=0$　　もう一回微分して
$$g''(t)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}f_{x_ix_j}(a_1+tx_1,a_2+tx_2,a_3+tx_3,\dots,a_n+tx_n)x_j\right)x_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_{x_ix_j}(a_1+tx_1,a_2+tx_2,a_3+tx_3,\dots,a_n+tx_n)x_ix_j$$
$g(1)=g(0)+g'(0)+\dfrac{1}{2}g''(\theta)$ より
$f(A+X)$
$$=f(A)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_{x_ix_j}(a_1+tx_1,a_2+tx_2,a_3+tx_3,\dots,a_n+tx_n)x_ix_j\quad(0<\theta<1)$$
$(a_1+tx_1,a_2+tx_2,a_3+tx_3,\dots,a_n+tx_n)=A+tX$ だから
$$f(A+X)=f(A)+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_{x_ix_j}(A)x_ix_j}_{\text{主要項}}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{f_{x_ix_j}(A+\theta X)-f_{x_ix_j}(A)\right\}x_ix_j$$
主要項は
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_{x_ix_j}(A)x_ix_j=\frac{1}{2}(x_1,x_2,\dots,x_n)\begin{pmatrix}f_{x_1x_1}(A)&f_{x_1x_2}(A)&\dots&f_{x_1x_n}(A)\\f_{x_2x_1}(A)&f_{x_2x_2}(A)&\dots&f_{x_2x_n}(A)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f_{x_nx_1}(A)&f_{x_nx_2}(A)&\dots&f_{x_nx_n}(A)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$
と書ける
f は C^2級より $f_{x_ix_j}=f_{x_jx_i}$であり、H は実対称行列
実対称行列とは行列の成分がすべて実数の行列で ${}^tH=H$
つまり正方行列で i 行 j 列と j 行 i 列の成分が等しいもの

　定義
実対称行列 H が
(1) ${}^tXHX>0\,(\forall X(\neq O)\in\mathbf{R}^n)$ であるとき
H は正定置行列(positive definite matrix) であるという
(2) ${}^tXHX<0\,(\forall X(\neq O)\in\mathbf{R}^n)$ であるとき
H は負定置行列(negative definite matrix) であるという
(3)$\exists P;\ {}^tPHP>0$，$\exists Q;\ {}^tQHQ<0$ であるとき
H は不定値行列(indefinite matrix) であるという
　　実対称行列をすべて分類したのではない

定理 4.2
f は $D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ で C^2級
$f_{x_i}(A) = 0 \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$
$H = \big(f_{x_i x_j}(A)\big) \leftarrow$ n 次対称行列
とおく
(1)H が正定置行列 $\Rightarrow$ f は A で極小（極大ではない）
(2)H が負定置行列 $\Rightarrow$ f は A で極大
(3)H が不定値行列 $\Rightarrow$ A は f の saddle point

$n = 2$ のとき

$$H = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$$

$${}^t XHX = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) が正定置行列 $\Leftrightarrow a > 0, ab - h^2 > 0 \ \leftarrow$ 必然的に $b > 0$
(2) が負定置行列 $\Leftrightarrow a < 0, ab - h^2 > 0 \ \leftarrow$ 必然的に $b < 0$
(3) が不定値行列 $\Leftrightarrow ab - h^2 < 0$

例題
$f(x, y) = x^3 - xy + y^2$の極値を調べよ
$f_x(x, y) = 3x^2 - y$, $f_y(x, y) = -x + 2y$

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (0, 0) \\ (x, y) = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right) \end{cases}$$

これより極値を取る点の候補は
$(x, y) = (0, 0), \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right)$
$f_{xx} = 6x, f_{xy} = -1, f_{yy} = 2$
$H = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
$(x, y) = (0, 0)$ では $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
$ab - h^2 = -1$　　$(0, 0)$ は f のsaddle point
$\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right)$ では $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
$ab - h^2 = 1$
f は $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right)$ で極小　極小値は $f\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right) = -\dfrac{1}{432}$