① $F_1(x)=\int_a^x f(x)dx$ $(x\in[a,b])$ とおく。（f は $[a,b]$ 上積分可能だから $[a,x]$ でも積分可能である）

h を、$a<x+h<b$ をみたすような 0でない実数とするとき、

$\frac{1}{h}\{F_1(x+h)-F_1(x)\}=\frac{1}{h}\left\{\int_a^{x+h}f(x)dx-\int_a^x f(x)dx\right\}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(x)dx$

f の連続性が仮定されてない おわた＼(^o^)／

というわけで、以下解析入門からのパクリ　解核

区間 $[a,b]$ の分割 Δ : $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ に対して、F は $I_j=[x_{j-1},x_j]$ で連続、$I_j^\circ=(x_{j-1},x_j)$ で微分可能だから、平均値の定理により $F(x_j)-F(x_{j-1})=F'(\eta_j)\cdot(x_j-x_{j-1})$ となる $\eta_j\in I_j^\circ$ が存在する。$F'(\eta_j)=f(\eta_j)$

リーマン和 $R(f;\Delta;\eta)=\sum_{j=1}^{n}f(\eta_j)(x_j-x_{j-1})$ を考えると、上の式より $R(f;\Delta;\eta)=\sum_{j=1}^{n}\{F(x_j)-F(x_{j-1})\}=F(b)-F(a)$

これは Δ に依存しないので、$|\Delta|\to 0$ とするとき f の可積分性により $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

② (1) $0<\varepsilon<1$ に対し、$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x}{(1-x)^\alpha}dx=\int_0^{1-\varepsilon}\left\{\frac{1}{(1-x)^\alpha}-\frac{1}{(1-x)^{\alpha-1}}\right\}dx\cdots♪$

(i) $\alpha=1$ のとき、♪ $=\int_0^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{1-x}-1\right)dx=\left[-\log(1-x)-x\right]_0^{1-\varepsilon}=-\log\varepsilon-1+\varepsilon$

$\varepsilon\to+0$ のとき $\log\varepsilon\to-\infty$, $\varepsilon\to+0$ だから、♪は収束しない

(ii) $\alpha=2$ のとき、♪ $=\int_0^{1-\varepsilon}\left\{\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}\right\}dx=\left[\frac{1}{1-x}+\log(1-x)\right]_0^{1-\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}+\log\varepsilon-1$.

$\frac{1}{\varepsilon}+\log\varepsilon=\frac{1+\varepsilon\log\varepsilon}{\varepsilon}$ であり、$\varepsilon\to+0$ のとき $\varepsilon\log\varepsilon\to-0$ だから、$\frac{1}{\varepsilon}+\log\varepsilon\to+\infty$ よって♪は収束しない

(iii) $\alpha\neq1,2$ のとき、♪ $=\left[\frac{1}{(\alpha-1)(1-x)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(\alpha-2)(1-x)^{\alpha-2}}\right]_0^{1-\varepsilon}=\frac{1}{(\alpha-1)\varepsilon^{\alpha-1}}-\frac{1}{(\alpha-2)\varepsilon^{\alpha-2}}-\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha-2}$

$\frac{1}{(\alpha-1)\varepsilon^{\alpha-1}}-\frac{1}{(\alpha-2)\varepsilon^{\alpha-2}}=\frac{(\alpha-2)-(\alpha-1)\varepsilon}{(\alpha-1)(\alpha-2)\varepsilon^{\alpha-1}}$ において、$\varepsilon\to+0$ のとき（分子）$\to\alpha-2$ であり、

$0<\alpha<1$ のとき（分母）$\to+\infty$、$1<\alpha<2$, $\alpha>2$ のとき（分母）$\to 0$ であるから、

♪が収束 $\Leftrightarrow$ $0<\alpha<1$.

以上により、$0<\alpha<1$ のとき収束、$\alpha\geq1$ のとき発散

(2) $\left[\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+2}\right.$ とすると、$x+1$ をかけて $x\to-1$ とすれば $a=-1$　$\left.\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+2)}+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+2x+1}{\ }=\frac{x+1}{x^2+2}\right]$

$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+2)}=-\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+2}$ なので、$R>0$ に対して

$\int_0^R\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+2)}dx=\left[-\log(x+1)+\frac{1}{2}\log(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^R$

$=\log\frac{\sqrt{R^2+2}}{R+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\frac{R}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\log 2$

$R\to+\infty$ のとき $\frac{\sqrt{R^2+2}}{R+1}\to1$, $\mathrm{Arctan}\frac{R}{\sqrt{2}}\to\frac{\pi}{2}$ だから、$\int_0^{+\infty}\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+2)}dx$ は収束し、$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\log 2$.

③ (1) $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{2-\cos x}{2-\sin x}dx$ において $t=x-2\pi$ という変換をすると、$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{2-\cos x}{2-\sin x}dx=\int_{-\pi}^{0}\frac{2-\cos t}{2-\sin t}dt$ となる。

$\therefore \int_0^{2\pi}\frac{2-\cos x}{2-\sin x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2-\cos x}{2-\sin x}dx$　　$I=(-\pi,\pi)$とし、$J=(-\infty,\infty)$とする。

$\varphi: J\to I$ を $\varphi(t)=2\mathrm{Arctan}\,t$ で定めると、全単射。この変数変換により、J上で

$$\frac{2-\cos x}{2-\sin x}\Big|_{x=\varphi(t)}\cdot\varphi'(t)=\frac{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2-\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}=\frac{1+3t^2}{(1-t+t^2)(1+t^2)}=\frac{1+2t}{1-t+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}$$

$$=\frac{-1+2t}{1-t+t^2}+\frac{2}{(t-\frac12)^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2}-\frac{2t}{1+t^2}=\frac{d}{dt}\left\{\log(1-t+t^2)+2\cdot\frac{2}{\sqrt3}\mathrm{Arctan}\frac{2}{\sqrt3}(t-\frac12)-\log(1+t^2)\right\}$$

$\therefore$ I上で $\int\frac{2-\cos x}{2-\sin x}dx=\left\{\log(1-\tan\frac x2+\tan^2\frac x2)+\frac{4}{\sqrt3}\mathrm{Arctan}(\frac{2}{\sqrt3}\tan\frac x2-\frac{1}{\sqrt3})-\log(1+\tan^2\frac x2)\right\}+C$ …(#)

ただしCは積分定数

(#)$=\log\left(1-\frac{\tan\frac x2}{1+\tan^2\frac x2}\right)+\frac{4}{\sqrt3}\mathrm{Arctan}(\frac{2}{\sqrt3}\tan\frac x2-\frac{1}{\sqrt3})+C$ なので、$x\to-\pi+0$のとき (#)$\to\frac{4}{\sqrt3}\cdot(-\frac{\pi}{2})$,

$x\to\pi-0$のとき (#)$\to\frac{4}{\sqrt3}\cdot(\frac{\pi}{2})$　$\therefore \int_0^{2\pi}\frac{2-\cos x}{2-\sin x}dx=\frac{4}{\sqrt3}\pi$　　これ1問に30分使うとか…

(2) $\int_D\frac{x}{(2+x+y)^2}dxdy=\int_0^1dx\int_0^{1-x}\frac{x}{(2+x+y)^2}dy=\int_0^1\left[\frac{-x}{2+x+y}\right]_0^{1-x}dx$

$=\int_0^1(-\frac x3+\frac{x}{2+x})dx=\int_0^1(-\frac x3+1-\frac{2}{2+x})dx=\left[-\frac{x^2}{6}+x-2\log(2+x)\right]_0^1=\frac56+2\log\frac23$

(3) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ の変換を行う。$D^*=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\mid 0\le r\le1,\ 0\le\theta\le2\pi\}$とし、

$\varphi:D^*\to D$ を $\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で定めると、φは $\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\mid 0<r\le1,\ 0\le\theta<2\pi\}=D^{*\prime}$ において

単射、かつ $\mu(D-\varphi(D^{*\prime}))=0$ なので　　← たしかこんな感じだったような…

$$\int_D x^2e^{x^2+y^2}dxdy=\int_{D^*}r^2\cos^2\theta\cdot e^{r^2}\cdot r\,drd\theta=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta\int_0^1r^3e^{r^2}dr$$

$$=\left[\frac\theta2+\frac14\sin2\theta\right]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac12r^2e^{r^2}-\frac12e^{r^2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

(4) $\int_E x(x+y+z)dxdydz=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}x(x+y+z)dz$

$=\int_0^1dx\int_0^{1-x}\left[(x^2+xy)z+\frac x2z^2\right]_0^{1-x-y}dy=\int_0^1dx\int_0^{1-x}\left\{(x^2+xy)(1-x-y)+\frac x2(1-x-y)^2\right\}dy$

$=\int_0^1dx\int_0^{1-x}\left\{x^2(1-x)+(x-2x^2)y-xy^2+\frac x2(1-x-y)^2\right\}dy=\int_0^1\left\{x^2(1-x)^2+\frac{x-2x^2}{2}(1-x)^2-\frac x3(1-x)^3+\frac x6(1-x)^3\right\}dx$

$=\int_0^1\left\{\frac x2(1-x)^2-\frac x6(1-x)^3\right\}dx=\frac16\int_0^1\{(3x-6x^2+3x^3)-(x-3x^2+3x^3-x^4)\}dx=\frac16\int_0^1(2x-3x^2+x^4)dx$

$=\frac16(1-1+\frac15)=\frac{1}{30}$

コメント：積分はどこまで説明すればいいのかわかりません。(2)(4)でいきなり累次積分をしていますがいいんでしょうか。説明しろと言われてもできませんが。

ちなみに私の所要時間は60分でした。軽くover.