片岡俊孝先生　2009年度　※数学I なのでおそらく理2・3

① (1) $[a,b]$ の分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ に対して, $S(f;\Delta)=\sum_{j=1}^{n}\sup f([x_{j-1},x_j])\cdot(x_j-x_{j-1})$,
$s(f;\Delta)=\sum_{j=1}^{n}\inf f([x_{j-1},x_j])\cdot(x_j-x_{j-1})$ と定める。そして $[a,b]$ の分割すべてに対する
$S(f;\Delta)$ の下限を $\overline{\int_a^b} f$　$s(f;\Delta)$ の上限を $\underline{\int_a^b} f$ とする。このとき Darbouxの定理とは,
$|\Delta|\to 0$ ならば $S(f;\Delta)\to\overline{\int_a^b} f$, $s(f;\Delta)\to\underline{\int_a^b} f$ となるという定理である。詳しく言えば:
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: |\Delta|<\delta \Rightarrow |S(f;\Delta)-S(f)|<\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: |\Delta|<\delta \Rightarrow |s(f;\Delta)-s(f)|<\varepsilon$

(2) f,g は $[a,b]$ で有界なので $f+g$ も $[a,b]$ で有界　∴ $\sup f(J)$, $\sup g(J)$, $\sup(f+g)(J)$ が存在する
$\forall x\in J$ に対して, $f(x)\le\sup f(J)$, $g(x)\le\sup g(J)$ だから, $(f+g)(x)\le\sup f(J)+\sup g(J)$
$x\in J$ は任意なので, $\sup(f+g)(J)\le\sup f(J)+\sup g(J)$

(3) $\overline{\int_a^b}(f+g)=\inf_{\Delta} S(f+g;\Delta)$ ただし Δ は $[a,b]$ の分割すべてをわたる　$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ に対し
$S(f+g;\Delta)=\sum_{j=1}^{n}\sup(f+g)([x_{j-1},x_j])\cdot(x_j-x_{j-1})\le\sum_{j=1}^{n}\sup f([x_{j-1},x_j])\cdot(x_j-x_{j-1})+\sum_{j=1}^{n}\sup g([x_{j-1},x_j])\cdot(x_j-x_{j-1})$
$=S(f;\Delta)+S(g;\Delta)$
Darbouxの定理より, $|\Delta|\to 0$ とすることで, $\overline{\int_a^b}(f+g)\le\overline{\int_a^b} f+\overline{\int_a^b} g$ となる

② (1) (i) n が奇数のとき, $\int_\pi^{2\pi}(\sin x)^n dx=\int_0^\pi\{\sin(x+\pi)\}^n dx=-\int_0^\pi(\sin x)^n dx$ であるから,
$\int_0^{2\pi}(\sin x)^n dx=0$.　ただし, 最初の等号では $x\to x+\pi$ の変数変換を行った

(ii) n が偶数のとき, $I_n=\int_0^{2\pi}(\sin x)^n dx$ とおく. $n\ge 0$ に対して
$I_{n+2}=\int_0^{2\pi}(\sin x)^{n+1}\cdot(-\cos x)'dx=\left[(\sin x)^{n+1}(-\cos x)\right]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}(n+1)(\sin x)^n\cdot(\cos x)^2dx$
$=(n+1)\int_0^{2\pi}(\sin x)^n(1-\sin^2x)dx=(n+1)(I_n-I_{n+2})$　∴ $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$
$I_0=\int_0^{2\pi}dx=2\pi$ だから, $n\ge 0$ に対して $I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot 2\pi$ となる.

(2) $\int_\pi^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=\int_{-\pi}^{0}\frac{dt}{2+\cos(t+2\pi)}=\int_{-\pi}^{0}\frac{dt}{2+\cos t}$ なので, $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$.
$x=2\mathrm{Arctan}\,t$ の変数変換をする. $J=(-\infty,\infty)$, $I=(-\pi,\pi)$ に対して $\varphi: J\to I$ を $\varphi(t)=2\mathrm{Arctan}\,t$ とすると
φ は全単射. $t\in J$ に対して
$$\left.\frac{1}{2+\cos x}\right|_{x=\varphi(t)}\cdot\varphi'(t)=\frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}=\frac{1}{1+t+t^2}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{2}{\sqrt3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt3}t+\frac{1}{\sqrt3}\right)\right\}.$$
∴ I において $\int\frac{dx}{2+\cos x}=\frac{2}{\sqrt3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt3}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt3}\right)+C$ ($=F(x)+C$ とおく)
$x\to-\pi+0$ のとき $F(x)\to\frac{2}{\sqrt3}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $x\to\pi-0$ のとき $F(x)\to\frac{2}{\sqrt3}\cdot\frac{\pi}{2}$ なので, $F(-\pi)=-\frac{\pi}{\sqrt3}$, $F(\pi)=\frac{\pi}{\sqrt3}$ とすると F は $[-\pi,\pi]$ で連続　∴ F は $[-\pi,\pi]$ で $F'(x)=\frac{1}{2+\cos x}$ となるから,
$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=\frac{2}{\sqrt3}\pi.$$

③ (1) f_p は $[\frac{3}{4}, 1]$ で連続だから、$\int_0^1 f_p$ が収束 $\Leftrightarrow$ $\int_0^{\frac{3}{4}} f_p$ が収束

$0<x<\frac{3}{4}$ において、$\frac{1}{2} < \sqrt{1-x} < 1$ であるから、$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^p} < f_p(x) < \frac{1}{x^p}$ よって $\int_0^1 f_p$ が収束 $\Leftrightarrow$ $\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{dx}{x^p}$ が収束

[なぜなら：広義積分 $\int_a^b g_1(x)\,dx$, $\int_a^b g_2(x)\,dx$ が収束し、$a<x<b$ において $g_1(x)<f(x)<g_2(x)$ ならば $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する。この定理において $g_1(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^p}$, $g_2(x)=\frac{1}{x^p}$ とすることで、$\int_0^{\frac{3}{4}} g_1$, $\int_0^{\frac{3}{4}} g_2$ が収束するなら $\int_0^{\frac{3}{4}} f_p$ は収束する。$\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{2} g_2$ の収束・発散は $\int_0^{\frac{3}{4}} g_2$ と一致するから、$\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{dx}{x^p}$ が収束 $\Rightarrow$ $\int_0^{\frac{3}{4}} f_p$ が収束。逆は、$f_p(x) < \frac{1}{x^p} < 2\cdot f_p(x)$ によって同様にわかる]

$p=1$ のとき、$0<\varepsilon<\frac{3}{4}$ に対し $\int_\varepsilon^{\frac{3}{4}}\frac{dx}{x} = \log\frac{3}{4\varepsilon}$ となり、$\varepsilon\to+0$ のときこれは収束しない

$p\neq1$ のとき $0<\varepsilon<\frac{3}{4}$ に対し $\int_\varepsilon^{\frac{3}{4}}\frac{dx}{x^p} = \left[\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\right]_\varepsilon^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{1-p}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{-p+1} - \varepsilon^{-p+1}\right\}$

∴ これが $\varepsilon\to+0$ のとき収束 $\Leftrightarrow$ $0<-p+1$ $\Leftrightarrow$ $p<1$

よって $\int_0^1 f_p(x)\,dx$ は、$p<1$ で収束し、$p\geq1$ で発散する

(2) $p=\frac{1}{2}$ のとき、$\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$ において $t=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ の変数変換をする $t\geq0$, $x=\frac{1}{t^2+1}$ なので、

$\frac{1}{t^2+1}\in[0,1]$ より $t\geq0$ ∴ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx = \int_{+\infty}^0 t\cdot\frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$

$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1} = [\mathrm{Arctan}\,t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. また $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1} = \left[\frac{t}{t^2+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$ だから、

$\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx = \frac{\pi}{2}$

④ (1) $f(x) = \frac{x+1}{x^2} - \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{x+1}{x^2+1}$ なので、$F(x) = \log x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \mathrm{Arctan}\,x + C$

(2) $R>1$ に対して $\int_1^R f(x)\,dx = F(R)-F(1) = \log\frac{R}{\sqrt{R^2+1}} - \frac{1}{R} - \mathrm{Arctan}\,R + 1 + \frac{1}{2}\log 2 + \mathrm{Arctan}\,1$ なので、

$R\to+\infty$ とするとき $\int_1^R f(x)\,dx \to -\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} = 1+\frac{1}{2}\log 2-\frac{\pi}{4}$ となる。