東京大学教養学部教養学科

数学IIシケプリ

２学期　飯田教員

150092A　理科２類１年７組　野口　勇大

From2011年
10月

目次

P1…目次

P2…はじめに

P3…試験対策プリント

6章　ベクトル空間と線形写像…p3

ベクトル空間、部分空間、基底、次元、直和
補空間、線形写像、同型、Im、Ker、全単射
表現行列、基底の変換行列、計量ベクトル空間
正規直交基底、グラムシュミットの直交化法

7章　固有値と固有ベクトル…p23

固有値、固有空間、固有ベクトル、対角化可能性
随伴行列、正規行列、ユニタリ行列
直交行列、エルミート行列、線形変換

8章　幾何学的応用…p31

対称行列、符号、２次超曲面
アフィン変換、標準形、平方完成

P34…終わりに

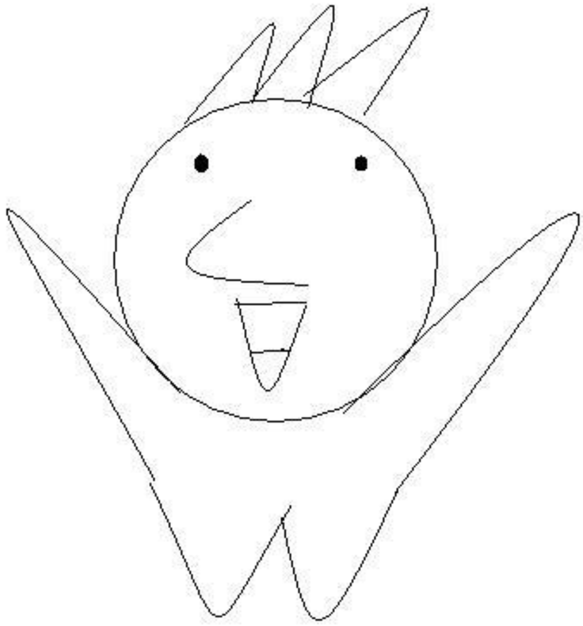
はじめに

どうもどうも御無沙汰してます野口です。あれ、知らないですか・・・まあそうでしょうね笑　じゃあ、今覚えてください＾＾薬学部志望の２年生です＾＾

このシケプリはなんでしょうか、と思う人もいるとは思うので念のため。１年の冬学期、数学Ⅱ飯田先生クラスのシケプリです。飯田先生は東大で教えるのが 2011 年から、自分の時からなんですね。なので、過去問も少ないです。彼はきさくな先生なので、是非気軽に絡んでみてください＾＾ツイッター―もやっています。

・・・別に書くこともないんで、ちゃちゃっと行きましょうか＾＾ちなみに、１年生の時に書いたものを徐々に改定して今にいたる状態です。なので、口調とか時々色々混ざったりしてますが、大目に見てやってください＾＾

では、数学Ⅱの世界へ、行きましょう。



のぶおくんです、
仲良くしてあげてね笑
鼻がでかいのが特徴。
モデルは高校の友人ｗ

第６章　ベクトル空間

内容に入る前に。証明は教科書に任せているので、教科書と並行してやってください。
参照場所は随時明記するのでそれをもとにしてください。
黄色…必ず参照してほしい部分。
水色…分からなければ見てほしいところ
としてあります。

まずは２学期の勉強内容の基盤ともいえるかもしれないベクトル空間から入っていきます。

★定義（ベクトル空間）教科書 P134,135 定義 6.1
「和」と「スカラー倍」と「ゼロ元」が定義された時に、
(1)和の結合則
(2)和の交換則
(3)ゼロ元の存在
(4)逆元の存在
(5)(6)(7)分配法則
(8)単位元の存在
が成り立つ時に、ベクトル空間といいます。数式による難しい表記は教科書で。

「和」とか「スカラー倍」とか言うと、多分１＋１＝２とか、$2\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$とかを思いがちだと思うけど、別に一般的な話だけじゃなくって、勝手に定義してしまえばＯＫ。P138 例題 6.1 がその例。自分で演算を決めて、それをただ「和」とか「スカラー倍」で呼んでいるだけなので、勘違いしないこと。勿論、一般的な和、スカラー倍の時もあるよ。

★定義（部分空間）
W を空でない V の部分集合とすると、
(1)$\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in \mathrm{W}\rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y}\in \mathrm{W}$
(2)$\forall\lambda\in \mathrm{K},\forall\mathbf{x}\in \mathrm{W}\rightarrow\lambda\mathbf{x}\in \mathrm{W}$
が成り立つ時に、W は部分空間であるという。
つまり、「和」と「スカラー倍」が部分集合内で完結してるということ。

定数 a,b,c、ax+by+cz=0 を満たす組を(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2)とすると、$(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$も、$(cx_1,cy_1,cz_1)$も解になっていることがわかるね。この時、和についても、スカラー倍についても閉じている、部分空間となる。

★線形結合

数ベクトル空間K^nの元$\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_r}$について、

$$c_1\mathbf{x_1}+\cdots+c_t\mathbf{x_r}$$

の形をした元を$\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_r}$の線形結合ないしは１次結合という。$\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_r}$の線形結合の元を全て考えた集合を、

$$<\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_r}>=\{c_1\mathbf{x_1}+\cdots+c_t\mathbf{x_r}|c_1,\cdots,c_r\in K\}$$

と表現する。$<\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_r}>$という表現の仕方はたびたび出てくるので、分かるようにしておこう。

★定義（有限生成）

ある有限個のベクトル$\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_r}$が存在し、V=<$\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_r}$>と書ける時、ベクトル空間 V は有限生成であるという。

$K[x]_n$={f(x)∈ $K[x]$|f は n 次以下}は、記号として大事なので覚えておこう。添え字、n、がない時$K[x]$は次数が定まっていないことをいう。ちなみに、$K[x]_n$は n 次の x の整関数と考えてください。

そして、$K[x]_n$が有限生成で、$K[x]$が有限生成でないのはすぐ分かると思う。前者は n 次までのベクトルを取ればいいのに対し、後者は無限に必要であるのだから。証明もできるひとは考えてみよう。

☆定理 6.1

$$\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_r}\in V \text{ が線形独立のとき、} \mathbf{x}\in V \text{ に対して、}$$

$$\mathbf{x}\notin<\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_r}>_K \Leftrightarrow \mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_r},\mathbf{x}\text{が線形独立}$$

教科書が(⇒)しか言っていないのが気になったので書きます。

言ってることは当たり前のこと。r 個のベクトルで表わせないベクトルは、r+1 個で線形独立になりますよってこと。表現できないものがあれば、それを含めた全体が線形独立になるのは単純な話のはず。

★定義 6.3(基底)

ベクトル空間 V のベクトル$\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_r}$について、

(1)V=<$\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_r}$>

(2)$\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_r}$が線形独立である

この２つを満たす時、V の基底であるという。

日本語で言えば、任意のベクトルが$\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_r}$の線形結合で一意的に表現できるということ。そのとき、それらのベクトルが基底となっていると表現するだけ。

☆定理 6.2

{**0**}でない有限生成なベクトル空間には常に基底が存在する。

証明

有限生成なベクトル空間なので、V=<$\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_r}$>と表現できる。

ここで、s=max|{$\mathbf{x_{i_1}},\cdots,\mathbf{x_{i_k}}$|1≤ $i_1 < \cdots < i_k$ ≤r∧ $\mathbf{x_{i_1}},\cdots,\mathbf{x_{i_k}}$は線形独立}|とする。

s=r のとき、$i_1 = 1,\cdots,i_s = i_r = r$より、$\mathbf{x_{i_1}},\cdots,\mathbf{x_{i_s}}$は基底となる。

s<r のとき、j≠ $i_1,\cdots,i_s$となる j(1 ≤ j ≤r)が存在するが、最大性に注意すると、$\mathbf{x_{i_1}},\cdots,\mathbf{x_{i_s}},\mathbf{x_j}$は線形従属となる。よって、定理 6.1 から任意のベクトルが$\mathbf{x_{i_1}},\cdots,\mathbf{x_{i_s}}$の線形結合で表わされる。よって、$\mathbf{x_{i_1}},\cdots,\mathbf{x_{i_s}}$が基底となる。

最大性と言うのは、s 個の線形独立なベクトルがあったとして、そこに別のベクトルを加えて s+1 個とすると、それが線形従属になるということ。また、上限が s ということから最大性と呼んでいるのかと思われ。よくわからない人は P4 例題 1.1 などを参照。

☆系 6.3

(定理 6.2 の証明で理解したことをまとめたもの。)

ベクトル空間が r 個のベクトルで有限生成になっており、その r 個のベクトルのうち、s 個のベクトルが線形独立であるとき、その s 個のベクトルが基底となっているということ。詳しくは、P141 を参照。

例K^nにおける基本ベクトル$\mathbf{e_1},\cdots,\mathbf{e_n}$は$K^n$の基底となることを示せ。問題 6.5

基本ベクトル$\mathbf{e_1},\cdots,\mathbf{e_n}$は、n 列ベクトルのこと。

有限生成について、

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$= x_1\mathbf{e_1} + \cdots + x_n\mathbf{e_n}$$

と表現でき、有限生成といえる。

また、

$$c_1\mathbf{e_1} + \cdots + c_n\mathbf{e_n} = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0$$

となり、線形独立が言える。

これらより、基底であることが言えた。

ちなみに、基本ベクトル$\mathbf{e_1},\cdots,\mathbf{e_n}$のことを標準基底といいます。

☆定理 6.4

ベクトル空間 V の基底$\mathbf{v_1},\cdots,\mathbf{v_n}$と V のベクトル$\mathbf{w_1},\cdots,\mathbf{w_n}$が与えられているとする。このとき、

$$\begin{cases} \mathbf{w_1} = a_{11}\mathbf{v_1} + \cdots + a_{n1}\mathbf{v_n} \\ \vdots \\ \mathbf{w_n} = a_{1n}\mathbf{x_1} + \cdots + a_{nn}\mathbf{x_r} \end{cases}$$

と書き表わし、A=$(a_{ij}) \in M(n,K)$とおく。このとき、

(1) $\mathbf{w_1},\cdots,\mathbf{w_n}$は V の基底である。

(2) $\mathbf{w_1},\cdots,\mathbf{w_n}$は線形独立である。

(3)A は正則である。

この 3 条件は同値である。

証明 P144

(1)→(2)は省略。(2)→(3)について、

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

とすると、

$$c_1\mathbf{w_1} + \cdots + c_n\mathbf{w_n} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{v_1},\cdots,\mathbf{v_n})\mathbf{A}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\mathbf{v_1},\cdots,\mathbf{v_n})\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow d_1\mathbf{v_1} + \cdots + d_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3)→(1)については、教科書がわかりずらいので、先生の証明を取り上げます。

$$V = < \mathbf{v_1},\cdots,\mathbf{v_n} >$$

(3)より、

$$(\mathbf{v_1},\cdots,\mathbf{v_n}) = (\mathbf{w_1},\cdots,\mathbf{w_n})\mathbf{A}^{-1}$$

$\mathbf{v_j}$を$\mathbf{w_1},\cdots,\mathbf{w_n}$の線形結合で表現できるということは、$\mathbf{v_1},\cdots,\mathbf{v_n}$の線形結合もそれで表現できるということ。

$$V = < \mathbf{v_1},\cdots,\mathbf{v_n} > \subset < \mathbf{w_1},\cdots,\mathbf{w_n} >$$

また、$< \mathbf{w_1},\cdots,\mathbf{w_n} > \subset V$であることに注意すると、

$$< \mathbf{w_1},\cdots,\mathbf{w_n} > = V$$

$$c_1\mathbf{w_1} + \cdots + c_n\mathbf{w_n} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{v_1},\cdots,\mathbf{v_n})\mathbf{A}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

A の逆行列を両辺左からかければ、

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、線形独立であることが言えた。有限生成については簡単にいえると思います。

ここで、新しい概念、次元の登場ですっ

★定義（次元）

ベクトル空間 V について、

$$\mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_n} \quad \mathbf{y_1}, \cdots, \mathbf{y_m}$$

という、2 つの基底があるとする。

n<m とするとき、$\mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_n} \quad \mathbf{y_1}, \cdots, \mathbf{y_n}$は基底となり、$\mathbf{y_{n+1}} \in < \mathbf{y_1}, \cdots, \mathbf{y_n} >$となってしまうが、これは矛盾している。逆もしかりなので、n=m となる。

この証明から、有限生成なベクトル空間の基底をなすベクトルの個数は一意的であることが分かり(定理 6.5)、この時、その個数を次元と言い、

$$\mathrm{dimV} = \mathrm{n}$$

と表現します。

ここで、V={**0**}の時は、dimV=0 であることに注意。**0** という空間を含んでいるので、空集合ではないんですね。

また、２つの基底の橋渡しとなる行列 A を「基底の変換行列」といいます。

$$(\mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_n}) = (\mathbf{y_1}, \cdots, \mathbf{y_n})\mathbf{A}$$

補足 V=<$\mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_n}$>,A=($\mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_n}$)とすれば、dimV=rankA になることが分かると思います。前者は基底をなすベクトルの個数だからつまり、線形独立なベクトルの個数を考えていることになるし、後者は、行列の列ベクトルの線形独立なものの個数だから、言わんとしていることは同じなんです。

とすると、定理 6.6 定理 6.7 はすぐにわかると思います。

☆定理 6.6

次元が n のベクトル空間での基底の変換行列は正則行列

$(\because \mathrm{n} = \mathrm{rank}(\mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_n}) = \mathrm{rank}(\mathbf{y_1}, \cdots, \mathbf{y_n})\mathbf{A} \leq \mathbf{A} \leq \mathrm{n})$

☆定理 6.7

次元はベクトル空間の線形独立なベクトルの個数に等しい

(∵系 6.3)

階数 rank という言葉を久々に聞いたなあ…なんだっけ汗　と言う人は、教科書 P50~54 を参照。時々登場するので、覚えておくと楽です。

☆系 6.8

ベクトル空間 V の部分空間 W について

$$\mathrm{dimW} \leq \mathrm{dimV}$$

感覚的に理解できると思います。

V=<$\mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_r}$>として、その部分空間 W=<$\mathbf{x_{j_1}}, \cdots, \mathbf{x_{j_s}}$> (r≥s)を考えた時、それぞれの線形独立なベクトルの個数は、確実に V の方が大きくなる。(W の元でない V の元を付与する余地があるとかいうらしい)

では、次元の減ってしまった部分空間をベクトル空間に戻すことを考えてみる。次の定理。

☆定理 6.9

n 次元のベクトル空間 V の r 次元部分空間 W の基底を

$$\mathbf{w_1}, \cdots, \mathbf{w_r}$$

とするとき、(n-r)個の V のベクトルを付加することで V の基底を得ることができる。

例

$$\mathrm{V} = \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4} \rangle$$

とし、

$$\mathrm{W} = \langle \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \rangle$$

とすると、とりま、部分空間になってると。

ここに、これらと線形独立となるベクトル$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$を加えると、

$$\langle \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$$

これは、ベクトル空間をちゃんと表現した基底となっていることが分かると思う。線形結合(有限生成)かつ線形独立になっているよね。基底が一意に定まらないのも分かるでしょう。次元が変わらないのは言わずもがな。

じゃあ、問題演習を少し。

例題問題 6.8(1)

$$\mathrm{W} = \langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \rangle \text{のとき、} \mathrm{dimW} = ?$$

階数標準形に変形していって、

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -2 & 0\\0 & 1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

より、dimW=3

突然何をしだしたんだこいつついに頭おかしくなったか、とか思った人、dimW=rankA を思い出してください。基底と見ないで列ベクトルとみて、行列形にしてしまえば、後は階数を求めるだけ。一番シンプルで良いと思いますが、どうでしょう。
線形独立のときみたいに、$\mathrm{a}\mathbf{x_1}+\mathrm{b}\mathbf{x_2}+\mathrm{c}\mathbf{x_3}=\mathbf{0}$としてやれば、dimW=3 の時は容易に出来ますが、2 以下の時にそのあとの処理が面倒になりそうな気がします。

さて、新しい分野と行きましょう。
★定義（和と直和）
V: 有限次元ベクトル空間　$\mathrm{W_j}$: V の部分空間$(\mathrm{j}=1,\cdots,\mathrm{r})$

$$\mathrm{W}=\mathrm{W_1}+\mathrm{W_2}+\cdots+\mathrm{W_r}=\{\mathbf{w_1}+\cdots+\mathbf{w_r}|\mathbf{w_j}\in\mathrm{W_j}(\mathrm{j}=1,\cdots,\mathrm{r})\}$$

と定義し、$\mathrm{W_1},\cdots,\mathrm{W_r}$の和という。
$\mathrm{W}=\mathrm{W_1}+\mathrm{W_2}+\cdots+\mathrm{W_r}$は V の部分空間であり、$\mathbf{w}=\mathbf{w_1}+\cdots+\mathbf{w_r}$となる$\mathbf{w_1},\cdots,\mathbf{w_r}$の選び方が一意になるとき、$\mathrm{W_1},\cdots,\mathrm{W_r}$の直和といい、

$$\mathrm{W_1}\oplus\cdots\oplus\mathrm{W_r}$$

と表現する。
直和の時、$\mathbf{w_j}\in\mathrm{W_j}(\mathrm{j}=1,\cdots,\mathrm{r})$に対して、

$$\mathbf{w_1}+\cdots+\mathbf{w_r}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{w_1}=\cdots=\mathbf{w_r}=\mathbf{0}$$

なんか、抽象的でよくわかんないので具体例をあげます。
例$\mathbf{R^3}\supset\mathrm{W_1},\mathrm{W_2},\mathrm{W_3}$とする。（$\mathrm{W_1}=<\mathbf{e_1}>,\mathrm{W_2}=<\mathbf{e_2}>,\mathrm{W_3}=<\mathbf{e_3}>$）

$\mathbf{R^3}=\mathrm{W_1}\oplus\mathrm{W_2}\oplus\mathrm{W_3}$を示す。

$$\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\\mathrm{y}\\\mathrm{z}\end{pmatrix}=\mathrm{x}\mathbf{e_1}+\mathrm{y}\mathbf{e_2}+\mathrm{z}\mathbf{e_3}$$

なので、

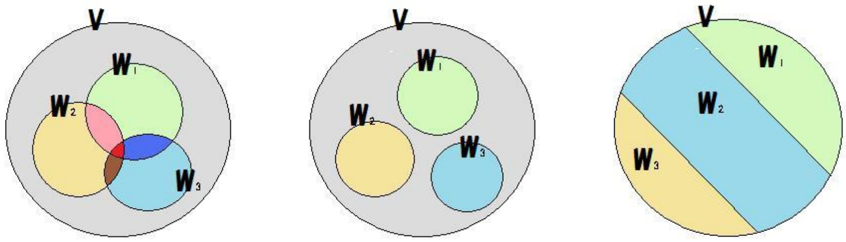
$$\mathbf{R^3}=\mathrm{W_1}+\mathrm{W_2}+\mathrm{W_3}$$

ここではまず、３次元空間が和であることを示しているわけだ。次に直和を示す。
$\mathbf{w_j}\in\mathrm{W_j}(\mathrm{j}=1,2,3)$として、

$$\mathbf{w_1}+\mathbf{w_2}+\mathbf{w_3}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathrm{x}\mathbf{e_1}+\mathrm{y}\mathbf{e_2}+\mathrm{z}\mathbf{e_3}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathrm{x}=\mathrm{y}=\mathrm{z}=0$$
$$\Leftrightarrow\mathrm{x}\mathbf{e_1}=\mathrm{y}\mathbf{e_2}=\mathrm{z}\mathbf{e_3}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{w_1}=\mathbf{w_2}=\mathbf{w_3}=\mathbf{0}$$

これで、直和$\mathbf{R^3}=\mathrm{W_1}\oplus\mathrm{W_2}\oplus\mathrm{W_3}$を言うことができた。

分かりやすく図にしてみるとこんな感じ。



灰色以外の部分をV の部分空間の和 $W = W_1 + W_2 + W_3$とするとき、左図は、重複があるので、$\mathbf{w} = \mathbf{w_1} + \cdots + \mathbf{w_3}$となる $\mathbf{w_1}, \cdots, \mathbf{w_3}$ の選び方が一意にならないが、中図では独立しているので、一意に選ぶことができる。
上の例の$W_1 =< \mathbf{e_1} >, W_2 =< \mathbf{e_2} >, W_3 =< \mathbf{e_3} >$では、中図（右図でもあるけど）のようになっていることから、直和になっていることがわかっていただけただろうか？
中図で灰色がなければ（つまり右図）、部分空間の直和がベクトル空間そのものを示していることも理解できるでしょう。

祝日で２週間空いてしまいました！！久々にシケプリをつくっているので勝手を忘れ気味ですが頑張ります笑

☆定理 6.10（部分空間の直和条件）
(1)　$W = W_1 \oplus W_2$
(2)　$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$
この 2 つは同値である。

$\boxed{\text{証明}}$
(1)→(2)　$\mathbf{w} \in W_1 \cap W_2$とするとき、

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\in W_1) + \mathbf{0}(\in W_2) = \mathbf{0}(\in W_1) + \mathbf{w}(\in W_2) \in W_1 + W_2$$

両者は一致する必要があるので、$\mathbf{w} = \mathbf{0}$となる。
ここで、$\mathbf{0}$はどっから出てきた＞＜とか思う人がいるかもしれませんが、部分空間は、常にゼロベクトル$\mathbf{0}$を含んでいるので、上のように出してくることが可能となります。
(2)→(1)$\mathbf{w} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2} = \mathbf{w_1'} + \mathbf{w_2'}(\mathbf{w_i}, \mathbf{w_i'} \in W_i, i = 1,2)$とすると、
$\mathbf{w_1} - \mathbf{w_1'} = \mathbf{w_2'} - \mathbf{w_2} \in W_1 \cap W_2$なので、

$$\mathbf{w_1} - \mathbf{w_1'} = \mathbf{w_2'} - \mathbf{w_2} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{w_1} = \mathbf{w_1'}, \mathbf{w_2'} = \mathbf{w_2}$となり、これは表現が一意に定まることを表わしている。

$$\therefore W = W_1 \oplus W_2$$

$\mathbf{w_1} - \mathbf{w_1'} \in W_1$で、かつ、$\mathbf{w_2'} - \mathbf{w_2} \in W_2$であり、それがイコールであるので、両方とも$W_1 \cap W_2$に含まれるということです。

次は、なんか昔やった和集合みたいな話。

<u>☆系 6.11</u>

$W=W_1 \oplus W_2$とするとき、

$$\dim W=\dim W_1+\dim W_2$$

である。

<u>☆定理 6.12</u>

ベクトル空間Ｖの部分空間W_1, W_2に対して、

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

である。

$\boxed{\text{証明}}$なんか、教科書よりも先生のやってた証明の方がよさげな気がしたのでそっち書いときます。

r+s=$\dim W_1$,r+t=$\dim W_2$,r=$\dim(W_1\cap W_2)$とする。$W_1\cap W_2$の基底を$\mathbf{u_1},\cdots,\mathbf{u_r}$, W_1の基底を$\mathbf{u_1},\cdots,\mathbf{u_r},\mathbf{v_1},\cdots,\mathbf{v_s}$, W_2の基底を$\mathbf{u_1},\cdots,\mathbf{u_r},\mathbf{w_1},\cdots,\mathbf{w_t}$とする。このとき、

$$\mathbf{u_1},\cdots,\mathbf{u_r},\mathbf{v_1},\cdots,\mathbf{v_s},\mathbf{w_1},\cdots,\mathbf{w_t}$$

がW_1+W_2を生成することは明らか。また、

$$a_1\mathbf{u_1}+\cdots+a_r\mathbf{u_r}+b_1\mathbf{v_1}+\cdots+b_s\mathbf{v_s}+c_1\mathbf{w_1}+\cdots+c_t\mathbf{w_t}=\mathbf{0} \qquad \cdots①$$

とすると、

$$c_1\mathbf{w_1}+\cdots+c_t\mathbf{w_t}=-(a_1\mathbf{u_1}+\cdots+a_r\mathbf{u_r}+b_1\mathbf{v_1}+\cdots+b_s\mathbf{v_s})$$

[左辺]∈ W_1,[右辺]∈ W_2より、[左辺],[右辺]∈ $W_1\cap W_2$=<$\mathbf{u_1},\cdots,\mathbf{u_r}$>

$$c_1\mathbf{w_1}+\cdots+c_t\mathbf{w_t}=a'_1\mathbf{u_1}+\cdots+a'_r\mathbf{u_r}$$

と表現できる。

$$\mathbf{u_1},\cdots,\mathbf{u_r},\mathbf{w_1},\cdots,\mathbf{w_t}$$

が基底なので、線形独立。

$$c_1=\cdots=c_t=a'_1=\cdots=a'_r=0$$

よって、①に代入して、

$$a_1\mathbf{u_1}+\cdots+a_r\mathbf{u_r}+b_1\mathbf{v_1}+\cdots+b_s\mathbf{v_s}=\mathbf{0}$$

また、

$$\mathbf{u_1},\cdots,\mathbf{u_r},\mathbf{v_1},\cdots,\mathbf{v_s}$$

が基底なので、線形独立となり、

$$a_1=\cdots a_r=b_1=\cdots=b_s=0$$

$$\mathbf{u_1},\cdots,\mathbf{u_r},\mathbf{v_1},\cdots,\mathbf{v_s},\mathbf{w_1},\cdots,\mathbf{w_t}$$

は基底となる。

$$\dim(W_1+W_2)=r+s+t=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

<u>★補空間</u>

Wの基底$\mathbf{w_1},\cdots,\mathbf{w_r}$を拡張してVの基底$\mathbf{w_1},\cdots,\mathbf{w_r},\mathbf{w_{r+1}},\cdots,\mathbf{w_n}$が得られている時、

$$W' = < \mathbf{w_{r+1}},\cdots,\mathbf{w_n} >$$

とおけば、

$$V = W \oplus W'$$

となる。このとき、W'を W の V における補空間という。

補空間であることは、

- V を張ること
- 線形独立であること

が言えればいい。基底の時と一緒っちゃあ一緒ですね。

$\boxed{例}$

$$V = \mathbf{R^2}$$
$$W = < \mathbf{e_1} >$$
$$W' = < \mathbf{e_2} >$$

とすると、

- V を張ること

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2}$$

- 線形独立であること

$$a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} = \mathbf{0} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0$$

これより、$V = W \oplus W'$となり、W'は W の V における補空間であることが言えた。

後者、線形独立であることは、つまり 2 つの部分空間の共通部分が｛$\mathbf{0}$｝のみであることを言っており、定理 6.10 から直和になっていることが言え、前者で、その直和がベクトル空間そのものを表わしている、というのを示しているのである。

ちなみに、原点を通る直線で、x 軸以外のものはすべて、Wの補空間となりうるので、検証してみるとよい。例えば、$W' = < \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} >$など。
ちなみに、これからも分かるように、補集合は一意に定まらないことを頭に入れておくこと。

では、頭を切り替えて次の単元に行きます。次は１学期にも少し齧った内容です。

★定義 6.4(線形写像)

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$
$$f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$$

が成り立つ時、この写像$f: U \to V$を線形写像と言う。

写像とはなんぞや、って話からだよね。

U の全ての元 u に対して、V の元の１つ$f(\mathbf{u})$を対応させるルールのこと

飯田教員の素晴らしい例をここで使わせていただきます。

僕たちは今、合コンに来ている。でも、普段の合コンとは違い、今日は必ず男子全員が女子の誰かに告白をしなければいけない。男子から複数の女子に告白をすることはできないが、１人の女子が複数の男子に告白をされるのは構わない。（これを俗に「モテる」という。）さて、僕たちの運命やいかに…

・・・だいぶ茶番ですね・・・笑

U から V への線形写像全体の集合を$\mathrm{Hom}_K(U, V)$という。また、V=U の時、線形写像のことを線形変換、１次変換とも呼び、$\mathrm{End}_K(U) = \mathrm{Hom}_K(U, U)$と表現する。

ゼロベクトルに移す変換をゼロ写像、自分自身に移す変換を恒等写像と言う。

合成変換$g \circ f$

$$f \in \mathrm{Hom}_K(U, V), g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$$

とすると、U から W への写像が定まり、これを f と g の合成写像と言い、$g \circ f$と表わす。

和とスカラー倍について、

$$f + g \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$$
$$\lambda f \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$$
$$(f+g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u})$$
$$(\lambda f)(\mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u})$$

と定義する。

例　$K[x]_n$について、$\frac{d}{dx} \circ \frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2}, \frac{d^2}{dx^2} + k \in \mathrm{End}_K(K[x]_n)$

ここで、k が単体で書かれていてなんだ？と思ったかと思う人もいるかもしれませんが、線形変換をここでは書いているので、後ろに f(x)をおけば、

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) + kf(x)$$

となる。つまり、前半は２回微分、後者は恒等写像の k 倍を表現している。

★核、像（復習）

理解しにくい範囲です、しっかりやっていきましょう。

$f \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$に対し、

$$\mathrm{Kerf} = \{\mathbf{u} \in U | f(u) = \mathbf{0}_V\}$$

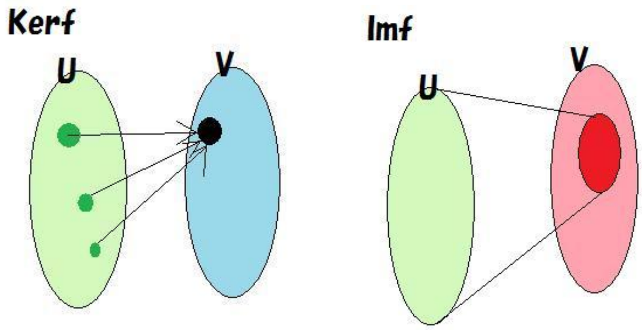
$$\mathrm{Imf} = \{f(\mathbf{u}) | \forall \mathbf{u} \in U\}$$

このとき、Ker を核（かーねる）、Im を像（いめーじ）という。

Ker は、変換を行った時に、ゼロベクトルに移るようなベクトル$\mathbf{u} \in \mathbf{U}$を表現している。

Im は、集合 U 全体のベクトル$\mathbf{u}$を変換した時に生じる $f(\mathbf{u})$を表現している。

…なんか分かりずらいので、図にしてみます。



Ker で表現したいのは、左の濃い緑の部分です。黒い部分はゼロベクトルです。ゼロベクトルに行くようなベクトル（濃い緑）を考えるということです。

Im で表現したいのは、右の濃い赤の部分です。U 全体を変換した時に、ベクトル f(**u**)の集合（濃い赤）に移り、Im では、その赤い部分を指すことになります。

・・・理解してくれたかな？汗

また、大事な概念として、全射と単射について述べとこうと思います。

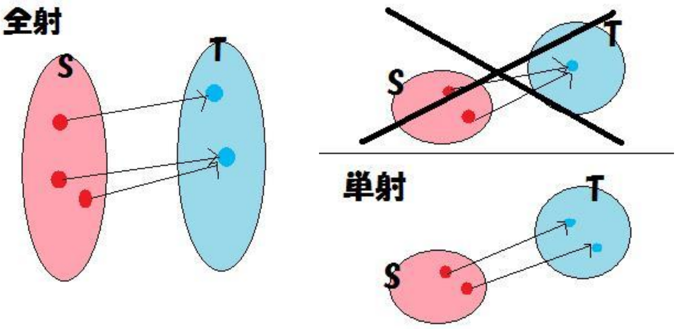
★全射・単射

写像 f:S→T が全射であるとは、$b \in T$とすると、$f(a) = b$となるＳの要素 a が少なくとも 1 つは存在するということである。

写像$f: S \to T$が単射であるとは、Ｓの異なる２つ以上の要素がＴの同一の要素に移らない、

$$f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$$

となるということである。



全射の場合、水色内のどんな青の点を選んできても、それに対応して赤の点が存在する、ということです。１つの水色の点に対応する赤の点は２つ以上でも構いません。最低１つあればいいんです。
単射の場合、Ｓの異なる赤の点を取ると、それらがＴで違う青の点に移るということです。

全射と単射の何が違うかというと、全射は、図からも分かるように、異なる赤の点を取っても同じ青の点に移ってしまうことがあるのです。つまり単射であるとは限りません。逆に単射は、赤の点を異なる点に全て移しても、水色全体にならないことがあるのです。つまり全射であるとは限らないということです。

なかなか分かりずらいですが、理解してください笑　教科書には P93 に軽く書いてあります。

これらを踏まえると、次の定理が理解できます、多分。
☆定理(P127,128 定理 5.2(3))
$f: U \rightarrow V$のとき、

$$\begin{cases} f\text{が単射} \Rightarrow \mathrm{Ker}f = \{\mathbf{0}_V\} \\ f\text{が全射} \Rightarrow \mathrm{Im}f = V \end{cases}$$

$f(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ となる $\mathbf{x}$ は、単射であれば $\mathbf{0}$ になるのは自明だし、f が全射であれば、移した点が V 全体になるというのも分かるかと思います。
ちなみに、U から V への全単射が存在するとき、U と V は同型であるといい、

$$U \simeq V$$

と表記する。U=V の時も、恒等写像を考えれば同型になるよ＾＾

逆写像
あ、あれだろ、U から V への変換 U→V の矢印の向きかえればいいんだろ、という単純な問題ではないんですね。

f:U→V に関して、全ての **v**∈ V について、ある$\mathbf{u} \in \mathrm{U}$が存在するとき、**v** から **u** への写像を f の逆写像といい、f^{-1}と表わす。
いわゆる、行列で言えば、逆行列が存在するときに逆写像が存在しましたね、そのようなものだと解釈するといいんではないでしょうか。

☆定理 6.13P155~157
n 次元ベクトル空間 V はK^{n}と同型である。

証明は教科書でみてもらうとして（見てねちゃんと）、証明すべきポイントは、
- 線形写像である（和とスカラー倍）
- 単射である（Kerf={0}である）
- 全射である（V=Imf である）

同型＝線形写像＋全単射なのでね、単純な話って言えば単純なんだけれども。

基底の変換$\mathrm{U} \to \mathrm{K}^{\mathrm{n}}$と、別の基底の変換 $\mathrm{V} \to \mathrm{K}^{\mathrm{m}}$、線形写像 $\mathrm{U} \to \mathrm{V}$とすると、この線形写像は線形写像$\mathrm{K}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{K}^{\mathrm{m}}$と同一視できる。これを図にしてみると、

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U} & \to & \mathrm{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{K}^{\mathrm{n}} & \to & \mathrm{K}^{\mathrm{m}} \end{array}$$

この図を可換図式であるという。

$\mathrm{U} \to \mathrm{V}(\mathrm{f}(\mathbf{u_j}) = \mathrm{a_{kj}}\mathbf{v_k})$を行列で考えてみると、

$$\left(\mathrm{f}(\mathbf{u_1}), \mathrm{f}(\mathbf{u_2}), \cdots, \mathrm{f}(\mathbf{u_n})\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} \mathrm{a_{k1}}\mathbf{v_k}, \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{m}} \mathrm{a_{k2}}\mathbf{v_k}, \cdots, \sum_{k=1}^{m} \mathrm{a_{kn}}\mathbf{v_k}\right)$$
$$= (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \cdots, \mathbf{v_m})\begin{pmatrix} \mathrm{a_{11}} & \mathrm{a_{12}} & \cdots & \mathrm{a_{1n}} \\ \mathrm{a_{21}} & \mathrm{a_{22}} & \cdots & \mathrm{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{a_{m1}} & \mathrm{a_{m2}} & \cdots & \mathrm{a_{mn}} \end{pmatrix} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \cdots, \mathbf{v_m})\mathbf{A}$$

この **A** を「線形写像 f の U の基底と V の基底に関する表現行列」という。

例題に触れておきましょう。結構大事ですので。

P159 例題 6.6

$$f: a+bX+cX^2+dX^3 \mapsto b+2cX+3dX^2$$

という変換を考えます、いわゆる微分ですね＾＾$f: K[X]^3 \to K[X]^2$というわけです。$K[X]^3$の基底 U として$\mathbf{u_1}=1, \mathbf{u_2}=1+X, \mathbf{u_3}=1+X^2, \mathbf{u_4}=1+X^3$。また、$K[X]^2$の基底を$\mathbf{v_1}=1+X, \mathbf{v_2}=X, \mathbf{u_3}=1+X^2$とすると、

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u_1}) &= 0 &&= 0 \\ f(\mathbf{u_2}) &= 1 &&= \mathbf{v_1}-\mathbf{v_2} \\ f(\mathbf{u_3}) &= 2X &&= 2\mathbf{v_2} \\ f(\mathbf{u_4}) &= 3X^2 &&= -3\mathbf{v_2}+3\mathbf{v_3} \end{aligned}$$

これより、

$$f(\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\mathbf{u_3},\mathbf{u_4}) = \left(f(\mathbf{u_1}),f(\mathbf{u_2}),f(\mathbf{u_3}),f(\mathbf{u_4})\right) = (\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3})\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

よって、$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$が表現行列である。

もちろんこれは基底の取り方で表現行列が変わってきます。例えば、$K[X]^3$の基底 U' として$\mathbf{u'_1}=1, \mathbf{u'_2}=X, \mathbf{u'_3}=X^2, \mathbf{u'_4}=X^3$。また、$K[X]^2$の基底を$\mathbf{v'_1}=1, \mathbf{v'_2}=X, \mathbf{u'_3}=X^2$とすれば、表現行列が$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$になります。計算して見てね。ここから、微分と言う作業も線形代数として解釈できることが分かりますね。

これと似た概念として、基底の変換行列というのもありました。$K[X]^3 \to K[X]^3$という基底の変換を考えましょう。U から U' への基底の変換行列を考えると、

$$\begin{aligned} \mathbf{u'_1} &= 1 = \mathbf{u_1} \\ \mathbf{u'_2} &= X = \mathbf{u_2}-\mathbf{u_1} \\ \mathbf{u'_3} &= X^2 = \mathbf{u_3}-\mathbf{u_1} \\ \mathbf{u'_4} &= X^3 = \mathbf{u_4}-\mathbf{u_1} \end{aligned}$$

これより、

$$(\mathbf{u'_1},\mathbf{u'_2},\mathbf{u'_3},\mathbf{u'_4}) = (\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\mathbf{u_3},\mathbf{u_4})\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって、$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$がU から U' への基底の変換行列となります。それぞれセットで出てくる可能性がありますので、警戒しておきましょう。

ここで、別の可換図式を考えます。基底の変換$\mathrm{U} \to \mathrm{U}', \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$、線形写像$\mathrm{f}: \mathrm{U} \to \mathrm{V}, \mathrm{U}' \to \mathrm{V}'$とする。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U} & \to & \mathrm{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{U}' & \to & \mathrm{V}' \end{array}$$

また、表現行列をそれぞれ$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{P}, \mathrm{Q}$とする。

$$\mathrm{f}(\mathbf{u'_1}, \cdots, \mathbf{u'_n}) = \mathrm{f}(\mathbf{u_1}, \cdots, \mathbf{u_n})\mathrm{P}$$

$$(\mathbf{v'_1}, \cdots, \mathbf{v'_n}) = (\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_n})\mathrm{Q}$$

$$\mathrm{f}(\mathbf{u_1}, \cdots, \mathbf{u_n}) = (\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_n})\mathrm{A}$$

$$\mathrm{f}(\mathbf{u'_1}, \cdots, \mathbf{u'_n}) = (\mathbf{v'_1}, \cdots, \mathbf{v'_n})\mathrm{B}$$

$$(\mathbf{v'_1}, \cdots, \mathbf{v'_n})\mathrm{B} = \mathrm{f}(\mathbf{u'_1}, \cdots, \mathbf{u'_n}) = \mathrm{f}(\mathbf{u_1}, \cdots, \mathbf{u_n})\mathrm{P} = (\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_n})\mathrm{AP} = (\mathbf{v'_1}, \cdots, \mathbf{v'_n})\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}$$

$\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}$をいわゆる対角化行列って言ったりするんですが、それは次の章で扱いましょう。

教科書は P175 に飛びます、とりあえず、複素数について簡単に復習しておきましょう。

$\boxed{\text{例}}$ $(1)\overline{1+3\mathrm{i}}(2)\overline{3}(3)\overline{2\mathrm{i}}$　　　答、$(1)1-3\mathrm{i}(2)3(3)-2\mathrm{i}$

上に線を引くと、元の数の複素数部分の符号を変える（ー1 倍する）んでしたよね。そして、これらの数のことを、共役な複素数と言いました。教科書では$\sqrt{-1}$でいちいち書いてますが、めんどくさいので虚数 i で書きます(-“-)

これを踏まえて、一般的な内積について考えます。

<u>★定義 6.5(計量ベクトル空間)</u>

V を有限次元ベクトル空間とし、$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{y} \in \mathrm{V}$, $\lambda \in \mathrm{K}$ に対して、内積$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathrm{K}$について、

$(1)(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x_1}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x_2}, \mathbf{y})$

$(2)(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$(3)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$

$(4)(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$

$(5)(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

を満たす時、V を K 上の計量ベクトル空間という。

$(1)'(\mathbf{x}, \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y_1}) + (\mathbf{x}, \mathbf{y_2})$

$(2)'(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \overline{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

この 2 つは上の(1)~(5)また、$\overline{\mathrm{a}+\mathrm{b}} = \overline{\mathrm{a}} + \overline{\mathrm{b}}, \overline{\mathrm{ab}} = \overline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{b}}$であることから、導出することができます。

高校時代は、内積は実数の範囲内で実行していましたが、大学では複素数の範囲に拡張して考えます。すると、幾つか弊害が出てきます。

$\boxed{例}$　$\mathrm{z} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$とすると、$(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} + 1 = 0$

おっと、これは上の定義(5)に反していますね、つまり複素数の範囲ではこの計算をしてはいけないことになります。では、どうすればいいのかといいますと、内積の後者を共役なものに変換してから計算をしよう、ということなんです。具体的にすると、

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{y}_2 \\ \mathrm{y}_3 \end{pmatrix}$とすると、$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{x}_1\overline{\mathrm{y}_1} + \mathrm{x}_2\overline{\mathrm{y}_2} + \mathrm{x}_3\overline{\mathrm{y}_3}$ということです。

この内積を標準内積と言います、これからはこれを用いるので気をつけてください。でも、実数の範囲内であれば、共役を取っても数が変わらないので、高校の時と同じになるのは分かりますね。ちなみに上の$\boxed{例}$は、

$$\mathrm{z} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \text{とすると、} (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i}) + 1 = 2$$

となります。

また、ベクトルの大きさのことをノルムといい、$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$で表わします。例えば、$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$のノルムは 5 となります。

次は、高校でも扱いました、コーシーシュワルツの複素数も含む version です。

<u>☆定理 6.20 コーシーシュワルツ(Cauchy-Schwarz)の不等式</u>

計量ベクトル空間 V の 2 つの元 **x,y** について、

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$$

が成立する。(等号成立条件は **x,y** が線形従属になる時)

簡単に証明してみよう。

$\boxed{証明}$　$\mathbf{y} = \mathbf{0}$が成立するのは当然なので、$\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$を考える。

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}.\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y}$$

とおくと、

$$\|\mathbf{z}\|^2 = (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{|(\mathbf{x}.\mathbf{y})|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} - \frac{|(\mathbf{x}.\mathbf{y})|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} + \frac{|(\mathbf{x}.\mathbf{y})|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - |(\mathbf{x}.\mathbf{y})|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} \geq 0$$

$$(\because \|\mathbf{z}\|^2 \geq 0)$$

また、$\|\mathbf{y}\|^2 \geq 0$より、$\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 \geq |(\mathbf{x}.\mathbf{y})|^2$と出来る。等号成立する時には、$\mathbf{z} = \mathbf{0}$なのでつまり、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$が線形従属であるとき、である。

<u>☆定理 6.21（三角不等式）</u>

計量ベクトル空間 V の 2 元$\mathbf{x}, \mathbf{y}$に対して、

$$|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

が成立する。

さて、定理 6.20 から

$$-\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \le |(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$$

$\mathbf{x},\mathbf{y}$が共にゼロベクトルではないとすると、$\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$で割ってあげれば

$$-1 \le \frac{|(\mathbf{x},\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \le 1$$

このとき、$\cos\theta = \frac{|(\mathbf{x},\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$となるような$0 \le \theta \le \pi$が１つに定まり、これを$\mathbf{x},\mathbf{y}$のなす角という。

特に$\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$の時、$\mathbf{x},\mathbf{y}$は直交するという。
虚数の時も直交の定義は一緒です＾＾

ここら辺からは教科書に書いてない部分が多くなります。授業をしっかり聞いて学習してください。話の中心は正規直交基底です。

★定義（正規直交基底）

V の基底$\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_n}$が、

$$(\mathbf{x_j},\mathbf{x_k}) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 (j \ne k) \\ 1 (j = k) \end{cases}$$

をみたすとき、正規直交基底といい、V の元$\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_m}$が$(\mathbf{x_j},\mathbf{x_k}) = \delta_{jk}$をみたすとき、正規直交系という。

これらに必要な条件としては、

- ノルムが１であること
- 全ての元において、任意の２つの元がたがいに直交していること

この２つが大事となります。今までの直交座標系を考えると、$\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}$はそれぞれノルムが1 でそれぞれが直交していました。ここからも上記の条件が理解できると思います。

☆定理 6.a

正規直交系は線形独立である。

証明

$$c_1\mathbf{x_1} + \cdots + c_m\mathbf{x_m} = \mathbf{0}$$

とおくと、$1 \le \forall j \le m$について、内積を取ると、

$$(c_1\mathbf{x_1} + \cdots + c_m\mathbf{x_m},\mathbf{x_j}) = (\mathbf{0},\mathbf{x_j}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m} c_k(\mathbf{x_k},\mathbf{x_j}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m} c_k\,\delta_{kj} = 0 \Leftrightarrow c_j = 0$$

この証明の仕方は結構よく使う手法らしいので（内積）、イメージとして持っておくのは大事かもしれません。

☆系 6.b

$$\mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_m}\text{が正規直交系} \Rightarrow \mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_m}\text{は} < \mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_m} > \text{の正規直交基底}$$

これは定理 6.a を用いれば、「正規直交系＋線形独立＋$< \mathbf{x_1},\cdots,\mathbf{x_m} >$（有限生成）」から、正規直交基底であることが言えるのは分かると思います。

★定義（直交補空間）

部分空間$\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$: 計量ベクトル空間のとき、

$$\mathrm{W}^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathrm{V} | \forall \mathbf{w} \in \mathrm{W}; (\mathbf{x}, \mathbf{w}) = 0\}$$

これを、直交補空間という。

☆定理 6.c

(1)$\mathrm{W}^{\perp}$は V の部分空間

(2)$\mathrm{V} = \mathrm{W} \oplus \mathrm{W}^{\perp}$

証明

(1)$\mathbf{x}_1, \mathbf{x_2} \in \mathrm{W}^{\perp}$,$c_1, c_2 \in \mathrm{K}$に対して、$c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} \in \mathrm{W}^{\perp}$を満たせばよい。定義 6.2 部分空間

(2)

- $\mathrm{W} + \mathrm{W}^{\perp} = \mathrm{W} \oplus \mathrm{W}^{\perp} \Leftrightarrow \mathrm{W} \cap \mathrm{W}^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$を示す(定理 6.10)

$\mathbf{x} \in \mathrm{W} \cap \mathrm{W}^{\perp}$とすると、$\mathbf{x} \in \mathrm{W}, \mathbf{x} \in \mathrm{W}^{\perp}$だから、$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ で、$\mathbf{x} = \mathbf{0}$となるということ。

- $\mathrm{V} = \mathrm{W} + \mathrm{W}^{\perp}$を示す

テクニカルな手法です！

$\forall \mathbf{v} \in \mathrm{V}$に対して、

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{w_1})\mathbf{w_1} + \cdots + (\mathbf{v}, \mathbf{w_k})\mathbf{w_k} \in \mathrm{W}$$

とすると、$1 \leq \forall j \leq k$ について、

$$\left(\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{w_j}\right) = \left(\mathbf{v}, \mathbf{w_j}\right) - \left(\mathbf{w}, \mathbf{w_j}\right) = 0$$

よって、$\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathrm{W}^{\perp}$となり、$\mathbf{v} = \mathbf{w} + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \in \mathrm{W} + \mathrm{W}^{\perp}$となる。

ここで出てきた$\mathbf{w}$ですが、$\mathbf{v}$の$\mathbf{w}$への正射影または直交射影といいます。高校の時にやったものと一緒です！

☆定理 6.22 グラムシュミットの直交化法教科書 P178,179

V: 計量ベクトル空間とし、$\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_n}$をその基底とする。この時、

$$\mathbf{e_1} = \mathbf{v_1}$$

$$\mathbf{e_2} = \mathbf{v_2} - \frac{(\mathbf{v_2}, \mathbf{e_1})}{(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_1})}\mathbf{e_1}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e_j} = \mathbf{v_j} - \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{j-1}} \frac{(\mathbf{v_j}, \mathbf{e_i})}{(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_i})}\mathbf{e_i}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e_n} = \mathbf{v_n} - \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n-1}} \frac{(\mathbf{v_n}, \mathbf{e_i})}{(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_i})}\mathbf{e_i}$$

このとき、$\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$ のとき、$(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j}) = 0$

また、

$$\frac{1}{\|\mathbf{e_1}\|}\mathbf{e_1}, \cdots, \frac{1}{\|\mathbf{e_n}\|}\mathbf{e_n} \text{は V の正規直交基底となる}$$

この定理は 7 章でも使います。覚えておきましょう。

第７章　固有値と固有ベクトル

７章の main の話は固有方程式です。高校でも固有値、固有ベクトルなんてものを出したりした覚えがあるかもしれません。というか、１学期にも幾分かじったんですが. . . 。まあ、そこらへんをもう少し深く見ていこうという訳です。
少々理解しにくい話が続きます！！辛抱強く見ていきましょう。どうしても無理そうな人は、下の謎の区切り線と同じ所までジャンプしてみてください。

-----------------ヾ(;ﾟ;Д;ﾟ;)ﾉヾ(;ﾟ;Д;ﾟ;)ﾉヾ(;ﾟ;Д;ﾟ;)ﾉヾ(;ﾟ;Д;ﾟ;)ﾉヾ(;ﾟ;Д;ﾟ;)ﾉ----------------------

n 次正方行列 $A=(a_{ij})$に関する固有多項式、

$$\Phi(x) = \det(xE - A)$$

これに関する固有方程式、

$$\Phi(x) = 0$$

この方程式の解を固有値、それに対応する 0 ベクトルでない元のことを固有ベクトルといいます。また、

$$\mathrm{KerL}_{(\alpha E - A)} = \{\mathbf{x} \in K^n | A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}\}$$

を A の固有値 α に関する固有空間といいます。L ってなんだ？って思うかもしれませんが、ただ「行列(~)をかける線形写像」をさしているだけなので全然ビビる必要はありません。

☆定理 7.1
(1) $\Phi(\alpha) = 0$
(2) $\mathrm{KerL}_{(\alpha E - A)} \neq \{\mathbf{0}\}$
この２つは同値である。

証明は、定理 3.16 と定理 2.17 と対偶を用いてやると出来ます。
ある固有値に対する固有空間はゼロベクトルのみではないということです．固有値があれば αE-A は非正則であるから確かに固有空間がゼロ以外にもあることはわかるような気がします。
問題 7.1 で簡単に固有値などを出す練習をしておきましょう。

☆定理 7.2

n 次正方行列 A の相異なる固有値β_iそれぞれに対応する固有空間V_{β_i}の和を W=$\sum V_{\beta_i}$とすると、和 W は直和である。

$$W = V_{\beta_1} \oplus \cdots \oplus W_{\beta_r}$$

$\boxed{\text{証明}}$

$\mathbf{v}_j \in V_{\beta_j}(j = 1,2,\cdots,k)$について、$\mathbf{v_1} + \cdots + \mathbf{v_k} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{v_1} = \cdots = \mathbf{v_k} = \mathbf{0}$を示す。
$\mathbf{v_1},\cdots,\mathbf{v_k}$のなかで 0 でないものがあるとして、そこから矛盾を導く。

添え字をつけなおして、$\mathbf{v_1} \neq \mathbf{0},\cdots,\mathbf{v_t} \neq \mathbf{0},\mathbf{v_{t+1}} = \cdots = \mathbf{v_k} = \mathbf{0}$としてよい。

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_1} + \cdots + \mathbf{v_t} = \mathbf{0}$$

$$A\mathbf{v} - \beta_t\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A - \beta_t E)\mathbf{v_1} + (A - \beta_t E)\mathbf{v_{t-1}} + (A - \beta_t E)\mathbf{v_t} = \mathbf{0}$$
$$\Leftrightarrow (A - \beta_t E)\mathbf{v_1} + (A - \beta_t E)\mathbf{v_{t-1}} = \mathbf{0}$$

$(A - \beta_t E)\mathbf{v_j}$はゼロベクトルでないので、これを$\mathbf{v_j}$とおきなおし、

$$\mathbf{v_1} + \cdots + \mathbf{v_{t-1}} = \mathbf{0}$$

これを(t-2)回繰り返すと、$\mathbf{v_1} = \mathbf{0}$の一方、$\mathbf{v_1} \neq \mathbf{0}$であるので、これは矛盾　■

ここで対角行列を定義しておきます。

★定義（対角行列）

$A \in M_n(K)$が対角化可能である。$\overleftrightarrow{\mathrm{Def}}\ \exists P \in GL_n(K), P^{-1}AP$が対角行列である。

☆定理 7.3

(1)A は対角化可能である。
(2)$K^n = V_{\beta_1} \oplus \cdots \oplus W_{\beta_r}$
(3)A の固有ベクトルからなるK^nの基底が存在する。

$\boxed{\text{証明}}$

(1)→(2)のみ

A が対角化可能であるから、$P^{-1}AP$が対角行列である。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AP = P\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

P=($\mathbf{p_1},\cdots,\mathbf{p_n}$)として、整理すると、$A\mathbf{p_j} = d_j\mathbf{p_j}$(j=1,$\cdots$, n)
$P \in GL_n(K)$より、$\mathbf{p_1},\cdots,\mathbf{p_n}$は線形独立。
さらに、K^nの基底で A の固有ベクトルであるから、

$$K^n = V_{\beta_1} \oplus \cdots \oplus W_{\beta_r}$$

しかし、どんな時に対角化可能であるかがこれでは分からないので、新しい概念を導入します。

$$A^* = {}^t\overline{A}$$

これを、A の随伴行列といいます。転置行列の上のバーは、各成分の共役なものを取ってくるということです。

☆定理 7.4

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^*\mathbf{y})$$

が成り立つ。

さらに、随伴行列のなかで特殊なものとして、正規行列を定義します。

★定義 7.1

$$AA^* = A^*A$$

を満たす時、A を正規行列という。

命題

正規行列 A の固有値をα、それに関する固有ベクトルを$\mathbf{x}$とすると、$\bar{\alpha}$はA^*の固有値で、$\mathbf{x}$は$\bar{\alpha}$に対するA^*の固有ベクトルである。

なんでかって言うのは、読者の練習問題とします（書いてみたかった笑）解答は教科書 P190 に書いてあります。

$A^* = A^{-1}$を満たす時に、これをユニタリ行列、$A^* = A$の時に、エルミート行列、また、A が実数の行列のとき、直交行列といいます（${}^tA = A^{-1}$）

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta + i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta + i\sin\theta \end{pmatrix}$はユニタリ行列であるし、回転行列は直交行列となったりします。

☆定理 7.5

(1)A はユニタリ行列

(2)$\mathbf{a_1}, \cdots, \mathbf{a_n}$は$K^n$の正規直交基底

この２つは同値である。

$\boxed{\text{証明}}$(1) ⇔ (2)　シンプルにまとめると、

$$\text{ユニタリ行列} \Leftrightarrow A^*A = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{a_1^*} \\ \vdots \\ \mathbf{a_n^*} \end{pmatrix} (\mathbf{a_1} \quad \cdots \quad \mathbf{a_n}) = E \Leftrightarrow \mathbf{a_i^*}\mathbf{a_j} = \boldsymbol{\delta_{ij}}$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{a_j}, \mathbf{a_i}) = \boldsymbol{\delta_{ij}} \Leftrightarrow \text{正規直交基底}$$

これらの定理を用いることで、対角化の定理を提示することができます。

<u>☆定理 7.6</u>
⑴A は正規行列
⑵A はユニタリ行列で対角化される。
この２つは同値である。

<u>☆定理 7.7</u>
⑴エルミート行列はユニタリ行列により実数成分の対角行列にできる。
⑵実対称行列は直交行列により実数成分の対角行列に出来る。

-----------------ヾ(;゜;Д;゜;)ノヾ(;゜;Д;゜;)ノヾ(;゜;Д;゜;)ノヾ(;゜;Д;゜;)ノヾ(;゜;Д;゜;)ノ---------------------

辛抱強くやって行きましょう！！とは言いましたが、おそらく大部分の人が今までの内容を 100%理解してはないと思います。自分も正直完璧かどうかって言われると怪しい所です。。なので、第７章で必要となる対角化について、簡単に整理してみようと思います。

まず、行列の成分が実数の場合では、普通に固有値から直交してない普通の固有ベクトルを取り出しさえすれば対角化出来るが、命題の逆、つまり、複素数を含むものではＰみたいに簡単には出せない。

で、どんな行列が対角化出来るのかというと、定理７．７でまとめられてるように、エルミート行列(A^*＝A)をさす。そして、エルミート行列を対角化出来るのは、ユニタリ行列。ユニタリ行列っていうのは、定理７．５にあるように、正規直交基底をもつ。つまり、単位行列であることが必要なのも分かる。つまり、固有空間を普通に出しただけでは駄目で、その固有ベクトルたちをグラムシュミットで直交化する必要があるわけです。

ここまでの話は行列成分に虚数を含んだものを対角化する行列の話です。

で、虚数部分がなければ、エルミート行列は実対称行列だし、ユニタリ行列はただの直交行列です。だから、実数の場合でも、グラムシュミットで直交化して直交行列求めて計算も出来ますが、これは所詮実数の話ですから、普通に固有ベクトルを出して直交化しなくても対角行列は求まります。

表にするとこんな感じ。

対角化	１のやり方	２のやり方
実数の範囲での行列	可能	可能
虚数を含む行列	不可能	可能

１のやり方

①0=|xE-A|をみたす x を求める。これが固有値。

②固有値に対応する固有空間を求める。

③正則行列 P を簡単に求める。

④逆行列P^{-1}を求め、対角行列 D=$P^{-1}AP$を求める。

２のやり方

①0=|xE-A|をみたす x を求める。これが固有値。

②固有値に対応する固有空間を求める。

③グラムシュミットの直交化法により、正規直交基底を求める。

④正規直交基底から簡単にユニタリ行列 P 求める。

⑤逆行列P^{-1}を求め、対角行列 D=$P^{-1}AP$を求める。

簡単に言うとこんな感じです。こうみると案外問題は楽になるはずです。ちなみにこれから紹介する例１・２は「１のやり方」、例３は「２のやり方」を採用しています。実数の場合では１でも２でも出来ると言いましたが、直交行列を求めて計算する場合には２を採用して問題に取り組んでください。では、例をみてみましょう。

$\boxed{\text{例１}}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$を対角化せよ。

固有値を x とすると、まず 0=|xE-A|を考える。

$0 = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 4x+3=(x-1)(x-3) \quad \therefore x = 1,3$

$(xE\text{-}A)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$を満たす列ベクトルを考え、このベクトルが固有ベクトルとなる。

x=1 のとき、$\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 固有空間は、$W_1 =< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} >$

x=3 のとき、$\mathbf{v_3}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 固有空間は、$W_3 =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$

ここで、正則行列 P＝$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$をとれば、$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

よって、D=$P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$と対角化に成功する。

３次正方行列の対角化も基本的には変わらないが、固有値が３つでない時もありうる。
しかし問題はなく、固有値から固有ベクトルが３つ出てきさえすれば、しっかり正則行列、および対角化行列を導出することができる。

例２

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$を対角化せよ。

0=|xE-A|=$\begin{vmatrix}x-1 & -1 & -1\\ -1 & x-1 & -1\\ -1 & -1 & x-1\end{vmatrix}=(x-1)^3-2-3(x-1)=x^2(x-3)$

よって、固有値は $x=0,3$

(xE-A)$\mathbf{v}=\mathbf{0}$を満たす固有ベクトルを考えるのだが、３次元だと見つけるのが若干困難な時もある。そこで、１学期にやった行基本変形を用いて、簡約階段行列をつくります。

$x=3$のとき、(xE-A)=$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\text{(３行目の２倍を１行目に足し、３行目の-1 倍を２行目に足す)}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ 0 & 3 & -3\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\text{(3 行目を-1 倍し、1 行目と入れ替える)}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix}\rightarrow\text{(2 行目を 3 行目に足し、2 行目を 3 で割る)}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\text{(2 行目の-1 倍を 1 行目に足す)}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

これより、行列が行基本変形され、この行列内の線形独立なベクトルの個数は 2 つとなりました。つまり、階数 rank(xE-A)=2 ということです。
ここで、定理 2.17 より、基本解すなわち固有ベクトルが 3-rank(xE-A)=1 つ存在することが分かります。

$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\mathbf{0}$を満たす列ベクトルは、$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$であることがわかり、固有空間は

$W_3=<\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}>$となります。

行基本変形、簡約階段行列、階数、基本解の個数については、教科書 P33~37,P50,P53 を見てください。
同様に、x=0 の時も考えますが、今回は簡単です。

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$となるので、階数は１、よって固有ベクトルは２つとなります。

ここが、普段と違うところなので気をつけましょう。固有値１つに対して固有ベクトルが１つであるとは限りません。
上と同様に調べると、
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$が固有ベクトル、固有空間は$W_0 = < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} >$であることが分かると思います。
これより、正則行列 P=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$をつくることができ、逆行列$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$とすることができます。逆行列の作り方は、(P|E)という 3 行 6 列の行列を作り、行基本変形をしていくことで、$(E|P^{-1})$をつくっていくんでした。こう変形出来たことで、P が逆行列をもつ、すなわち正則行列であることが完全に立証できたわけです。
そして、対角化行列 D は、

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、完成です。

よく見てみると、対角化行列の対角成分は 3,0,0 と固有値になっていることが分かります。これは証明をしたりすると当り前のことですが、固有ベクトルに対応して固有値が対角化成分に現れるのです。なので、どこかで計算を間違えてしまった場合には成分が違うことがすぐ分かりますし、最悪、逆行列を出すことができなくても正則行列 P を書ければ、対角化行列 D を直ちに書いてしまうことも可能です。小技として覚えておくのも良いかもしれません。

例３問題 7.2(3)
$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$を対角化せよ。
①det(xE-A)=$(x-2)^3 + 2 - 3(x-2) = x(x-3)^2$より、x=0,3
②x=0 の時、$\begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$より、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$
x=3 の時、$\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ i & 1 & -i \\ -1 & i & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$より、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
③$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$とすると、グラムシュミットの直交化法により、

$$\mathbf{e_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{v_2} - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathrm{e}_1)}{(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1})}\mathbf{e_1} = \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{v_3} - \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \frac{(\mathbf{v}_3, \mathrm{e}_\mathrm{i})}{(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_i})}\mathbf{e_i} = \mathbf{v_3} - \frac{-\mathrm{i}}{2}\mathbf{v_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}$$

これのノルムを全て１にする必要があるので、

$$\mathbf{e'_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e'}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e'}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}$$

ここで注意してほしいのは、虚数を含むノルムの計算です。$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{x}}$となるので、

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 1 + \mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i}) + (-1) \cdot (-1) = 1 + 1 + 1 = 3$となります。間違えないように気をつけましょう。

④ユニタリ行列は$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

⑤逆行列は、$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

よって、$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

ここでも、誘導がなければ P を求めた後に、D を書いちゃっても OK だと思います。

対角化キャンペーンは以上で終わりです。いかがだったでしょうか。問題に触れてみるとより勉強の方針が立つことが身にしみて分かると思います。練習できる問題が、教科書では、問題 7.1 7.2 7.3 章末問題 2.3.4.5 にあります。

第８章　幾何学的応用

８章に入るのですが、ここでは符号という概念と、平方完成の仕方について理解すれば問題は解けます。下手に難しい内容に手を出すのはよくないと思うので、そこだけをピックアップしてやってしまいましょう。

実数係数の次の n 変数の 2 次方程式を考える。

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} 2b_i x_i + c = 0 \qquad \cdots ①$$

$n = 3$の時に、この方程式を満たすE^nの点$(x_1, \cdots, x_n)$全体の集合を 2 次超曲面という。曲面というからにはどういう形をしているのかを知りたい。なので、どうにか変形を行って、次の３つの形にしたい。これらを標準形といったりします。

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2 + \gamma = 0 & \mathrm{I} \\ \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2 + 2\beta x_{n+1} = 0 & \mathrm{II} \\ \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2 = 0 & \mathrm{III} \end{cases}$$

すなわち、2 乗の和、もしくは 2 乗の和と定数項、2 乗の和と 1 次の項に変換できるということです。３つの形に限定されるのは教科書参照。

大事となるのは、符号 (p,q)です。

p: α_1〜α_nの内、正であるものの個数

q: α_1〜α_nの内、負であるものの個数

符号ごとの形がどうなるかというと、

(1)$\alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_3 x_3^2 = 1$

(p,q)=(3,0)　楕円面　・・・(a)

(2,1)　一葉双曲面　・・・(b)

(1,2)　二葉双曲面　・・・(c)

(3,0)　空集合

(2)$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = x_3$

(p,q)=(2,0)(0,2)　楕円放物線　・・・(e)

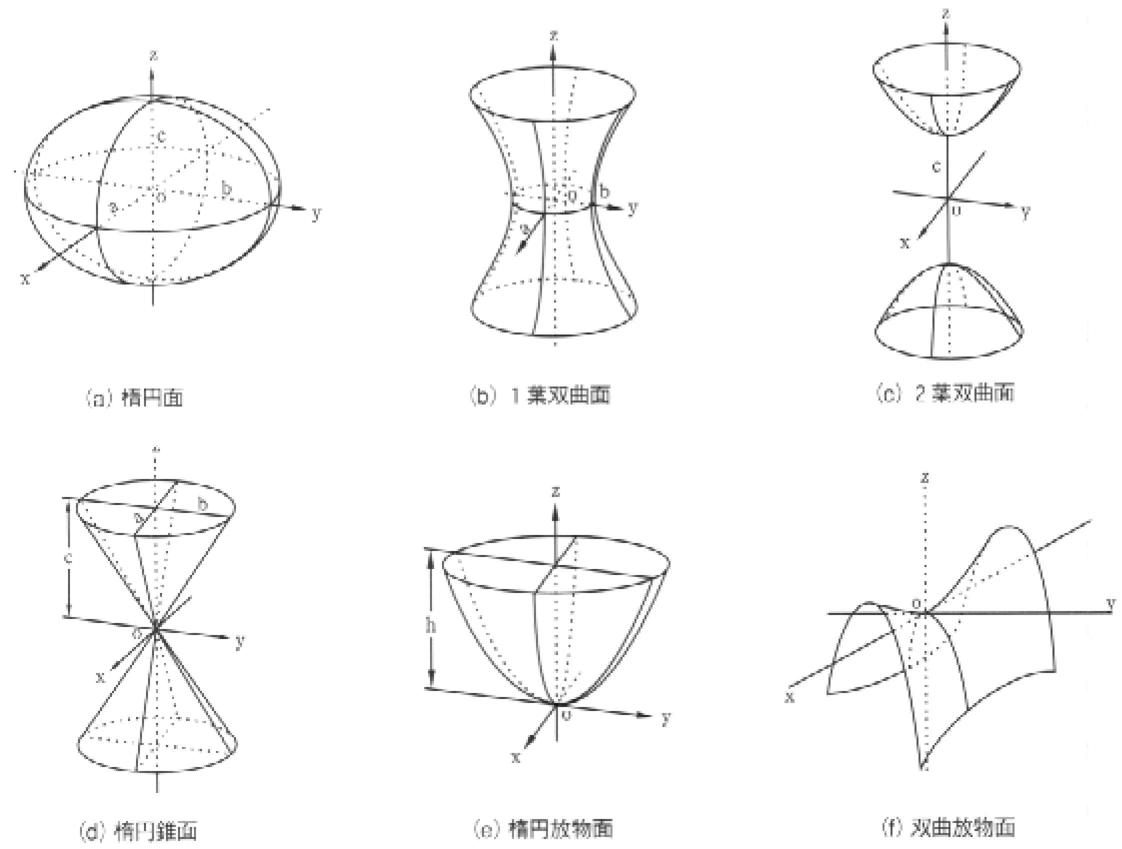
(1,1)　双曲放物面　・・・(f)

(3)$\alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_3 x_3^2 = 0$

(p,q)=(3,0)(0,3)　1 点(0,0,0)

(1,2)(2,1)　楕円錐面　・・・(d)

名前は覚えてください。１年目では符号を出させて名前は何かというのを書かせました。



(a) 楕円面　(b) 1葉双曲面　(c) 2葉双曲面

(d) 楕円錐面　(e) 楕円放物面　(f) 双曲放物面

さて、符号の簡単な求め方ですが、ひたすら平方完成をするというものです。例をみてくれると早いと思います。

例

$$2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 - 8x_1 = 5$$

まず、

$$x_1x_2 = \frac{1}{4}\{(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2\}$$

だから、

$$\frac{1}{2}\{(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2\} + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 - 8x_1 = 5$$

$$y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_1 - x_2$$

とすると、

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}$$

代入して整理すると、

$$\frac{1}{2}{y_1}^2 + (3x_3 - 4)y_1 - \frac{1}{2}{y_2}^2 + (x_3 - 4)y_2 = 5$$

まあ、またこれを平方完成するわけで、

$$\frac{1}{2}(y_1+3x_3-4)^2-\frac{1}{2}(3x_3-4)^2-\frac{1}{2}(y_2-x_3+4)^2+\frac{1}{2}(x_3-4)^2=5$$

$$\frac{1}{2}(y_1+3x_3-4)^2-\frac{1}{2}(y_2-x_3+4)^2-4(x_3-1)^2=1$$

適当に文字を直して、

$$\frac{1}{2}z_1^2-\frac{1}{2}z_2^2-4z_3^2=1$$

これは、標準形(1)(p,q)=(1,2)の二葉双曲面となる。

まあ、こんな感じのことをするわけです。

平方完成でこの類は処理できます。てか、多分こんな感じの出ると思うからチェックしといて。

ところで、教科書はやけに難しく書いてありますね。実は、この今やっていた平方完成と文字の置き換えをやけに難しく書いているだけなんです。てか、難しくて実用性は無いと思います。この難しさの原因はアフィン変換によるものです。

アフィン変換は、元の式から標準形にもっていくための道具のようなものです。例えば、上の例を考えると、

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1+3x_3-4 \\ y_2-x_3+4 \\ x_3-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+x_2+3x_3-4 \\ x_1-x_2-x_3+4 \\ x_3-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

x の式から z の式へあっという間に変換をすることができちゃいましたね＾＾結局したかったのはこういうことだったのです。

結論として、2 次超曲面を表わす式、

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n} 2b_ix_i+c=0$$

が出てきたときに、平方完成をすることで、その標準形と符号(p,q)、さらにどんな図形かを求めることができれば OK だと思います。

以上、８章でした。完結です。

終わりに

　こんな駄文に最後まで付き合ってくれてありがとうございます。野口もシケプリも光栄です。最後まで読んでくれた人に、出題されやすい所を指摘しておきます。

　数学Ⅱ２学期のテストでは、

・対角化（固有値、固有ベクトル、グラムシュミット、エルミート行列など）

・２次超曲面（平方完成による２次超曲面の決定）

は、高い確率ででると思います。

プラス、

・基底の変換行列の計算

・単なる次元、固有値の計算

くらいをマークしておけばどうにかなるとは思います。

６章においては、直和に関連した問題を出しうる可能性があります。直交補空間や部分空間に関する証明も出るかもしれません。第６章は証明などで出てもおかしくないので詳しく書いたつもりです。

もちろん、キャパある人は全部やってください。結局どこが出るかなんて誰も分からないからね＞＜

で、問題は計算中心です。計算の配点の比重がとても大きいです。なので、証明に無理にトライする必要はありませんが、いかんせん計算問題は間違えた時のリスクが高いです。それを考慮してください。

マイナスとか、罫線で見えなくなる恐れがあるのでそういうところにも十分配慮してください。

とりあえず、最後までよんでくれてありがとう。

野口勇大　g150092@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp