個人にとって最適な税率体系

― ラムゼー問題入門 ―

2012 年

ここでは，単一の個人（もしくは同一の複数の個人）から一定の額の税金を徴収する場合，どのような税率設定がもっとも歪みを小さくするのかを考える．そのような問題はラムゼイ（Ramsey, F.P.）が，その論文 ”A contribution to the theory of taxation (*Economic Journal* 37. 47-61, 1927)” のなかで取り組み定式化した問題であるため，ひろく「ラムゼイの課税問題（The Ramsey Tax Problem)」と呼ばれる．ここで考える個人は，賃金率 W で労働 h を供給し，（余暇以外の）複数の財を消費していると仮定する．また分析を簡単にするために，賃金率と財の生産者価格は外生的に固定されているとしよう．消費財が 2 つの場合，この個人の最適化問題は以下のようになる．

$$\max_{x_1,x_2,h} U(x_1,x_2,H-h) \ \text{ subject to } q_1x_1+q_2x_2=Wh$$

ただし，ここで各財の生産者価格を p_i とすると，消費者価格は従量税率 t_i とともに，$q_i \equiv p_i+t_i$ と定義される．

以下では労働所得に対する課税を明示的に考える必要がないことに注意しよう．例えば，従価税率 m の労働所得税が課されたとしよう．その場合，上記の予算制約は

$$q_1x_1+q_2x_2=(1-m)Wh$$

となる．しかし，この制約は

$$\frac{q_1}{1-m}x_1+\frac{q_2}{1-m}x_2=Wh$$

とも表記できるから，この新たな労働所得課税の予算制約に与える効果は，各消費財の税率が

$$t_i'=\frac{p_i+t_i}{1-m}-1=\frac{m+t_i+p_i-1}{1-m}$$

へと変化する場合と等しい．このことは余暇 l のみに課税できないことを実質的に示している．上記の最適化問題を余暇を明示して書き直すと

$$\max_{x_1,x_2,l} U(x_1,x_2,l) \ \text{ subject to } q_1x_1+q_2x_2+Wl=WH$$

となるが，ここで労働賦損量 H を労働価格（＝賃金率）で評価した，賦存「所得」を変えること無しに（＝相対価格のみに影響を与える形で），余暇 l を課税標準とした課税を行うことは不可能である．

上記の最適化問題から，$M \equiv WH$ とすると，以下の需要関数が得られる．

$$x_1=x_1\left(q_1,q_2,W,M\right), \quad x_2=x_2\left(q_1,q_2,W,M\right), \quad l=l\left(q_1,q_2,W,M\right)$$

需要関数を効用関数に代入して得られる効用を表す関数は「間接効用関数（indirect utility function)」と言い，この場合，

$$V(q_1, q_2, W, M) \equiv U\left[x_1\left(q_1, q_2, W, M\right), x_1\left(q_1, q_2, W, M\right), l\left(q_1, q_2, W, M\right)\right]$$

となる．税率は従量税として表していたので，この個人からの税収は以下の要になる．

$$R = t_1 x_1\left(q_1, q_2, W, M\right) + t_2 x_2\left(q_1, q_2, W, M\right)$$

ここで政府が所与の歳入 R をこの個人から得る場合，できるだけ歪みを小さくする（できるだけこの個人の効用水準を高くする税率）を求めよう．この問題は，所与の歳入 R によって縛られる歳入式 $R = t_1 x_1\left(q_1, q_2, W, M\right) + t_2 x_2\left(q_1, q_2, W, M\right)$ を制約として，間接効用関数 $V(q_1, q_2, W, M)$ を最大化する t_i の値を特徴付ける問題となる．ここで，最適化問題に用いられるラグランジアン $\mathcal{L}$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= V\left(p_1 + t_1, p_2 + t_2, W, M\right) \\ &\quad + \lambda \cdot \left[t_1 x_1\left(p_1 + t_1, p_2 + t_2, W, M\right) + t_2 x_2\left(p_1 + t_1, p_2 + t_2, W, M\right) - R\right] \end{aligned}$$

となり，内点解を前提とすると，一階の条件は次のようになる．

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1} + \lambda \cdot \left(x_1 + t_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_1} + t_2 \frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right) = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2} + \lambda \cdot \left(x_2 + t_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_2} + t_2 \frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right) = 0$$

ここで，個人消費の最適化問題におけるラグランジアン未定乗数を α とすると，消費選択におけるラグランジアンは $\mathfrak{L} = U(x_1, x_2, l) + \alpha \cdot [W(H - l) - q_1 x_1 - q_2 x_2]$ となるため，内点解を前提とすると，その一階の条件は

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} - \alpha q_1 = 0, \ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2} - \alpha q_2 = 0$$

となる．また, 予算制約に需要関数を代入し, $WH - Wl\left(p_1 + t_1, p_2 + t_2, W, M\right) - q_1 x_1\left(p_1 + t_1, p_2 + t_2, W, M\right) - q_2 x_2\left(p_1 + t_1, p_2 + t_2, W, M\right) = 0$ を税率（t_1, t_2）に関して微分すると

$$0 = x_1 + q_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial x_2}{\partial q_1} + W \frac{\partial l}{\partial q_1}, \qquad 0 = x_2 + q_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_2} + q_2 \frac{\partial x_2}{\partial q_2} + W \frac{\partial l}{\partial q_2} \tag{1}$$

を得る．その一方で，間接効用関数を各税率に関して微分し，上記の，(a) 消費者の最適化問題からの一階の条件，および，(b) 予算制約の偏微分の結果を用いて整理すると，

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial q_k} = \alpha \cdot \left(q_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_k} + q_2 \frac{\partial x_2}{\partial q_k} + W \frac{\partial l}{\partial q_k}\right) = -\alpha x_k$$

となる．ここから，上記の政府の最適化問題の一階の条件は

$$\frac{\alpha}{\lambda} - 1 = \frac{t_1}{q_1}\left(\frac{q_1}{x_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right) + \frac{t_2}{x_1} \frac{\partial x_2}{\partial q_1}, \ \frac{\alpha}{\lambda} - 1 = \frac{t_1}{x_2} \frac{\partial x_1}{\partial q_2} + \frac{t_2}{q_2}\left(\frac{q_2}{x_2} \frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)$$

と再表記できる．ここで，第 k 財の価格が第 $j \neq k$ の需要に影響を与えないと仮定しよう．その場合，$\partial x_1 / \partial q_2 = \partial x_2 / \partial q_1 = 0$ となるから，上記の 2 つの式から

$$\frac{t_1}{q_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{q_1}{x_1}\right) = \frac{t_2}{q_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2} \frac{q_2}{x_2}\right)$$

を得る．括弧内は需要の価格弾力性なので当該弾力性が高い財ほど（t_i / q_i）で測った税率が小さくなる．つまり，ある財の需要が他の財の価格から独立であるならば，より価格弾力的な財により高い税を課すことが望ましいという結果が示される．

$\partial x_1/\partial q_2 = \partial x_2/\partial q_1 = 0$ とならない場合，以下のようになる．まず，スルツキー方程式

$$\frac{\partial x_j}{\partial q_k} = \frac{\partial x_j^c}{\partial q_k} - x_k \frac{\partial x_j}{\partial M}$$

を用いると，

$$\left(\frac{\alpha}{\lambda} - 1\right) x_k = \sum_j t_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} = \sum_j \left(t_j \frac{\partial x_j^c}{\partial q_k} - x_k t_j \frac{\partial x_j}{\partial M}\right) \Longrightarrow -\theta x_k = \sum_j t_j \frac{\partial x_j^c}{\partial q_k},\ j, k = 1, 2$$

を得る．ただし，

$$\theta \equiv 1 - \sum_j t_j \frac{\partial x_j}{\partial M} - \frac{\alpha}{\lambda}$$

であり，これは各財 k について同一の値をとるから，次の連立法的式体系を得る．

$$-\theta x_1 = t_1 \frac{\partial x_1^c}{\partial q_1} + t_2 \frac{\partial x_2^c}{\partial q_1},\ -\theta x_2 = t_1 \frac{\partial x_1^c}{\partial q_2} + t_2 \frac{\partial x_2^c}{\partial q_2}$$

これを t_1 と t_2 について解くと

$$t_1 = \frac{\theta}{\Delta}\left(\frac{\partial x_1^c}{\partial q_2} x_2 - \frac{\partial x_2^c}{\partial q_2} x_1\right) = \frac{x_1 x_2 \theta}{q_2 \Delta}\left(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{22}\right),\ t_2 = \frac{\theta}{\Delta}\left(\frac{\partial x_2^c}{\partial q_1} x_1 - \frac{\partial x_1^c}{\partial q_1} x_2\right) = \frac{x_1 x_2 \theta}{q_1 \Delta}\left(\varepsilon_{21} - \varepsilon_{11}\right)$$

を得る．ただし，$\Delta \equiv (\partial x_1^c/\partial q_1)(\partial x_2^c/\partial q_2) - (\partial x_2^c/\partial q_1)(\partial x_1^c/\partial q_2)$，および，$\varepsilon_{jk} \equiv (\partial x_j^c/\partial q_k)(q_k/x_j)$ である．これらをまとめると

$$\frac{t_1/q_1}{t_2/q_2} = \frac{\varepsilon_{12} - \varepsilon_{22}}{\varepsilon_{21} - \varepsilon_{11}}$$

となる．ここで次の最小化問題

$$\min_{x_1, x_2} q_1 x_1 + q_2 x_2 + Wl \quad \text{subject to } U = U(x_1, x_2, l)$$

を考え，δ をラグランジアン未定乗数とし，さらに，内点解を仮定すると，次の一階の条件を得る．

$$q_1 = \delta \frac{\partial U}{\partial x_1},\ q_2 = \delta \frac{\partial U}{\partial x_2},\ W = \delta \frac{\partial U}{\partial l},\ U = U(x_1, x_2, l)$$

ここから補償需要関数

$$x_1 = x_1^c\left(q_1, q_2, W, U\right),\ x_2 = x_2^c\left(q_1, q_2, W, U\right),\ l = l^c\left(q_1, q_2, W, U\right)$$

が導出され，これらを第 4 番目の一階の条件に代入すると

$$U = U[x_1^c\left(q_1, q_2, W, U\right), x_2^c\left(q_1, q_2, W, U\right), l^c\left(q_1, q_2, W, U\right)]$$

を得る．ここで効用水準 U は任意の値で固定されていることに注意して，これを $q_k (k = 1, 2)$ 関して偏微分し，上記の一階の条件を利用しながら整理すると

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^c}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^c}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial l}\frac{\partial l^c}{\partial q_k} = \frac{q_1}{\delta}\frac{\partial x_1^c}{\partial q_k} + \frac{q_2}{\delta}\frac{\partial x_2^c}{\partial q_k} + \frac{W}{\delta}\frac{\partial l^c}{\partial q_k}$$

を得る．さらに，上記の両辺に δ/x_k を乗じ，補償需要関数の特徴（$\partial x_j^c/\partial q_k = \partial x_k^c/\partial q_j, \partial l^c/\partial q_k = \partial x_k^c/\partial W$）を利用すると，

$$0 = \frac{q_1}{x_k}\frac{\partial x_k^c}{\partial q_1} + \frac{q_2}{x_k}\frac{\partial x_k^c}{\partial q_2} + \frac{W}{x_k}\frac{\partial x_k^c}{\partial W} = \frac{q_1}{x_k}\frac{\partial x_k^c}{\partial q_1} + \frac{q_2}{x_k}\frac{\partial x_k^c}{\partial q_2} + \frac{W}{x_k}\frac{\partial x_k^c}{\partial W} = \varepsilon_{k1} + \varepsilon_{k2} + \varepsilon_{kW}$$

となる（ただし，$\varepsilon_{kW} \equiv (\partial x_k^c/\partial W)(W/x_j)$）．したがって，ここから次の結果を得る．

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{1W} = 0 \Longrightarrow \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{11} - \varepsilon_{1W}$$
$$\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{2W} = 0 \Longrightarrow \varepsilon_{21} = -\varepsilon_{22} - \varepsilon_{2W}$$

これを上記の 2 つの税率を関係づける式に代入すると，

$$\frac{t_1/q_1}{t_2/q_2} = \frac{-(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \varepsilon_{1W}}{-(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \varepsilon_{2W}}$$

を得る．この式の右辺における分子と分母の違いは ε_{kW} だけである．$-(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) > 0$ であるから，$\varepsilon_{1W} > \varepsilon_{2W}$ ならば，$t_1/q_1 < t_2/q_2$ となる．ここで ε_{kW} は賃金率の変化に第 k 財の需要がどのように反応するかを表している．$\varepsilon_{kW} < 0$ ならば，賃金率が上昇すると，第 k 財の補償需要は余暇の補償需要と同様に減少する．この場合，賃金率の変化に反応して，第 k 財は余暇の変化と同様の動きをするため，当該財は余暇の補完財（complement）と言われる．一方，$\varepsilon_{kW} > 0$ ならば，賃金率が変化すると第 k 財の補償需要は増加する．限界代替率が逓減するならば，賃金率が上昇すると余暇の補償需要は必ず減少するから，第 k 財は余暇の補償需要とは反対の方向に変化する．ここから $\varepsilon_{kW} > 0$ ならば，第 k 財は余暇の代替財（substitutes）と呼ばれる．

以上より，所与の税額を特定の個人から徴収する場合，その個人の厚生損失を最低限に抑えるためには，賃金率（余暇価格）の変化に反応して，余暇と同方向（賃金の変化と反対方向）に変化する度合いが高い財，つまり，余暇とより補完的な関係にある財に対して，より高い税率を課すことが求められる．

問題 1　効用関数 $U = g(x_1) + h(x_2) + l$ を有する個人を考えよう（但し，$dg/dx_1 > 0, d^2g/(dx_1)^2 < 0, dh/dx_2 > 0, d^2h/(dx_2)^2 < 0$）．各消費財の生産者価格は外生的に固定されており，その単位は生産者価格が 1 になるように測られているとしよう．したがって，第 k 番目の財の従量税率を t_k とすれば，その消費者価格 q_k は $q_k = 1 + t_k$ となる．また，この消費者は H 単位の余暇を有しており，そこから h 単位働くことによって，h の所得を手に入れる．

(a) この個人の予算制約を書け．

(b) 余暇に課税が可能であるとしよう．所得税率を m とし，2 つの税率の組み合わせ（t_1, t_2, m）と（$\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{m}$）を考える．ここで $k = 1, 2$ に対して $1 + \bar{t}_k = c \cdot (1 + t_k)$ が，所得税率に対しては $1 - \bar{m} = c \cdot (1 - m)$ 成り立つならば（ただし，c は正の値をとる定数），この 2 つの組み合わせは同一の歳入をもたらすことを示しなさい．

(c) $m = 0$ として，この個人から R の歳入を徴収する場合を考えよう．その場合，この個人の厚生損失を最小にするような税率（t_1, t_2）はどのように特徴づけられるか．特に各財の所得弾力性との関係を明示しながら答えなさい．

問題 2　この個人から R の歳入を徴収する場合を考えよう．個人の効用関数が次の形態をとるときに，この個人にとって最適な税率構造を導出しなさい．（他の設定は本文中と同一）

$$U = \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2 + (1 - \alpha - \beta) \ln(H - h)$$

問題 3　次の効用関数を有した個人を考えよう．

$$U = \alpha \cdot \frac{x_1^{1-\eta_1}}{1-\eta_1} + \beta \frac{x_2^{1-\eta_2}}{1-\eta_2} - \gamma h$$

(a) この効用関数を用いると，所得効果と交叉価格効果はともにゼロであることを示しなさい．

(b)$\eta_k > 0$ と仮定して，ラムゼイの課税問題における最適な税率構造を特徴づけなさい．