Mechanics

～　高校物理から物理学へ　～

東京大学

2011 年度夏学期　力学 A

目次

まえがき

このプリントは、2011 年度夏学期金曜 1 限、大川祐司教官担当の力学 A の講義ノートを基本として作ったものです。編集上の都合で板書とは違う番号の振り方になってるところもあります。
作者があんまり授業に出ていないので教官の考え通りの解釈をしているわけではないところもあったりしますが、そこは大目に見てください。

これ分からないとかいう質問があれば sumphy@live.jp というアドレスを取ったのでここに連絡をください。

このプリントを作るにあたって参考にした図書や web サイトを紹介しておきます

2009 年度版「力学」　青山秀明著　学術図書出版社発行
演習 「ベクトル解析」　サイエンス社出版

物理のかぎしっぽ　http://hooktail.sub.jp/index.html
EMAN の物理学　http://homepage2.nifty.com/eman/index.html
For Unlawful Colonel Knowledge 「よくわかる慣性モーメント」
http://kagennotuki.sakura.ne.jp/moi/index.html

§1　質点の1次元的な運動

§1.1　運動方程式

・<u>速度、加速度</u>

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\frac{dx(t)}{dt}$$
$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\frac{d^2(t)}{dt^2}$$

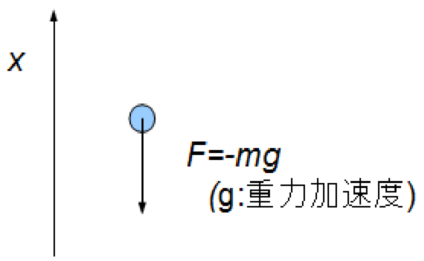
・<u>Newtonの運動方程式</u>(Newtonの運動の第二法則)

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=F\left(x(t),\frac{dx(t)}{dt},t\right)$$

（m:慣性質量　F:力）

力の法則から運動を決定する方程式

<u>例1　　自由落下運動</u>



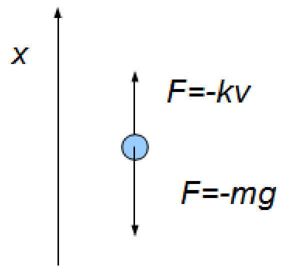
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-mg$$
$$\frac{d\,v(t)}{dt}=-g$$

$$v(t)=-g\,t+v_0 \qquad (v_0:\text{任意定数})$$
$$\frac{d\,x(t)}{dt}=-g\,t+v_0$$

$$x(t)=-\frac{1}{2}g\,t+v_0t+x_0 \qquad (x_0:\text{任意定数})$$

※一般にn階の常微分方程式(変数が1つの微分方程式)の一般解はn個の任意定数を含む。

例 2　速度に比例する抵抗がある場合



(κ は抵抗を表す係数)

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg-\kappa\frac{dx(t)}{dt}$$

この式を変形して、変数分離系の微分方程式に持ち込めるよう、

$$\frac{1}{v(t)+\frac{mg}{\kappa}}\frac{dv(t)}{dt}=-\frac{\kappa}{m}$$ …この変形は重要！

と変形し、両辺を t で積分して

$$\int\frac{1}{v+\frac{mg}{\kappa}}dv=\int-\frac{\kappa}{m}dt$$

を得る。さらにこれを計算して

$$v(t)=-\frac{mg}{\kappa}+Ce^{-\frac{\kappa}{m}t}\qquad(C:任意定数)$$

$$x(t)=-\frac{mg}{\kappa}t+Ae^{-\frac{\kappa}{m}t}+B\qquad(A,B:任意定数)$$

となる。

時間を∞に取ると、速度は $-\frac{mg}{\kappa}$ で一定となる。

例 3　単振動（調和振動）

$$F=-kx\qquad(kはバネ定数)$$

運動方程式を用いて微分形に変形させると

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-kx(t)$$

この式の一般解は次の式で表される。

$$x(t)=A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\theta_0\right)\qquad(A,\theta_0:任意定数)$$

バネの運動の場合、A は振幅、 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ は角速度、 θ_0 は初期位相にそれぞれ対応する。

§1.2　エネルギー

・運動エネルギー

$$T \equiv \frac{1}{2} m \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2$$

と定義されるエネルギーが運動エネルギーである。
運動エネルギーの時間変化は、T を t で微分すると得られ

$$\frac{dT}{dt} = m \frac{dx(t)}{dt} \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{dx(t)}{dt} \cdot F\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}, t\right) \quad \cdots ①$$

と、運動方程式を用いた形で表現することもできる。

運動エネルギーの時間に伴う変化は、①式を時間について積分することで分かる。
以下に、運動エネルギーの変化で重要な 2 つの場合を挙げておく。

・力 F が時間にかかわらず一定のとき
　このとき、F の変化は力×距離で表される。

・力 F が位置 x(t)のみで決定されるとき
　このとき、①式を時間について積分すると

$$\int_{t_A}^{t_B} F(x(t)) \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} F(x(t)) dx(t) = F(x(t_B)) - F(x(t_A))$$

となり、運動エネルギーの変化は始点と終点だけで決定される。
このように、力のする仕事が始点と終点の位置だけで決まり、途中の経路によらない
ような力を保存力という。

> *保存力*
>
> 力のする仕事が、始点と終点の位置だけで決まり、途中の経路やその他の状態に依存しないような力を保存力と呼ぶ。
>
> その力のする仕事は、位置の関数となる。

保存力は、その仕事が位置のみによって決定するという性質から、以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} T(x_B) - T(x_A) &= \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_B} F(x) dx - \int_{x_0}^{x_A} F(x) dx \qquad (x_0 : \text{任意定数}) \end{aligned}$$

この性質から、保存力だけが働いている場合、任意の点を基準にして、複数の位置の
位置エネルギーを比較してよいことが分かる。

この任意の点を基準にして測った位置エネルギーがポテンシャルエネルギーであり、

$$U \stackrel{\text{def}}{=} -\int_{x_0}^{x} F(y) dy \qquad (x_0 : \text{基準となる位置を表す定数})$$

という式でポテンシャルエネルギーは与えられる。

また、 $F(x)=\dfrac{-dU(x)}{dx}$ という関係式が成り立つ。

保存力において E=U+T で与えられるエネルギー E は時間に依らず、保存する。

E が保存するということは、E を時間微分することで確認できる。

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt}&=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2+U(x(t))\right]\\&=m\frac{dx(t)}{dt}\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{dU(x(t))}{dx}\cdot\frac{dx(t)}{dt}\\&=\frac{dx(t)}{dt}\left[m\frac{d^2x(t)}{dt^2}-F(x(t))\right]=0\end{aligned}$$

自由落下において、E は $E=\frac{1}{2}mv^2+mgx_0+U_0$ （x_0: 高さ U_0: 定数）

単振動において、E は $E=\frac{1}{2}kA^2+U_0$ （A: 振幅 U_0: 定数）

で与えられることを各自確認しておいてほしい。

・エネルギー保存則を用いた運動方程式の解法

運動方程式を解くということは物体の運動を決定するということである。
実際、§1.1 の例においては、いずれも x(t)解として求めている。
そこで、先ほど考えた E というものに注目してみよう。F が保存力の場合、E は時間に関わらず一定値をとる、というのは先に説明した。ここで、E を記号を使わずに数式で表記してみると、

$$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2+U(x(t))$$

と表すことができる。E が定数であるということを考えると、この式をうまく積分してやれば x(t)を求めることがなんとなく分かる。
それではどのようにすれば x(t)を求められるのだろう？
以下にその手順を示しておく。

① まず dt が邪魔なので、時間積分できるような形に変形させる。

$$\frac{dx(t)}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E-U(x(t))}\quad\cdots\text{変数分離形}$$

② 時間積分できる形になったら、時間積分をする。

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{E-U(x(t'))}}\frac{dx(t')}{dt'}dt'=\pm\int_{t_0}^{t}dt'$$

このとき、左辺は最終的には以下の式のように x についての積分になることに注意。

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x(t)}\frac{1}{\sqrt{E-U(x)}}dx'=\pm\int_{t_0}^{t}dt'\quad\cdots※$$

U(x)が x の関数であることを考慮すると、最終式から x(t)の逆関数が求まる。

ここで、 E, x_0, t_0 のうち、独立な任意定数は 2 つだけであることに注意しておきたい。この 3 つの変数は、初期状態におけるエネルギー保存則(E=T+U)において関連付けられているからである。

自由落下と単振動において、実際のこの方法で物体の運動を求めてみよう。

・自由落下

ポテンシャルエネルギーは
$U(x)=mgx$
で与えられるので、これを※の式に代入してみると、左辺は

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{1}{\sqrt{E-mgx}}dx = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{2}{mg}\sqrt{E-mgx}+C \qquad (C:\text{任意定数})$$

となり、右辺も合わせて計算すると

$$-\sqrt{\frac{2}{m}}\frac{1}{g}\sqrt{E-mgx}=\pm(t-t_0)$$

が得られ、これを整理すると

$$E-mgx=\frac{1}{2}mg^2(t-t_0)^2$$

より、x を時間の関数とみなし、x(t)と表記すると

$$x(t)=-\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+\frac{E}{mg}$$ が得られる。

・単振動

ポテンシャルエネルギーは
$U(x)=\frac{1}{2}kx^2$
で与えられるので。これを用いて左辺を計算すると

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{1}{\sqrt{E-\frac{1}{2}kx^2}}dx$$

という計算を行う必要がある。
先に答えを示しておくと、上の積分の結果は
$\sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin\sqrt{\frac{k}{2E}}$
となり、x(t)は
$x(t)=\sqrt{\frac{2E}{k}}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\theta_0)$
となる。

次ページに計算方法を示しておくが、面倒くさいという人は答えだけでも構わない。
さすがにこれを求めさせる計算は試験では出題されないと思う。

※単振動の運動の計算

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{1}{\sqrt{E-\frac{1}{2}kx^2}}dx \quad \cdots(\mathrm{A})$$

sin の逆関数 arcsin を導入する。

$$y=arcsinx \Leftrightarrow siny=x$$
$$(-1\leq x\leq 1 \quad -\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2})$$

例

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\rightarrow\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$$

arcsin について、以下の式が成り立つ

$$\arcsin(\sin y)=y$$

よって、x を y の関数　$x(y)=\sin y$　で定めると

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x(y))\frac{dx}{dy}=1$$

が成り立ち、ここから

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x(y))=\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

が導かれる。よって

$$\frac{d}{dx}(\arcsin ax)=\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$$

となる。これが使えるように(A)式を変形させると

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{1}{\sqrt{E-\frac{1}{2}kx^2}}dx = \sqrt{\frac{m}{2E}}\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k}{2E}x^2}}dx$$
$$= \sqrt{\frac{m}{k}}\int\frac{\frac{k}{2E}}{\sqrt{1-\frac{k}{2E}x^2}}dx$$
$$= \sqrt{\frac{m}{k}}\ \arcsin\sqrt{\frac{k}{2E}}x+C$$

が得られる。※とあわせて

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin\sqrt{\frac{k}{2E}}x = \pm(t-t_0)$$

となり、これを x について解くことで次の解が得られる。(arcsin の定義を用いる)

$$x(t)=\sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)\right) = \sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\theta_0\right)$$

§1.3 減衰振動

ここから高校物理では(おそらく)扱わなかった運動に入る。
減衰振動とは何か？バネを引っ張った時の運動を想像してもらえればそれでよい。
物体は振動しているのだが、だんだんとその振幅が小さくなっていく運動である。
複雑な式が必要では？ と思うかもしれないが、運動方程式は難しいものではない。
単振動の運動方程式に抵抗を表す項が加わっただけである。具体的には以下のようになる

$$F=-kx-\mu v$$

これを運動方程式を用いて整理し、微分形式で表示すると、

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\mu\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=0 \quad \cdots(\mathrm{a})$$

となる。以下ではこの(a)式を解いていくことを考える。

(a)の式は定数係数の 2 階線形同次常微分方程式である。(詳しいことは別プリント参照)
つまり、2 階線形同次常微分方程式が解ければ、減衰振動は解けたも同然である。
数学的に詳しいことは置いておいて、ここでは解を求めることだけに注力しよう。

ではどのようにすれば解が求められるのか？
線形微分方程式には以下のような性質が成り立つので、これを使うことを目標にする。

> n 階の線形微分方程式 $y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=0 \quad \cdots$※
> は n 個の 1 次独立な解 $y_1(x), y_2(x)\ldots c_n(x)$ を持ち、※の一般解は、その一次結合
> $C_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)$ として表される。

① $x(t)=e^{\lambda t}$ を代入する

すると、(a)式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}e^{\lambda t}+\mu\frac{d}{dt}e^{\lambda t}+ke^{\lambda t}=0$$

となり、これを計算すると

$$(m\lambda^2+\mu\lambda+k)e^{\lambda t}=0$$

すなわち

$$m\lambda^2+\mu\lambda+k=0 \quad \cdots(\mathrm{b})$$

を得る。

②場合分けをする

(1) $\mu^2-4\mathrm{mk}>0$ のとき

このとき、(b)の解が 2 つ存在し、 $\lambda=-\frac{\mu}{2\mathrm{m}}\pm\frac{\sqrt{\mu^2-4\mathrm{mk}}}{2\mathrm{m}}$ であり、

一般解は $x(t)=C_1e^{-r_1t}+C_2e^{-r_2t}$ $(C1, C2:$任意定数$)$

$$r_1=\frac{\mu}{2\mathrm{m}}+\frac{\sqrt{\mu^2-4\mathrm{km}}}{2\mathrm{m}} \quad , \quad r_2=\frac{\mu}{2\mathrm{m}}-\frac{\sqrt{\mu^2-4\mathrm{km}}}{2\mathrm{m}}$$

である。
この場合、減衰の効果が大きすぎて振動できないため、過減衰と呼ばれる。

(2) $\mu^2-4\mathrm{km}=0$ のとき

このとき、(b)の解は重解であり、解が一次独立でないため、先ほどの方法だけでは一般解を求めることができない。

そこで、二次方程式で得られた $x(t)=Ce^{-\frac{\mu}{2\mathrm{m}}t}$ を用いてもう一つの解を探す。

定数変化法という手法で一般解を求めることにする。
この方法の数学的な解説は別プリントに譲るとして、ここではその方法を用いて一般解を求めることにしよう。

$x(t)=C(t)e^{-\frac{\mu}{2\mathrm{m}}t}$ とおくと

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{dc(t)}{dt}\cdot e^{-\frac{\mu}{2\mathrm{m}}t}-\frac{\mu}{2\mathrm{m}}C(t)e^{-\frac{\mu}{2\mathrm{m}}t}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{d^2c(t)}{dt^2}\cdot e^{-\frac{\mu}{2\mathrm{m}}t}-\frac{\mu}{m}\frac{dc(t)}{dt}e^{-\frac{\mu}{2\mathrm{m}}t}+\frac{\mu^2}{4\mathrm{m}^2}C(t)e^{-\frac{\mu}{2\mathrm{m}}t}$$

が得られ、これを(a)の式に代入する。すると

$$[m\cdot\frac{d^2c(t)}{dt^2}-\mu\frac{dC(t)}{dt}+\frac{\mu^2}{4\mathrm{m}}C(t)+\mu\frac{dC(t)}{dt}-\frac{\mu^2}{2\mathrm{m}}C(t)+kC(t)]e^{-\frac{\mu}{2\mathrm{m}}t}=0$$

となり、これを整理して

$$m\cdot\frac{d^2c(t)}{dt^2}-\frac{\mu^2-4\mathrm{mk}}{4\mathrm{m}}C(t)=0$$

が成り立てばよいことが分かる。ここで、条件から

$$\frac{\mu^2-4\mathrm{mk}}{4\mathrm{m}}=0$$

であるから

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2}=C_1+C_2t \qquad (C_{1,}C_2:任意定数)$$

が成り立てばよいことがわかり、、一般解は

$$x(t)=C_1e^{-\frac{\mu}{2\mathrm{m}}t}+C_2te^{-\frac{\mu}{2\mathrm{m}}t}$$

となる。
この状態では、物体は振動するか振動しないかの境目にあるので、この状態の運動は臨界減衰と呼ばれる。

(3)　$\mu^2-4\mathrm{mk}<0$　とのき

このとき、λは複素数となり、複素数の指数関数が得られる。

ここで登場するのが、かの有名なオイラーの公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

である。これを用いることで

$$e^{(a+ib)}t=e^{at}(\cos bt+i\sin bt)$$

と表示することができる。これを用いることで、x(t)が

$$x(t)=e^{-\frac{\mu}{2\mathrm{m}}\pm i\frac{\sqrt{4\mathrm{mk}-\mu^2}}{2\mathrm{m}}t}$$

$$=e^{-\frac{\mu}{2\mathrm{m}}}(\cos\frac{\sqrt{4\mathrm{mk}-\mu^2}}{sm}t\ \pm\ i\sin\frac{\sqrt{4\mathrm{mk}-\mu^2}}{2\mathrm{m}}t)$$

であることが求められる。

ここで一つ疑問が生じる。x(t)が複素数ならば、解は何になるのだろう？

例によって詳しい解説は別プリントに譲るとして、ここはその答えだけを記しておく。

((a)の式に代入すれば簡単に示すことができる)

x(t)=X'(t)+iX"(t)であるとき、X'(t),X"(t)が一次独立であればそれぞれが解となる。

この結果を用いると、一般解は

$$x(t)=C_1e^{-rt}\sin\omega t+C_2e^{-rt}\cos\omega t$$

$$\left(r=\frac{\mu}{2\mathrm{m}},\omega=\frac{\sqrt{4\mathrm{mk}-\mu^2}}{2\mathrm{m}}\right)$$

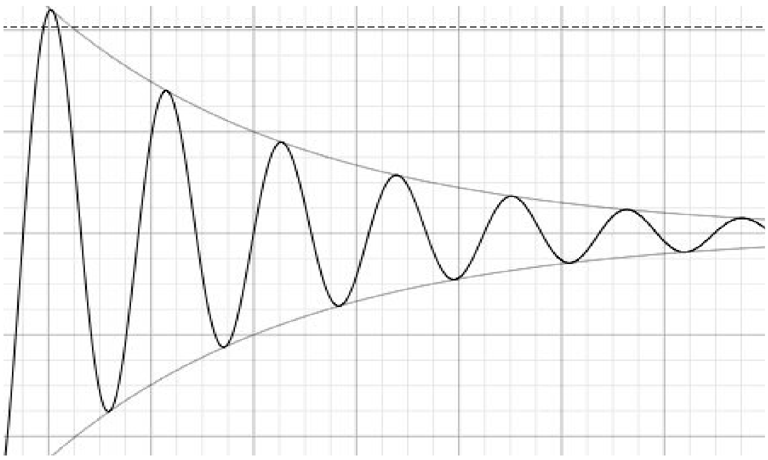
または

$$x(t)=Ae^{-rt}\sin(\omega t+\theta_0)$$

$$=Ae^{\frac{-\mu}{2\mathrm{m}}t}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mathrm{mk}-\mu^2}}{2\mathrm{m}}+\theta_0\right)\qquad(A,\theta_0\text{:任意定数})$$

となる。

減衰振動のグラフは以下のようになることを、参考のために示しておく。



§2　質点の3次元空間内での運動

§2.1　運動方程式

質点の位置を $(x(t), y(t), z(t))$ と記述し、注釈のない限りデカルト座標で表記する。
3次元空間においても、独立な方向に運動方程式はそれぞれ成立する。

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=F_x$$
$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}=F_y$$
$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2}=F_z$$

一般に F_x, F_y, F_z はそれぞれ $x(t), \frac{dx(t)}{dt}, y(t), \frac{dy(t)}{dt}, z(t), \frac{dx(t)}{dt}, t$ に依存している。
質点の状態は、ある時点での、上に示した6個の初期条件により定まる。
その後の質点の位置は、Newtonの運動方程式を解くことで得られる。

ここで、Newtonの運動方程式をベクトルを用いた形で表記しておく。
こちらのほうが本来の運動方程式の持つ意味を記述できている形である。

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}=\vec{F}\left(\vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, t\right)$$

ここで、これ以降よく使うベクトル、記号について説明しておく。

$\vec{r}(t)=(x(t), y(t), z(t))$ …位置ベクトル

$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)$ …速度ベクトル

$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}=\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2}\right)$ …加速度ベクトル

$\vec{F}=(F_x, F_y, F_z)$ …力のベクトル

回転行列は極座標を用いるときによく使うが、いちいち行列表記するのが大変なので、

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

と表記することにする。筆者の高校時代からの習慣で、あまり見慣れない表記かもしれないが、
そこのところは勘弁してもらいたい。

例 1　自由落下

$\vec{F}=(0,0,-mg)$

$x(t)=v_{x_0}t+x_0$
$y(t)=v_{y_0}t+y_0$
$z(t)=v_{z_0}t+z_0$

$\vec{r}_o=(x_{0,}y_{0,}z_0)$
$\vec{v}_0=(v_{x_0},v_{y_0},v_{z_0})$ …6 個の任意定数（初期条件）

自由落下する物体の軌道を求める。
$v_{y_0}=0$ となるように座標系を設定すると、 $v_y(t)=y_0$ で一定値をとる。
この条件下で $x(t),z(t)$ から t を消去する。

$$t=\frac{x-x_0}{v_{x_0}}$$
$$z=-\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x_0}{}^2}(x-x_0)^2+\frac{v_{z_0}}{v_{x_0}}(x-x_0)+z_0$$

が得られる。

例 2　平面内の等速円運動

$x(t)=Acos\,\omega\,t$
$y(t)=A\sin\omega t$
$z(t)=0$

速度
$$\frac{dx(t)}{dt}=-A\omega\sin\omega\,t$$
$$\frac{dy(t)}{dt}=A\omega\cos\omega\,t$$
$$\frac{dz(t)}{dt}=0$$

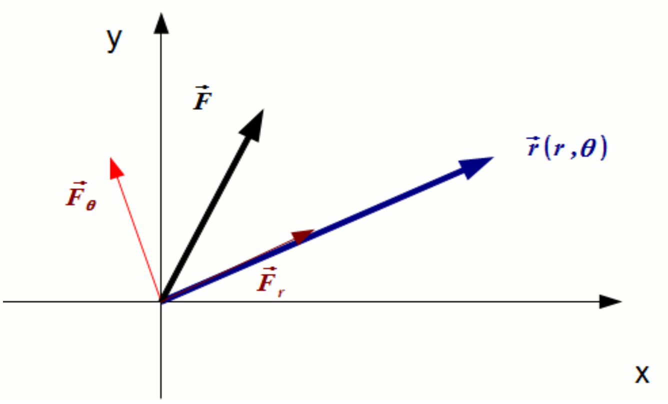
加速度
$$\frac{d^2x(t)}{dt}=-A\omega^2\cos\omega\,t$$
$$\frac{d^2y(t)}{dt}=-A\omega^2\sin\omega\,t$$
$$\frac{d^2z(t)}{dt}=0$$

$\vec{F}=-m\omega^2\vec{r}$ という向心力が働いているときに角速度 ω の等速円運動が可能。
このとき、 $\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t)=0\Leftrightarrow\vec{r}(t)\perp\vec{v}(t)$ が成立する。

§2.2　2 次元の極座標

ここでは、極座標系式での運動方程式を導くことを目標にする。
デカルト座標での運動方程式（今まで使ってきた方程式）で十分じゃないか、と思うかもしれないが、場合によってはこちらで考えたほうが便利なことも多々あるので（必要が無かったら作られない）、こちらの式の方もしっかり理解してもらいたい。
理解なんていいから手っ取り早く点に結び付けたい、という人のために先に答えだけ書いておく。

> 2 次元極座標での運動方程式
>
> 動径方向の力を F_r 、動径に垂直な方向の力を F_θ とすると、
>
> $$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r$$
> $$m(2\dot{r}\dot{\theta}-r\ddot{\theta})=F_\theta$$



参考図は上のようになる。今までは力を x 軸方向と y 軸方向とに分けて考えてきたが、今回は上の図の 2 本の赤い矢印の方向に分けて考えてみようということである。

$\vec{A}=A_r\vec{e}_r+A_\theta\vec{e}_\theta\ =A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y$ について、 $\begin{pmatrix}A_r\\A_\theta\end{pmatrix}=R(\theta)\begin{pmatrix}A_x\\A_y\end{pmatrix}$ が成り立つことに注意して、

実際に極座標での運動方程式を求めてみよう。
速度について

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=(\dot{x},\dot{y})$$
$$\frac{d\vec{r}}{dt}=v_r\vec{e}_r+v_\theta\vec{e}_\theta$$

の関係が成り立つ。ここで、極座標で成り立つ関係式

$$\begin{matrix}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{matrix}\quad\cdots\text{(a)}$$

を用いると

$$\dot{x}=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\dot{y}=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta$$

が得られ（r と θ は時間に関する関数であることに注意）、これを用いて

$$\begin{pmatrix}v_r\\v_\theta\end{pmatrix}=R(-\theta)\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{r}\\r\dot{\theta}\end{pmatrix}$$

が導出される。

加速度について、速度と同様にして

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2}\right)=(\ddot{x},\ddot{y})$$
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=a_r\vec{e}_r+a_\theta\vec{e}_\theta$$

が導かれ、(a)の式から

$$\ddot{x}=\ddot{r}\cos\theta-2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta-r\ddot{\theta}\sin\theta-r\dot{\theta}^2\cos\theta$$
$$\ddot{y}=\ddot{r}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta-r\ddot{\theta}\cos\theta-r\dot{\theta}^2\sin\theta$$

が得られる。これを用いて

$$\begin{pmatrix}a_r\\a_\theta\end{pmatrix}=R(-\theta)\begin{pmatrix}\ddot{x}\\\ddot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\\2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\end{pmatrix}$$

が導かれる。

力について

$$\vec{F}=F_r\vec{e}_r+F_\theta\vec{e}_\theta$$

が成り立つので

$$\begin{matrix}ma_r=F_r\\ma_\theta=F_\theta\end{matrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{matrix}m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r\\m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=F_\theta\end{matrix}$$

となる。

※注

$\ddot{r}=0$ でも、一般には $a_r\neq0$ である。

（ $\dfrac{a_r}{m}=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$ であるため）

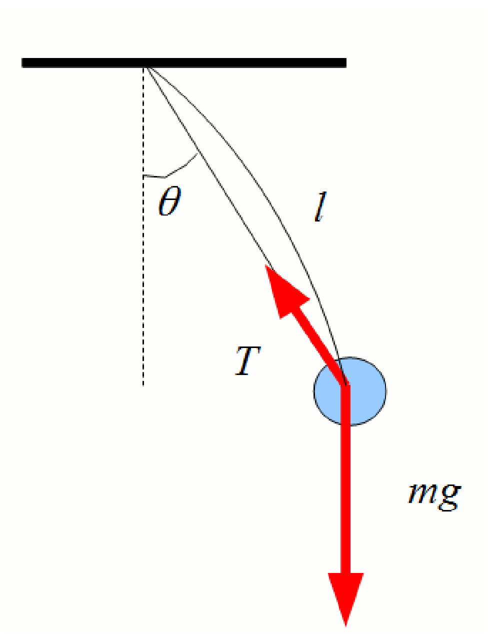
例　等速円運動

r は一定値⇒ $\dot{r}=0,\ddot{r}=0$

しかし、 $a_r\neq0$

授業でも扱ったが、以下に極座標での運動方程式を用いた例を記しておく。

例　単振り子



この状態において

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=mg\cos\theta-T$$
$$m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=-mg\sin\theta$$
$$r=l$$

の 3 式が成り立つ。(張力 T は拘束条件　$r=l$　を保つための拘束力)
$r=l$　から　$\dot{r}=0,\ddot{r}=0$　が得られるので、これを用いて、

$$-ml\dot{\theta}^2=mg\cos\theta-T$$
$$ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta \quad\Leftrightarrow\quad \ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta$$

が導かれる。
$\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta$　から　$\theta(t)$　が決定され、張力 T は

$$T(t)=mg\cos\theta(t)+ml\theta(t)^2$$

で与えられる。
揺れが小さいとき　$(\theta\ll1)$　、　$\sin\theta\approx\theta$　であるので、

$$\ddot{\theta}\approx-\frac{g}{l}\theta$$

となり、振り子は振幅によらず周期　$2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$　の単振動をする。(振り子の等時性)

sin の近似をしているのは、近似しない場合には楕円積分という手法が必要になるからである。
この方法はまだ高校卒業したばかりの、1 年次の我々が扱うには難しすぎるので、便宜上
近似して解いているのである。

§2.3 仕事

・運動エネルギー

3 次元での運動エネルギーも、§1.2 で扱ったものと同様に定義される

$$T \equiv \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2\right) = \frac{1}{2}m\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|^2$$

時間変化は、T を t で微分して得られ

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= m\left[\frac{dx(t)}{dt}\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dz(t)}{dt}\frac{d^2z(t)}{dt^2}\right]\\ &= m\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\\ &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\cdot\vec{F}\left(\vec{r}(t),\frac{d\vec{r}(t)}{dt},t\right)\end{aligned}$$

が成り立つ。

ここで、 $t_a \to t_b$ での運動エネルギーの変化を考えてみよう。

前回と同じように、この変化は微小時間での変化を時間で積分することで得られる。

$$\begin{aligned}T(t_b)-T(t_a) &= \int_{t_a}^{t_b}\frac{dT(t)}{dt}dt\\ &= \int_{t_a}^{t_b}\vec{F}\left(\vec{r}(t),\frac{d\vec{r}(t)}{dt},t\right)\cdot\frac{d\vec{r}(t)}{dt}dt\end{aligned}$$

ではこれを実際に計算してみよう。

・ $\vec{F}$ が一定のとき

$$\int_{t_a}^{t_b}\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}(t)}{dt}dt = \vec{F}\cdot(\vec{r}(t_b)-\vec{r}(t_a))$$

・力 $\vec{F}$ が $\vec{r}(t)$ で決定するとき($\frac{d\vec{r}(t)}{dt}, t$ には依存しない場合)

この場合の運動エネルギーの変化はどのようにして求められるだろうか？

力は経路によって変化するので、前のように単純に時間で積分することはできない。

ここで導入されるのが、線積分という概念である。線積分とは、ある経路に沿って関数を積分計算する方法である。これを使うことで、この運動エネルギーの変化が計算できる。

しかし、ここでもう一つ問題がある。それは、この力 $\vec{F}$ がベクトルであることだ。

(このように、1 点を指定することによってベクトルが決定される場をベクトル場という。)

1 次元的な運動では、向きは符号で判別できるので、スカラー場で考えてよく、力 F もスカラー関数であったが、3 次元空間においては向きという要素も重要になるので、力はベクトルで表現するようになる。このようなベクトル関数を線積分するには

$$\int_c \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \qquad (\ c\text{は積分経路を表す})$$

とベクトル関数と微小経路の内積をとって積分することになる。

以降の詳しい解説や、線積分の演習は別プリント参照ということにしておく。

この線積分を用いると、この場合のエネルギー変化、すなわち仕事は次のように表される。

$$\int_{t_a}^{t_b}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}(t)}{dt}dt = \int_c \vec{F}(\vec{r}(t)\cdot d\vec{r})$$

§2.4 エネルギー

力 $\vec{F}$ が $\vec{r}(t)$ のみで決まる場合の仕事は、前節で導いたとおり、

$$\int_c \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

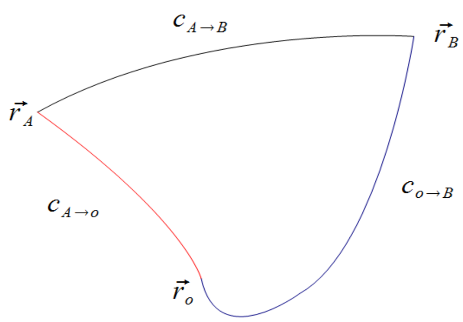
で表されるが、この値が始点と終点の位置だけで決定され、途中の経路によらない場合、この力 $\vec{F}$ を保存力と呼ぶ。

さて、前に保存力を扱ったときと同様に、保存力に対してポテンシャル $U(\vec{r})$ を定義しよう。

$$U(\vec{r})=\int_c \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \qquad (c:任意の\,\vec{r}_0\,から\,\vec{r}\,への任意の経路)$$

このとき、 $\vec{r}_0$ のとり方を変えると、 $U(\vec{r})$ は定数だけ変化することを注意しておく。
この $U(\vec{r})$ はスカラー関数であり、 $U(\vec{r})$ には以下の性質が成り立つ。

異なる 3 点 $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_o$ と、それぞれを結ぶ 3 経路 $c_{A\to B}, c_{o\to A}, c_{o\to B}$ を設定する。



このとき

$$\int_{c_{o\to A}} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}+\int_{c_{A\to B}} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \ =\int_{c_{o\to B}} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

すなわち

$$\int_{c_{A\to B}} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \ =-U(\vec{r}_B)+U(\vec{r}_A)$$

が成り立つ。

保存力のもとでの運動エネルギーの変化が、 $\int_c \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ で与えられることを考えると、
時刻 t_A で物体が位置 $\vec{r}_A$ に、時刻 t_B に位置 $\vec{r}_B$ にあるとすると

$$T(t_A)-T(t_B) \ =\int_c \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \ =-U(\vec{r}_B)+U(\vec{r}_A)$$

すなわち

$$T(t_B)+U(\vec{r}_B)=T(t_A)+U(\vec{r}_A)$$

が成り立ち、これは E=T+U が保存すること以外に他ならない。

> $\vec{F}$ が保存力のとき、ポテンシャル $U(\vec{r})$ が定義でき、
>
> $$E=\frac{1}{2}m\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|^2+U(\vec{r}(t))$$
>
> で与えられるエネルギー E は保存する。

・ $U(\vec{r})$ から $\vec{F}(\vec{r})$ を求める方法

$\vec{F}(\vec{r})$ から $U(\vec{r})$ を求めるのは線積分で求めることができたが、この逆は可能だろうか？
積分計算ので両者が関係付けられている以上、もちろん微分で求めることは可能である。
1 次元運動の場合 $U(x)=-\int_{x_0}^{x} F(y)dy$ であったため、 $F(x)=-\dfrac{dU(x)}{dx}$ が成立した。
しかし、今回はそう簡単にはいかない。 $\vec{r}=(x,y,z)$ なので、U は 3 変数関数だからである。
そこで、偏微分を用いる。偏微分については他の教科でも扱っているので説明は不要だろう。
まず、x 方向の微小変化 Δx に対して、

$$
\begin{aligned}
U(x+\Delta x,y,z)-U(x,y,z) &= -\int_{x}^{x+\Delta x} F_x(x',y,z)dx' \\
&\simeq -F_x(x,y,z)\Delta x
\end{aligned}
$$

が成り立つ。
これは、 $\vec{r}$ のうち、y と z を固定することで、近似的に x 方向だけに保存力が作用しているように考えることができ、x 方向の保存力 F_x が求められるという考え方である。
これを偏微分を用いて表記すると

$$F_x(x,y,z)=-\lim_{x\to 0}\frac{U(x+\Delta x,y,z)-U(x,y,z)}{\Delta x}=-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}$$

が成り立つ。同様に

$$F_y(x,y,z)=-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}$$
$$F_z(x,y,z)=-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}$$

が成り立つ。
ここで、演算子 ∇ を導入する。この ∇ は、スカラー場 $\phi(\vec{r})$ に作用して

$$\nabla\phi(\vec{r})\equiv\left(\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x},\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y},\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right)$$

というベクトルを作る。($\nabla\phi$ は $grad\,\phi$ とも書くことがある。)
これを用いると、 $\vec{F}$ と $U(\vec{r})$ の関係は

$$\vec{F}(\vec{r})=-\nabla U(\vec{r})$$

と書くことができる。

さて、ここまでは $\vec{F}$ が保存力のとき、 $\vec{F}(\vec{r})=-\nabla U(\vec{r})$ が成り立つ、ということを導いてきた。
逆に、 $\vec{F}(\vec{r})=-\nabla U(\vec{r})$ が成り立つときに、力 $\vec{F}$ は保存力であるということは言えるのか？
結論を言うと、これは成り立つ。つまり、 $\vec{F}$ が保存力であるということと、 $\vec{F}(\vec{r})=-\nabla U(\vec{r})$ が成り立つということは同値である。

$$\boxed{\vec{F}\text{ が保存力} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}(\vec{r})=-\nabla U(\vec{r})}$$

次ページにその証明を載せておいたが、急ぐ人は無視しても構わない。
また、エネルギー保存則が成り立つことを上の内容を用いて示したものも、次のページに載せておいたが、これも急ぐ人は無視して構わない。

・ $\vec{F}$ が保存力⇔ $\vec{F}(\vec{r})=-\nabla U(\vec{r})$ であることの証明

3 変数のスカラー関数 $f(x(t), y(t), z(t))$ について、3 変数が t の関数である場合

$$\frac{d f(x(t), y(t), z(t))}{dt}=\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\cdot\frac{dx(t)}{dt}+\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\cdot\frac{dy(t)}{dt}+\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\cdot\frac{dz(t)}{dt}$$

が成り立ち（証明は省略する）、これは

$$\frac{d f(\vec{r}(t))}{dt}=\nabla f(\vec{r})\cdot\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

と表記できる。

さて、力 $\vec{F}$ をその経路 c に沿って積分してみよう。

$$\begin{aligned}\int_c \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} &=\int_{S_a}^{S_b}\vec{F}(\vec{r}(s))\cdot\frac{d\vec{r}(s)}{ds}ds\\ &=\int_{S_a}^{S_b}\nabla U(\vec{r}(s))\cdot\frac{d\vec{r}(s)}{ds}ds\\ &=-\int_{S_a}^{S_b}\frac{dU(\vec{r}(s))}{ds}ds\\ &=-U(\vec{r}(S_b))+U(\vec{r}(S_a))\\ &=-U(\vec{r}_b)+U(\vec{r}_a)\end{aligned}$$

より、この計算結果は途中の経路 c によらず、始点と終点の位置で決定されることが分かる。すなわり、力 $\vec{F}$ は保存力である。

・エネルギー保存則の確認

E=T+U を数式を用いて表現すると

$$E=\frac{1}{2}m\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|^2+U(\vec{r}(t))$$

これを時間微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt}&=m\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}+\nabla U(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\\ &=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}[m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}-\vec{F}(\vec{r}(t))]\\ &=0\end{aligned}$$

となり、E が保存することが分かる。

・ポテンシャルと力

2 次元

このとき、ポテンシャルの等しい点を結んだものは等ポテンシャル線となる。

保存力を x 軸方向と y 軸方向に分割したとき、互いに独立して考えることができる。

保存力 $\vec{F}(x,y)=\left(-\frac{\partial U(x,y)}{\partial x},-\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\right)$ は、等ポテンシャル線に直交する向き(最大勾配の方向)となる。

(証明)

等ポテンシャル線を $\vec{r}(s)$ のようにパラメータ表示する。

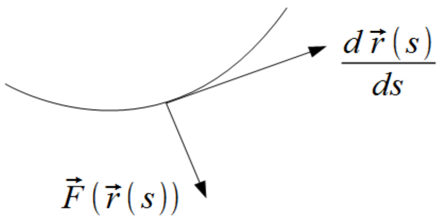
等ポテンシャル線上で、ポテンシャルの変化はないので

$$\frac{dU(\vec{r}(s))}{ds}=0$$

が成り立つ。働いている力が保存力ということから

$$\nabla U(\vec{r}(s))\cdot\frac{d\vec{r}(s)}{ds}=0$$

$$-\vec{F}(\vec{r}(s))\cdot\frac{d\vec{r}(s)}{ds}=0$$

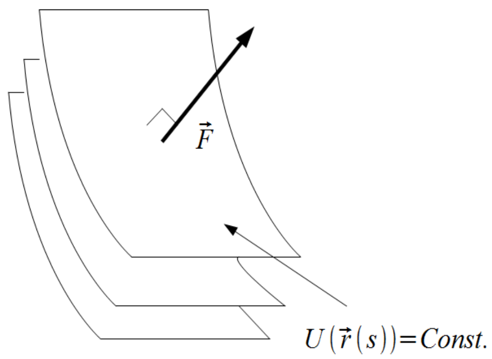


が導かれ、内積が 0 であるので、等ポテンシャル線と保存力は直交する。

3 次元

このとき、 $U(x,y,z)=Const.$ となる図形は3 次元空間内の曲面(等ポテンシャル面)となる。

2 次元の場合と同様に、 $\vec{F}=-\nabla U$ は曲面に垂直な方向になる。



最後に、単振り子のエネルギーについて計算し、この章の終わりとする。

・極座標形式での運動エネルギー

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=v_r\vec{e}_r+v_\theta\vec{e}_\theta \quad (v_r=\dot{r},\, v_\theta=r\dot{\theta}) \text{ より}$$

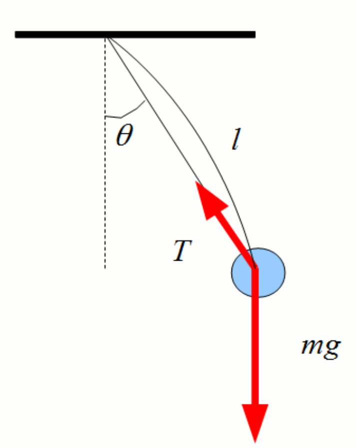
$$\frac{1}{2}m\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2=\frac{1}{2}m(v_r{}^2+v_\theta{}^2)$$
$$=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

・一定重力のポテンシャル

$$F_x=0,\ F_y=0,\ F_z=-mg \text{ なので}$$
$$U(x,y,z)=mgz+U_0$$

上記の 2 つのエネルギーを足し合わせることで単振り子のエネルギーが得られる。

※張力 T は拘束力(束縛条件を維持するための力)であり、常に運動の方向に垂直なので、仕事をしないためエネルギー計算には現れない。



単振り子のエネルギー E は、r=l を代入し、

$$E=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl(1-\cos\theta)$$

となる。このエネルギーが保存することを確かめよう。

$$\frac{dE}{dt}=ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+mgl\dot{\theta}\sin\theta$$
$$=l\dot{\theta}(ml^2\ddot{\theta}+mg\sin\theta)$$

ここで、振り子の軌道の接線方向の運動方程式

$$m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=-mg\sin\theta$$

より $\frac{dE}{dt}=0$ が得られ、エネルギーが保存することが確認できた。

さて、t との θ との関係式を求めてみよう。

$$\dot{\theta}^2=\frac{2}{ml^2}[E-mgl(1-\cos\theta)]$$
$$=\frac{2E}{ml^2}-\frac{4g}{l}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$\dot{\theta}>0$ のとき

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=\sqrt{\frac{2E}{ml^2}-\frac{4g}{l}\sin^2\frac{\theta(t)}{2}}$$

$t=0$ で $\theta=0$ とすると

$$t=\int\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{ml^2}-\frac{4g}{l}\sin^2\frac{\theta'}{2}}}d\theta'$$

となる。この計算は楕円積分となるのでこれ以上は踏み込まないことにする。

§3 質点系

N 個の質点からなる系について、

位置 $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t) \cdots, \vec{r}_N(t)$

質量 $m_1, m_2, \cdots, m_N$

という表記を導入する。

§3.1 運動方程式

質点系の状態は、ある時刻 t_0 での

$$\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N, \frac{d\vec{r}_1}{dt}, \cdots, \frac{d\vec{r}_N}{dt}$$

の 6N 個の初期条件によって決まる。

その後の時間発展に伴う各質点の運動は、Newton の運動方程式

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1(t)}{dt^2} = \vec{f}_1$$

$$\vdots$$

$$m_N \frac{d^2 \vec{r}_N(t)}{dt^2} = \vec{f}_N$$

によって決まる。

$\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_N$ は一般に $\vec{r}_i(t), \frac{d\vec{r}_i(t)}{dt}, t \, (i=1, \cdots, N)$ の関数であってよいが、

実際には次のような形をとっている。

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

※ $\vec{F}_i$:外力… $\vec{r}_i(t), \frac{d\vec{r}_i(t)}{dt}, t$ のみで決まる力

$\vec{F}_{ij}$:内力…質点 j が質点 i に及ぼす力

$\vec{r}_i(t), \frac{d\vec{r}_i(t)}{dt}, \vec{r}_j(t), \frac{d\vec{r}_j(t)}{dt}$ のみで決まる

※ $\sum_{j \neq i}$ とは、 i を除いて $j=1$ から N までの和をとるということである。

例 $i=3$ のとき

$$\sum_{j \neq 3} \vec{F}_{3\mathrm{j}} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{34} + \vec{F}_{35} + \cdots$$

・作用反作用の法則（Newton の運動の第 3 法則）

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

§3.2 エネルギー

質点系での運動エネルギーは以下の式で定義される。

$$T \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left|\frac{d\vec{r}_i(t)}{dt}\right|^2$$

運動エネルギーの時間変化を考える。

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i(t)}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2}\\ &= \sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{r}_i(t)}{dt}\cdot\vec{F}_i + \sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}\\ &= \sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{r}_i(t)}{dt}\cdot\vec{F}_i + \sum_{i<j}\left(\frac{d\vec{r}_i(t)}{dt}-\frac{d\vec{r}_j(t)}{dt}\right)\cdot\vec{F}_{ij}\end{aligned}$$

※ $\sum_{i<j}$ は $\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}$ の略記法である。

また、$\frac{d\vec{r}_i(t)}{dt}-\frac{d\vec{r}_j(t)}{dt}$ は質点の相対速度を意味する。

内力の寄与を考えるとき、相対速度を用いると簡潔に記述することができる。

例 N=2 のときの内力の寄与

$$\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt}\cdot\vec{F}_{12}+\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}\cdot\vec{F}_{21} = \left(\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt}-\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}\right)\cdot F_{12}$$

（作用反作用の法則を利用）

内力 $\vec{F}_{ij}$ が相対座標 $\vec{r}_i(t)-\vec{r}_j(t)$ のみで決まる場合、すなわち

$$\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)$$

$$\int_c \vec{F}_{ij}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

が経路 c の始点と終点の位置だけで決まり、途中の経路によらないとき、内力 $\vec{F}_{ij}$ を保存力と呼ぶ。このとき、ポテンシャル $U_{ij}(\vec{r})$ $(i<j)$ を

$$U_{ij}(\vec{r}) = -\int_c \vec{F}_{ij}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}'$$

によって定義する。

外力 $\vec{F}_i$ も保存力で、ポテンシャルが U_i のとき

$$U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_N) = \sum_{i=1}^{N} U_i(\vec{r}_i) + \sum_{i<j} U_{ij}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)$$

として

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left|\frac{d\vec{r}_i(t)}{dt}\right|^2 + U(\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t),\cdots,\vec{r}_N(t))$$

で与えられるエネルギー E は保存する。

- U_{ij} から $\vec{F}ij$ と $\vec{F}ji$ を求める方法

最初に2つの限定された場合についてのみ考えることとする。

<u>N=2かつ運動が1次元の場合</u>

$U_{12}(x_1-x_2)=U_{12}(x)$ と表記する。

例 バネの弾性エネルギー

$$U_{12}=\frac{1}{2}(x_2-x_1-x_0)^2 \quad (x_0: 自然長)$$

$\vec{F}$ が保存力なので

$$F_{12}(x)=-\frac{d}{dx}U_{12}(x)$$

が成り立ち

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}U_{12}(x_1-x_2)&=\frac{d}{dx}U_{12}(x)\frac{\partial x}{\partial x_1}\\&=-F_{12}(x_1-x_2)\end{aligned}$$

より

$$F_{12}(x_1-x_2)=-\frac{\partial}{\partial x_1}U_{12}(x_1-x_2)$$

同様に

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2}U_{12}(x_1-x_2)&=\frac{d}{dx}U_{12}(x)\frac{\partial x}{\partial x_2}\\&=F_{12}(x_1-x_2)\\&=-F_{21}(x_1-x_2)\end{aligned}$$

よって

$$F_{21}(x_1-x_2)=-\frac{\partial}{\partial x_2}U_{12}(x_1-x_2)$$

※一般に

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x-y)=-\frac{\partial}{\partial y}f(x-y)$$

が成立する

N=2 かつ運動が 3 次元の場合

$U_{12}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) = U_{12}(x, y, z)$ と表記する。

$$F_{12x}(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial x} U_{12}(x, y, z)$$

が成り立つので、最初に導入した形式を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} U_{12}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) &= \frac{\partial}{\partial x} U_{12}(x, y, z) \frac{\partial x}{\partial x_1} \\ &= -F_{12x}(x, y, z)\end{aligned}$$

より

$$F_{12x}(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial x_1} U_{12}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$

同様にして

$$F_{21y}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) = -\frac{\partial}{\partial y_2} U_{12}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$

なども示すことができる。

さらに一般の場合について考えてみよう。

ここで $\nabla_i \phi = (\frac{\partial x}{\partial x_i}, \frac{\partial y}{\partial y_i}, \frac{\partial z}{\partial z_i}) \quad (i = 1,2,\cdots, N)$ と表記すると

$$\begin{aligned}&\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \nabla_i U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\ &\vec{F}_{ji}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\nabla_i U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \qquad (i < j)\end{aligned}$$

と表せ、これを用いると

$$\nabla_i U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N) = -F_i(\vec{r}_i) - \sum_{i \neq j}^{N} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

なので、運動方程式は

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = -\nabla_i U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N) \qquad (i = 1,2,\cdots, N)$$

と書ける。

エネルギー保存について

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i(t)}{dt} \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} + \sum_{i=1}^{N} \nabla_i U(\vec{r}_1(t), \cdots, \vec{r}_N(t)) \cdot \frac{d\vec{r}_i(t)}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{d r_i(t)}{dt} \cdot [m_i \frac{d^2 r_i(t)}{dt^2} + \nabla_i U(\vec{r}_1(t), \cdots, \vec{r}_N(t))] \\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ。

§3.3　運動量

N 個の質点が存在する質点系において、運動方程式と作用反作用の法則から以下が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2 r_i(t)}{dt^2} = \sum_{i=i}^{N} (\vec{F}_i + \sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij})$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

運動量　$\vec{P}$　を考える。質点系の持つ運動量は以下のように定義される。

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\,\vec{r}_i(t)}{dt}$$

外力が質点系に働いていないとき、先に導いた等式より

$$\frac{d\,\vec{P}}{dt} = 0$$

すなわち運動量保存が成り立つ。

質点の全質量を　$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$　と表記する。
ここで，重心座標という概念を導入する。重心座標　$\vec{R}(t)$　は次のように定義される。

$$\vec{R}(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_1 \vec{r}_i(t)$$

重心の運動は，質点系そのものの運動とみなすことができる。
重心座標について次の式が成り立つ。

$$M \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

また、外力がなければ重心は等速直線運動をする。

質点 i の運動量について

$$\vec{P}_i(t) = m_i \frac{d\,\vec{r}_i(t)}{dt}$$

$$\vec{P}(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i(t)$$

より、運動方程式は次のように表現できる。

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = \frac{d\,\vec{P}_i(t)}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij}$$

力がすべて保存力の場合、さらに以下のように表現することもできる。

$$\frac{d\,\vec{P}_i(t)}{dt} = -\nabla_i U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N)$$

時刻　t_A　から　t_B　への運動量の変化について

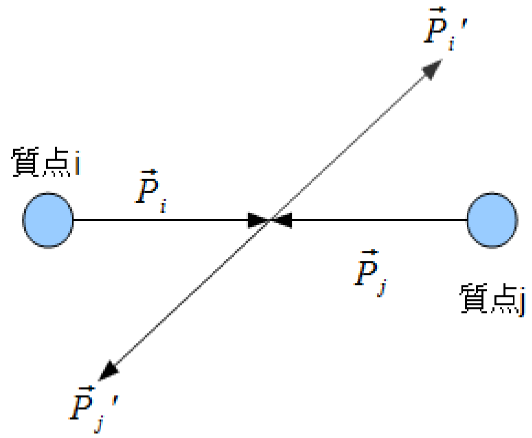
$$\vec{P}_i(t_B)-\vec{P}_i(t_A)=\int_{t_A}^{t_B}\frac{d\,\vec{P}_i(t)}{dt}dt$$
$$=\int_{t_A}^{t_B}\vec{F}_i(t)\,dt+\sum_{i\neq j}\int_{t_A}^{t_B}\vec{F}_{i\,j}(t)\,dt$$

式の前半部は外力による力積を、後半部は内力による力積を表す。
（力積：力の大きさと時間とを掛け合わせたもの。
　　　　単位は運動量のそれ(mg・m/s)に等しい。）

・質点 i と質点 j との衝突

　短い時間の衝突で、外力や他の質点からの力積が無視できるとき　$\vec{P}_i+\vec{P}_j$　は衝突の前後で保存する。

右図において
$\vec{P}_i+\vec{P}_j=\vec{P}_i{}'+\vec{P}_j{}'$
が成立する。



§3.4　2 体問題

この節では、2つの質点で成立する質点系の運動について考える。
簡単のため, 外力が働かない場合を考える。
質点 1（質量 m_1 , 位置 $\vec{r}_1$ ）、質点 2（同 m_2 , $\vec{r}_2$ ）について

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1(t)}{dt^2} = \vec{F}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2(t)}{dt^2} = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

重心座標 $\vec{R}(t)$ について

$$\vec{R}(t) = \frac{m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t)}{m_1 + m_2} \quad , \quad \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} = 0$$ …質点系は等速直線運動。

相対座標 $\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$ について

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} &= \frac{d^2 \vec{r}_1(t)}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_2(t)}{dt^2} \\ &= \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} + \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} \\ &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{12} \end{aligned}$$

が成り立ち、換算質量 $\mu = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$ を導入すると

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}_{12}(\vec{r})$$

と表現できるので、2 つの質点の運動は質量 μ を持つ質点に帰着することができる。

- $m_1 \gg m_2$ のとき　$\mu \simeq m_2$
- $m_1 = m_2$ のとき　$\mu = \frac{m}{2}$

のように、 m_1 と m_2 との間に特徴的な関係があることも多い。
質点 1 と質点 2 の位置を重心座標、相対座標を用いて表すと

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

運動エネルギーについて、この 2 質点の持つ運動エネルギーの和 T は次のようになる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \left| \frac{d \vec{r}_1}{dt} \right|^2 + \frac{1}{2} m_2 \left| \frac{d \vec{r}_2}{dt} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left| \frac{d \vec{R}}{dt} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{d \vec{r}}{dt} \right|^2 + \frac{1}{2} m_2 \left| \frac{d \vec{R}}{dt} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{d \vec{r}}{dt} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left| \frac{d \vec{R}}{dt} \right|^2 + \frac{1}{2} \mu \left| \frac{d \vec{r}}{dt} \right|^2 \end{aligned}$$

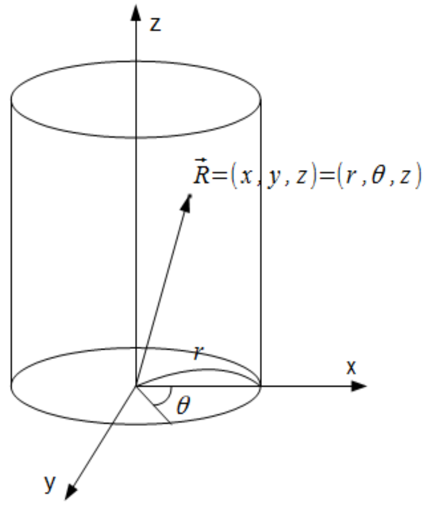
最終行の前半部は重心運動の運動エネルギー、後半部は相対運動の運動エネルギーを

それぞれ表している。つまり、質点系の持つ運動エネルギーは重心運動の運動エネルギーと相対運動の運動エネルギーとの和で表現される。

§4 角運動量

§4.1 質点の角運動量

はじめに、新しい座標系である円柱座標を導入する。
円柱座標は 3 次元空間の直交座標のうち、x,y 座標の部分を極座標で表現したものである。
具体的には、 (x,y,z) が (r,θ,z) と表現される。



以下ではこの円柱座標を用いて運動を考えていこう。
r,θ は時間変化し、実際には t の関数であることに注意してほしい。

質点が 1 つの場合、質点の運動方程式は

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r$$
$$m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=F_\theta$$
$$m\ddot{z}=F_z$$

となり、(力の方向は右図参照)
常に $F_\theta=0$ が成立する条件下では

$$m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=0$$

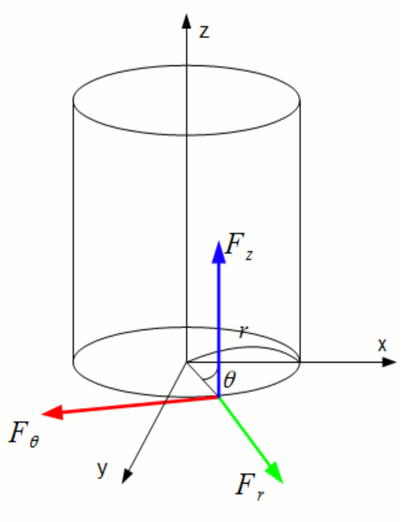
である。ここで、

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta}$$

より

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})$$
$$=0$$

すなわち $mr^2\dot{\theta}$ が保存する。
ここで出てきた数 $mr^2\dot{\theta}$ を角運動量といい、通常 L で表現する。



$\vec{F}$ が保存力で $F_\theta=0$ のとき、ポテンシャルは θ 方向に変化しない、すなわち角運動量

$$L=mr^2\dot{\theta}$$

は保存する

※保存則というのは時空の対称性の表れであり、角運動量保存則は空間の回転対称性の表れである。
上の例では z 軸まわりの回転対称性が $mr^2\dot{\theta}$ の保存を起こしている。

これを直交座標で表現してみよう。極座標と直交座標との間で成り立つ関係式

$$\begin{matrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} r^2=x^2+y^2 \\ \tan\theta=\frac{y}{x} \end{matrix}$$

から、 $\dot{\theta}$ を求めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tan\theta &= \frac{1}{\cos^2\theta}\dot{\theta} \\ &= \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad \dot{\theta} &= \frac{\dot{y}x-\dot{x}y}{x^2}\frac{x^2}{x^2+y^2} \\ &= \frac{\dot{y}x-\dot{x}y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

これらを用いて

$$mr^2\dot{\theta}=m(\dot{y}x-\dot{x}y)$$

が導かれる。

ここで中心力という力を紹介する。

> 力の大きさは原点と物体との距離 $|r|$ のみに依存し、力の向きが原点と物体とを結ぶ方向であるような力のことを中心力という。
>
> 一般に、中心力は保存力である。

中心力の下では、円柱座標 (r,θ,z) において、 $F_\theta=0$ が成り立つ。
別の円柱座標 $(r,\theta,x),(r,\theta,y)$ においても $F_\theta=0$ が成り立つ。
このことから, 角運動量 $\vec{L}=(L_x,L_y,L_z)$ は保存する。
($L_x=m(y\dot{z}-z\dot{y}),L_y=m(z\dot{x}-x\dot{z}),L_z=m(x\dot{y}-y\dot{x})$)

よって、 $\vec{F}$ が中心力のとき $\frac{d\vec{L}}{dt}=0$ が成り立つ。

§4.2 外積を用いた角運動量の表示

外積についての詳しいことは別途プリント参照とする。ここでは基本だけを示しておく。

外積については以下の式が成り立つ。

(1) $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$
$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$
$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$

(2) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

(3) $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

(4) $a\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times a\vec{B} = a(\vec{A} \times \vec{B})$

(2)より $\vec{A} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{A} \Leftrightarrow \vec{A} \times \vec{A} = 0$

また、以下の式が公式として成り立つ。

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$
$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

外積によって、角運動量は位置ベクトルと運動量を用いて表現できる。

位置ベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$
運動量 $\vec{p} = (m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z})$

に対し，角運動量 $\vec{L}$ は次のように表現される。

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

この形式を用いて角運動量の時間変化を考えよう。角運動量の時間微分の式は次のようになる。

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{r}$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ と $\vec{p} = m\vec{v}$ から、 $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$ であり、運動量の時間微分は力だから

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

となる。 $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ で定義されるベクトル $\vec{N}$ は力のモーメントである。(トルクと呼ばれる。)
質点に働く力 $\vec{F}$ が中心力の時、 $\vec{r}$ と $\vec{F}$ は平行であるから

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

すなわち、 $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ (角運動量保存)が成り立つ。

§4.3　質点系の角運動量

質点系の角運動量は、ここの質点の角運動量の総和として表される。

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i\times\vec{p}_i)$$

角運動量の時間変化について

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt}&=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\times\vec{p}_i+\vec{r}_i\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right)\\&=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\left(\vec{F}_i+\sum_{i\neq j}\vec{F}_{ij}\right)\\&=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_i+\sum_{i<j}\left((\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{F}_{ij}\right)\end{aligned}$$

内力　$\vec{F}_{ij}$　がすべて中心力のとき、

$$(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{F}_{ij}=0$$

が成り立つので、角運動量の時間変化について

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i\times\vec{F}_i)$$

が成り立つ。これは質点系に働く外力のモーメントの和に等しい。
外力　$\vec{F}_i$　も中心力のとき、角運動量は保存する。

§5. 中心力のもとでの運動

§5.1 有効ポテンシャル

質点に働く力が中心力(かつ保存力)の場合、質点の運動について

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}=-\nabla U(|\vec{r}|)$$

が成り立つ。これを実際に確認してみよう。

$r\equiv|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とすると x 軸方向の力 F_x について

$$\begin{aligned}F_x&=-\frac{\partial}{\partial x}U(r)\\&=-\frac{dU(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\\&=-\frac{dU(r)}{dr}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\&=-\frac{x}{r}\frac{dU(r)}{dr}\end{aligned}$$

が成り立つ。よって $\vec{F}$ は

$$\vec{F}=-\nabla U(r)=-\frac{\vec{r}}{r}\frac{dU(r)}{dr}$$

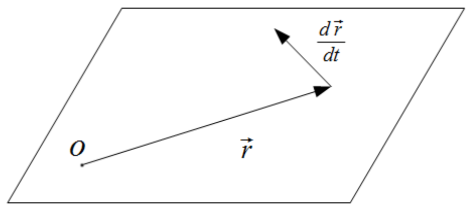
であることが確認できた。 $\vec{F}$ と $\vec{r}$ が平行なので $\vec{F}$ が中心力であることも確認できる。

ここで運動平面という概念を導入する。

運動平面

ある時刻での $\vec{r}$ と $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ とで決まる平面。

$\vec{F}$ が運動平面内にある場合、その後の $\vec{r}$ も運動平面内に存在し、3 次元運動を 2 次元で考えることができる。



上のことは角運動量 $\vec{L}$ の保存からも示せる。 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ より

$$\begin{aligned}\vec{r}\cdot\vec{L}&=\vec{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{p})\\&=(\vec{r}\times\vec{r})\cdot\vec{p}=0\end{aligned}$$

よって $\vec{r}$ は $\vec{L}$ に常に垂直であり、 $\dfrac{d\vec{L}}{dt}=0$ のとき、 $\vec{r}$ は一定の平面内に存在する。

運動平面で極座標 (r,θ) を用いると

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=\frac{-dU(r)}{dr}\quad\cdots①$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0\cdots②$$

であり、②式から角運動量の大きさ $L=mr^2\dot{\theta}$ は一定である。

$\dot{\theta}=\dfrac{L}{mr^2}$ を①式に代入し

$$m\frac{d^2r(t)}{dt^2}-\frac{L^2}{mr^3}=\frac{-dU(r)}{dr}$$

$-\dfrac{L^2}{mr^3}=\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{L^2}{2\mathrm{mr}^2}\right)$ より、 $U_{eff}(r)=U(r)+\dfrac{L^2}{2\mathrm{mr}^2}$ と定義した関数 $U_{eff}(r)$ を用いると

$$m\frac{d^2r(t)}{dt^2}=-\frac{U_{eff}(r)}{dr}$$

となる。この関数 $U_{eff}(r)$ を有効ポテンシャルといい、保存力の下での一次元運動に帰着できる。
エネルギー E もこの有効ポテンシャルを用いて次のように表現できる。

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+U(r)\\&=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\frac{L^2}{m^2r^4}+U(r)\\&=\frac{1}{2}m\left(\frac{dr(t)}{dt}\right)^2+U_{eff}(r)\end{aligned}$$

実際に物体の運動を求めていくときは

$$\frac{dr(t)}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E-U_{eff}(r)}\qquad(変数分離形)$$

を解くことによって $r(t)$ が決定され、 $r(t)$ が決定すると

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=\frac{L}{mr^2(t)}$$

を積分することで $\theta(t)$ が決定される。

一般に、2 体問題で内力が中心力(かつ保存力)の場合、物体の運動は重心運動 $(M,\vec{R})$ と相対運動 $(\mu,\vec{r})$ とに分離して考えることができる。
相対運動が 2 次元の運動平面のとき、 $\mu U_{eff}(r)$ を用いて一次元運動に帰着することができる。
弾性衝突(散乱)や惑星の運動なども同様にして考えることができる。

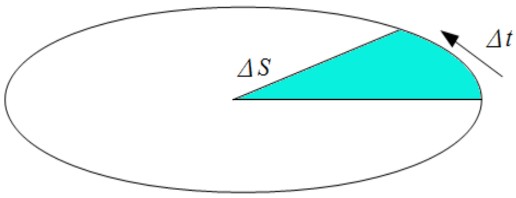
§5.2　万有引力とKeplerの法則

・Keplerの法則

Keplerの法則は観測から導かれたものである。

1.惑星の軌道は太陽を焦点の一つとする楕円である。
2.太陽と惑星とを結ぶ動径の掃く面積速度は常に一定である。
3.惑星の公転周期の2乗は軌道の長半径の3乗に比例する。

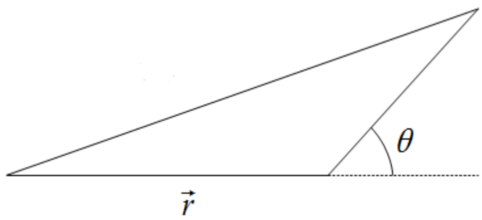
これらの法則はどんな力によって説明することができるのだろうか？
まず面積速度一定から考えてみよう。



面積速度は右図の状態において、 $\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$ で定義される値である。

$t\to t+\Delta t$ のとき、 $\vec{r}\to\vec{r}+\vec{v}\,\Delta t$ とすると

$$\Delta S=\frac{1}{2}|\vec{r}||\vec{v}\,\Delta t|\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|\,\Delta t$$



が成り立つので、面積速度は

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{m}}|\vec{r}\times\vec{p}|$$
$$=\frac{L}{2\mathrm{m}}$$

以上より、面積速度一定と角運動量保存が同値であることが確認できた。
これから、惑星運動で作用している力が中心力であると推測できる。

ここで一例として円軌道を考えよう。

$mr\,\omega^2=F(r)$ であり、周期は $T=\frac{2\pi}{\omega}$ である。

よって、 $T^2=\frac{4\pi^2}{\omega^2}=\frac{4\pi^2 mr}{F(r)}\propto r^3$ となり、 $F(r)\propto\frac{m}{r^2}$ が成り立つ。

実際に惑星運動を起こしているのは万有引力であり

$$\vec{F}_{i\,j}=-G\,m_i m_j\frac{\vec{r}_i-\vec{r}_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}$$

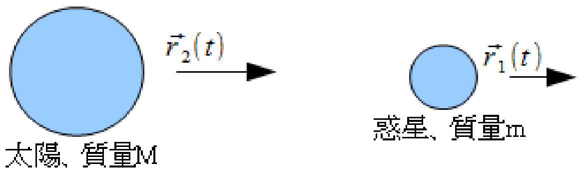
で定義される力である。(G:万有引力定数　$G=6.67\times10^{-11}[\frac{m^3}{kg\cdot s^2}]$)

万有引力は中心力(かつ保存力)であり、ポテンシャルは次のように定義される。

$$U_{i\,j}=-G\frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i-\vec{\text{¿}}\,j|}$$

§5.3　惑星の軌道

<u>太陽と惑星との 2 体問題</u>



内力である万有引力のポテンシャルは

$$U_{12}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=-G\frac{Mm}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

相対座標　$\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$　の運動平面での極座標を　(r,θ)　とすると、力が中心力なので

$$\frac{d\,r(t)}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{\mu}}\sqrt{E-U_{eff}(r)}$$

$$\frac{d\,\theta(t)}{dt}=\frac{L}{\mu r^2(t)}$$

が成り立つ。

これら式を解けば惑星の運動の軌道が求まるのだが、(詳しくは§5.1 の部分を参照)

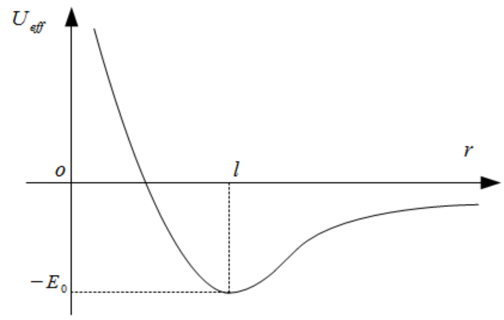
この場合の有効ポテンシャル　$U_{eff}(r)=-G\frac{M\,m}{r}+\frac{L^2}{2\,\mu r^2}$　には特徴がある。

それは　$\frac{d\,U_{eff}(r)}{dr}=0$　となる点が存在することである。

まずはこの点を求めてみよう。

この条件を満たす座標を　$(l.-E_0)$　とする。

$\frac{d\,U_{eff}(r)}{dr}=0$　を解いて、



$$l=\frac{L^2}{Gmm\,\mu}$$

$$E_0=\frac{G^2M^2m^2\mu}{2L^2}$$

が求まる。この距離での有効ポテンシャル　$-E_0$　は、エネルギーの最低値に等しく、惑星は 1 次元的にはこの点で静止することになり、3 次元的には惑星は円軌道を描くことになる。

一般の場合の軌道は、r と θ の関係式から t を消去して求まる。

$$\frac{d\theta}{dr}=\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)^{-1}$$

$$=\pm\frac{L}{\mu r^2}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{1}{\sqrt{E-U_{eff}(r)}}$$

$$=\pm\frac{L}{\sqrt{2\mu}}\frac{1}{r^2\sqrt{E+\frac{GMm}{r}-\frac{L^2}{2\mu r^2}}}$$

この式を積分することによって軌道の形がわかる。

$$\frac{d\theta}{dr}=\pm\frac{L}{\sqrt{2\mu}}\frac{1}{r^2\sqrt{E+\frac{GMm}{r}-\frac{L^2}{2\mu r^2}}}$$

について、この式を積分して

$$\pm\theta=\frac{L}{\sqrt{2\mu}}\int\frac{1}{r^2\sqrt{E+\frac{GMm}{r}-\frac{L^2}{2\mu r^2}}}dr \quad \cdots(\mathrm{A})$$

が得られる。この(A)式を積分するには準備が必要となる。

まず、 $\rho=\frac{1}{r}$ と定義される変数 ρ に積分変数を変換する。

$$\pm\theta=\frac{L}{\sqrt{2\mu}}\int\frac{\rho^2}{\sqrt{E+GMm\rho+\frac{L^2}{2\mu}\rho^2}}\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\ d\rho \quad \cdots(\mathrm{A'})$$

この(A')式を積分をする前に、一般化した状態で考えてみよう。

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{a+bx-cx^2}}dx&=\int\frac{1}{\sqrt{-c\left(x-\frac{b}{2c}\right)^2+a+\frac{b^2}{4c}}}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{\frac{c^2}{b^2+4ac}}\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4c^2}{b^2+4ac}\left(x-\frac{b}{2c}\right)^2}}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\sqrt{\frac{4c^2}{b^2+4ac}}\left(x-\frac{b}{2c}\right)\qquad\left(c>0,\ b^2+4ac>0\right)\end{aligned}$$

（$\because$ $\frac{d}{dx}\arcsin\alpha x=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2x^2}}$ を利用、9p 参照）

この積分を利用するために、 $a=E,\ b=GMm,\ c=\frac{L^2}{2\mu}$ を代入し

$$\frac{b}{2c}=\frac{GMm\mu}{L^2}=\frac{1}{l}$$

$$\begin{aligned}\frac{4c^2}{b^2+4ac}&=\frac{L^4}{\mu^2}\frac{1}{(GMm)^2+\frac{2L^2}{\mu}E}\\&=\frac{L^4}{(GMm\mu)^2}\frac{1}{1+\frac{2L^2}{(GMm)^2\mu}E}=\frac{l^2}{1+\frac{E}{E_0}}\end{aligned}$$

と先ほど求めた極値 E_0,l を用いて表示すると(A')式の積分結果は次のようになる。

$$\pm\theta=\arcsin\left\{\frac{l}{\sqrt{1+\frac{E}{E_0}}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)\right\}$$

定数 C が $\frac{\pi}{2}$ になるように座標の原点を選ぶと $\epsilon=\sqrt{1+\frac{E}{E_0}}=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{(GMm)^2\mu}}$ とし、軌道は

$$r=\frac{l}{1+\epsilon\cos\theta} \qquad \sin(\mp\theta+\frac{\pi}{2})=\frac{l}{\epsilon}(\frac{1}{r}-\frac{1}{l})$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\epsilon}(\frac{l}{r}-1)$$

となる。

これをデカルト座標で表示してみよう。先に導出した式より

$$r^2=(l-\epsilon r\cos\theta)^2$$

が導かれ、これを極座標から直交座標に直すと

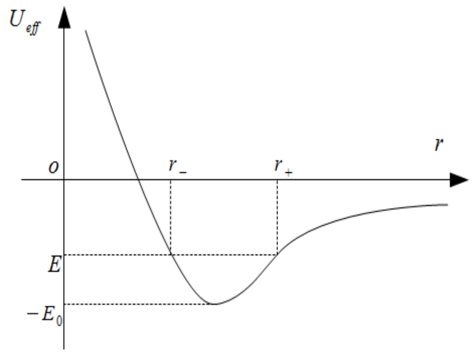
$$x^2+y^2=(l-\epsilon x)^2$$

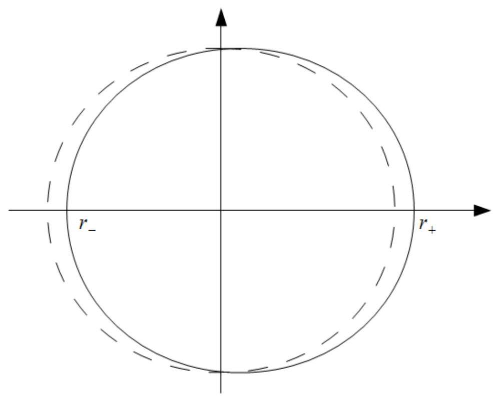
となる。これをさらに変形して

$$\frac{(1-\epsilon^2)}{l^2}(x+\frac{el}{1-e^2})^2+\frac{1-e^2}{l^2}y^2=1$$

$-E_0<E<0$ を満たすとき、 $0<\epsilon<1$ すなわち $1-\epsilon^2<0$ より軌道は楕円となる。
この楕円の長半径は $\frac{l}{1-\epsilon^2}$ 、短半径は $\frac{l}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$ となり、楕円の 2 焦点は $(0,0)$ と $(-\frac{2el}{1-\epsilon^2},0)$ である。 （ ϵ を離心率、 l を半直弦という）

この状況を図で表すと下の 2 図のようになる。
1 次元的には左の図の $r_-<r<r_+$ を満たす範囲で運動し、2 次元的には右の図のように楕円軌道を描くことになる。（点線の円は $E=-E_0$ の時の軌道）





さて、公転周期 T を求めることにしよう。この求め方には 2 通りある。

<u>解法 1</u>

$$\frac{dr(t)}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{\mu}}\sqrt{E-U_{eff}(r)} \quad より、$$

$$\frac{T}{2}=\sqrt{\frac{\mu}{2}}\int_{r_-}^{r_+}\frac{1}{\sqrt{E-U_{eff}(r)}}dr$$
$$=\sqrt{\frac{\mu}{2}}\int_{r_-}^{r_+}\frac{r}{\sqrt{Er^2+GMmr-\frac{L^2}{2\mu}}}dr$$

が成り立つ。ここで、以下の公式を適用することを考える。

$c>0, b^2+4ac>0$ において

$$\int \frac{x}{\sqrt{a+bx-cx^2}}dx=\int \frac{-\frac{1}{c}\frac{b-2cx}{2}+\frac{b}{2c}}{\sqrt{a+bx-cx^2}}dx$$

$$=-\frac{1}{c}\sqrt{a+bx-cx^2}+\frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}}\arcsin\{\frac{4c^2}{b^2+4ac}(x-\frac{b}{2c})\}$$

これを用いて計算すると

$$T^3=\frac{G^2M^2m^2\mu\pi^2}{2(-E)^3}$$

ここで長半径 A が $A=\frac{l}{1-\epsilon^2}=\frac{GMm}{2(-E)}$ で与えられていることを考えると

$$\frac{T^2}{A^3}=\frac{4\pi^2\mu}{GMm}$$

$M\gg m$ のとき、 $\mu\simeq m$ なので

$$\frac{T^2}{A^3}\simeq\frac{4\pi^2}{GM}$$

となる。

解法 2

$T=\frac{\text{楕円の面積}}{\text{面積速度}}$ の関係が成り立つことを用いる。

短半径 B が $B=\frac{l}{\sqrt{1-\epsilon^2}}=\sqrt{Al}$ で与えられて、楕円の面積 S は

$$S=\pi AB=\pi\sqrt{l}A^{\frac{3}{2}}$$

である。ここで面積速度が $\frac{L}{2\mu}$ であることから

$$T^2=\pi^2 l A^3(\frac{2\mu}{L})^2$$

$$=\frac{4\pi^2\mu}{GMm}A^3$$

より、先ほどと同じ結果が得られる。

§6. 慣性系・非慣性系

§6.1 慣性系

慣性系という言葉は次のように定義される。

> 慣性の法則が成り立つ座標系を慣性系という。
>
> ※慣性の法則（Newton の運動の第一法則）
> 他の物体からの影響（＝力）がなければ、物体は静止あるいは等速直線運動の状態を続ける。

直交座標系において慣性の法則が成り立つのは明らかである。それでは、座標系を変更したとき、その変更された他の座標系でも慣性の法則は成り立つのであろうか？
そのことについて、これ以降検証していきたい。

以下では普段使っている直交座標を基準とし、これを座標系Σとし、座標変換が行われた後の座標系を座標系Σ'とする、

平行移動

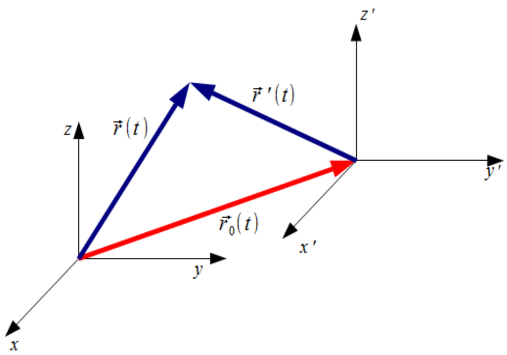
はじめに普段の直交座標を平行移動させた座標系について考えよう。
右図のように座標系を $\vec{r}\,'(t)=\vec{r}(t)-\vec{r}_0(t)$ を満たすように平行移動させる。
力は $\vec{F}=\vec{F}\,'$ 、つまり移動前後で同一になるようにする。
このとき、次の式が成り立つ。

$$m\frac{d^2\vec{r}\,'(t)}{dt^2}=m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}-m\frac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow m\frac{d^2\vec{r}\,'(t)}{dt^2}=\vec{F}\,'-m\frac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2} \quad \cdots(*)$$

$\vec{r}_0(t)=\vec{v}_o t+\vec{r}_0$ （ $\vec{r}_0, \vec{v}_0$： 定数ベクトル） のとき

$$m\frac{d^2\vec{r}\,'(t)}{dt^2}=\vec{F}\,'$$



となり、運動方程式が成り立つので、座標変換した座標系Σ'も慣性系であることが確認できた。
このように、 $\vec{r}\,'(t)=\vec{r}(t)-(\vec{v}_0 t+\vec{r}_0)$ と変換することを Galilei 変換という。
この Galilei 変換は、座標系Σでの時間 t と座標系Σ'での時間 t'が等価である(t=t')ということを仮定している変換である。通常の運動を扱う場合はこれで問題がないが、光速度に近づいた場合などは相対論の効果が影響してくるので、相対論による影響も考慮して行う座標変換を Lorentz 変換という。Galilei 変換は速度の足し算が可能であるという主張を含む。
ここで、 $-m\frac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2}\neq 0$ となる場合を考えよう。この場合は座標系Σ'は等速運動をしていないということであり、(*)式から考えると運動方程式は成り立たないことになる。
この問題を解決するために、座標系Σ'に対して新しい力が働いていると考えればどうだろうか？
$-m\frac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2}$ を力と考えれば、(*)式も運動方程式とみなすことができ、Σ'は慣性系となる。
このように運動方程式を維持するために導入した見かけの力 $-m\frac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2}$ を慣性力と呼ぶ。

例：自由落下する座標系

重力を受けて自由落下する物体に対して働く力 $\vec{F}$ について

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}=\vec{F},\vec{F}=(0,0,-mg)\quad\cdots①$$

が成り立つ。自由落下している座標系に対して $\frac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2}=(0,0,-g)$ が成り立つので

$$-m\frac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2}=(0,0,mg)\quad\cdots②$$

となる。よって自由落下する座標系からみた物体の運動は

$$m\frac{d^2\vec{r}'(t)}{dt^2}=0$$

となるので、この座標系から見た物体は静止しているように見える。

※重力質量と慣性質量

質量には2つの方法で定義されるものがある。

慣性質量：運動方程式から決定されるもので、 $m_i=\frac{F}{a}$ と定義される。

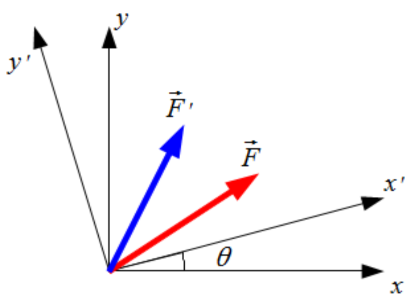
重力質量：万有引力から決定されるもので、 $m_g=\frac{F_g r^2}{GM_e}$ と定義される。

（ F_g ：物質に働く地球の重力 r:地球と物質との重心距離
M_e ：地球の重力質量 G:万有引力定数）

2つの質量は別々の定義をされているが、同一の値を取る。
上の例で言えば①において使われているmは重力質量であり、②において使われているmは慣性質量である。

回転

簡単のため、z軸回りの回転を考える。以下ではz成分を省略する。
新たな座標系Σ'(x' y')を $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=R(\theta)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ で与える。
力は $\begin{pmatrix}F'_x\\F'_y\end{pmatrix}=R(\theta)\begin{pmatrix}F_x\\F_y\end{pmatrix}$ のように変換するものを考える。



・ θ が一定（時間変化しない）とき

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}'\\\ddot{y}'\end{pmatrix}=mR(\theta)\begin{pmatrix}\ddot{x}\\\ddot{y}\end{pmatrix}$$
$$=R(\theta)\begin{pmatrix}F_x\\F_y\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}F'_x\\F'_y\end{pmatrix}$$

すなわち、 $m\begin{pmatrix}\ddot{x}'\\\ddot{y}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F'_x\\F'_y\end{pmatrix}$ となり、Σ'も慣性系である。

・ $\theta=\omega t$ のとき（等速回転）　（講義時とは回転方向が逆になっていることに注意）

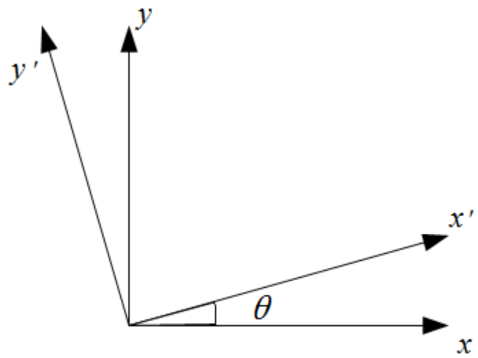
$$\dot{R}(\theta)=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\frac{d\theta}{dt}\begin{pmatrix}-\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & -\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\ddot{R}(\theta)=\frac{d}{dt}\dot{R}(\theta)=-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

を準備しておく。このとき、回転している座標系に対して

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=R(-\theta)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}'\\ \dot{y}'\end{pmatrix}=\dot{R}(-\theta)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+R(-\theta)\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}$$



が成り立つ。 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=R(\theta)\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}\dot{R}(-\theta)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}&=\dot{R}(-\theta)R(\theta)\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\omega y'\\ -\omega x'\end{pmatrix}\end{aligned}$$

なので、この座標系について

$$\begin{pmatrix}\dot{x}'\\ \dot{y}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega y'\\ -\omega x'\end{pmatrix}+R(-\theta)\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}$$

が成り立つ。同様にして加速度については

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}'\\ \ddot{y}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega \dot{y}'\\ -\omega \dot{x}'\end{pmatrix}+\dot{R}(-\theta)\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}+R(-\theta)\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}$$

であり

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}&=R(\theta)\begin{pmatrix}\dot{x}'\\ \dot{y}'\end{pmatrix}\\ &=R(\theta)\begin{pmatrix}\dot{x}'-\omega y'\\ \dot{y}'+\omega x'\end{pmatrix}\end{aligned}$$

を用いて

$$\begin{aligned}\dot{R}(\theta)\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}&=\dot{R}(-\theta)R(\theta)\begin{pmatrix}\dot{x}'-\omega y'\\ \dot{y}'+\omega x'\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}'-\omega y'\\ \dot{y}'+\omega x'\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\omega \dot{y}'\\ -\omega \dot{x}'\end{pmatrix}+\omega^2\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}m\begin{pmatrix}\ddot{x}'\\ \ddot{y}'\end{pmatrix}&=2\mathrm{m}\begin{pmatrix}\omega \dot{y}'\\ -\omega \dot{x}'\end{pmatrix}+m\omega^2\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+R(-\theta)\begin{pmatrix}m\ddot{x}\\ m\ddot{y}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}F'_x\\ F'_y\end{pmatrix}+2\mathrm{m}\begin{pmatrix}\omega \dot{y}'\\ -\omega \dot{x}'\end{pmatrix}+m\omega^2\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が得られる。

この式に登場する $2\mathrm{m}\begin{pmatrix}\omega \dot{y}'\\ -\omega \dot{x}'\end{pmatrix}$ を coliolis の力と呼ぶ。 $m\omega^2\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ は遠心力である。

回転している座標系の基底はどのように表されるだろうか？
座標系Σにおいて $\vec{r}(t)=x(t)\vec{e}_x+y(t)\vec{e}_y$ とすると、回転座標系Σ'において
$\vec{r}\,'(t)=x'(t)\vec{e}_x+y'(t)\vec{e}_y$ と表せる。しかし、回転座標系においては基底も回転している。
この時間変化する基底について、

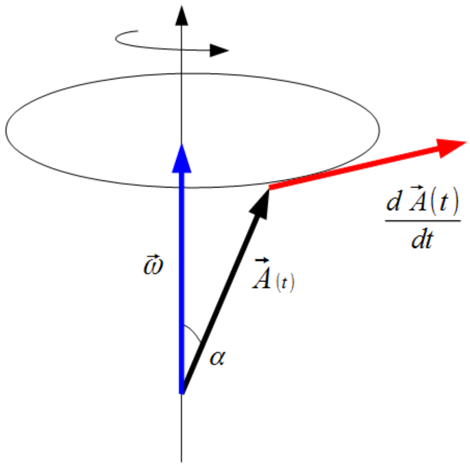
$$\begin{aligned}\vec{r}\,'(t)&=(x(t)\cos\omega t+y(t)\sin\omega t)\vec{e}_x+(-x(t)\sin\omega t+y(t)\cos\omega t)\vec{e}_y\\&=x(t)\vec{e}_x{}'(t)+y(t)\vec{e}_y{}'(t)\end{aligned}$$

と表すと、基底は次のように表現できる。

$$\begin{aligned}\vec{e}_x{}'(t)&=\cos\omega t\,\vec{e}_x-\sin\omega t\,\vec{e}_y\\\vec{e}_y{}'(t)&=\sin\omega t\,\vec{e}_x+\cos\omega t\,\vec{e}_y\end{aligned}$$

一般的な等速回転をしているベクトル $\vec{A}(t)$ について考えてみよう。
このとき、ベクトルの末端が回転している平面を考えると

$$\left|\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\right|=\omega\left|\vec{A}(t)\right|\sin\alpha$$



となる。ここで角速度ベクトル $\vec{\omega}$ を考える。
角速度ベクトルには次の性質が成り立つ。

- ベクトルの向きは回転軸の方向
- $|\vec{\omega}|=\omega$

この角速度ベクトルを用いると、

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{A}(t)$$

が成り立つ。

座標系Σ'が座標系Σに対して $\vec{\omega}$ で表される等速回転をしているとき

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_x{}'(t)}{dt}&=-\vec{\omega}\times\vec{e}_x{}'(t)\\\frac{d\vec{e}_y{}'(t)}{dt}&=-\vec{\omega}\times\vec{e}_y{}'(t)\\\frac{d\vec{e}_z{}'(t)}{dt}&=-\vec{\omega}\times\vec{e}_z{}'(t)\end{aligned}$$

となり、基底は逆向きに回転する。 $\vec{r}\,'(t)=x(t)\vec{e}_x{}'(t)+y(t)\vec{e}_y{}'(t)+z(t)\vec{e}_z{}'(t)$ として

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}\,'(t)}{dt}&=\dot{x}(t)\vec{e}_x{}'(t)+\dot{y}(t)\vec{e}_y{}'(t)+\dot{z}(t)\vec{e}_z{}'(t)\\&\qquad-x(t)(\vec{\omega}\times\vec{e}_x{}'(t))-y(t)(\vec{\omega}\times\vec{e}_y{}'(t))-z(t)(\vec{\omega}\times\vec{e}_z{}'(t))\\&=\dot{x}(t)\vec{e}_x{}'(t)+\dot{y}(t)\vec{e}_y{}'(t)+\dot{z}(t)\vec{e}_z{}'(t)-\vec{\omega}\times\vec{r}\,'(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{r}\,'(t)}{dt^2}&=\ddot{x}(t)\vec{e}_x{}'(t)+\ddot{y}(t)\vec{e}_y{}'(t)+\ddot{z}(t)\vec{e}_z{}'(t)\\&\qquad-\vec{\omega}\times(\dot{x}(r)\vec{e}_x{}'(t)+\dot{y}(t)\vec{e}_y{}'(t)+\dot{z}(t)\vec{e}_z{}'(t))-\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}\,'(t)}{dt}\end{aligned}$$

$$=\frac{\vec{F}'}{m}-\vec{\omega}\times(\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}'(t))-\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}$$

となるので、運動方程式は

$$m\frac{d^2\vec{r}'(t)}{dt^2}=\vec{F}'-2\mathrm{m}\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'(t))$$

が得られる。第 2 項は Corilos の力を、第 3 項は遠心力を表している。
$\vec{\omega}=(0,0,\omega),\vec{r}'=(x',y',z'),\frac{d\vec{r}'}{dt}=(\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}')$ のときに以前の表式が再現されることを各自確認しておいてほしい。

§7. 剛体

質点とは異なり、大きさを持つが力が作用しても変形しない仮想的な物体を剛体という。
(質点:大きさを持たない仮想的な点)

§7.1 運動方程式

いままでの物理では、運動するものはすべて質点として考えてのものだった(質点近似)。
では、剛体ではどのように考えればいいのだろうか?剛体とは**本質的には質点の連続的な集合であり、その質点同士に内力が作用して剛体としての形を維持している**と考えれば良い。
そのようにすれば、剛体を形成するすべての質点が Newton の運動方程式に従うと考えれば今まで通りに考えることが可能となる。

それでは、剛体をどのように質点へと分割すれば良いであろうか?そして分割された個々の質点に成り立つ運動方程式を解かねばならないのだろうか?答えは、**剛体の質点への分割の方法は答えに依存せず、解くべき運動方程式は有限個に限られる**。その解くべき運動方程式の数を剛体の自由度と呼ぶ。この自由度の数は、物体の空間的な配置を完全に決定するために必要な変数の数に等しい。まずは剛体の自由度というものについて考えてみよう。

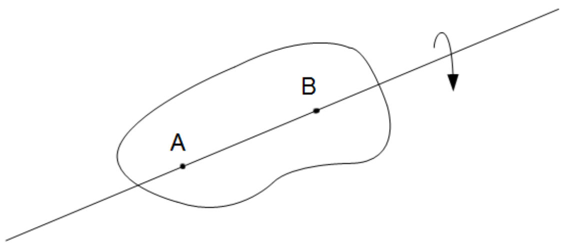
ある任意の剛体を考えよう。この物質の空間的配置を決定するためには、まずその重心を定める。
しかし、重心を決定しただけでは重心周りに剛体が自由に回転できるので、空間的配置を決定するためには、まず回転の軸の向きを決め、その後で回転の軸でどれだけ回転させるか、ということを決めなければならない。
すなわち、剛体の空間配置を決定するには 6 個の変数が必要である。

(回転の向きを 3 次元球座標 (θ, ϕ) で決定し、軸回りの回転の量を ψ で決めたとき、(θ, ϕ, ψ) を Euler 角という。)

これを右図のような剛体について適用してみよう。

剛体中に任意の点 A,B を選ぶ。
まず A の位置を 3 つの変数で決定する。
その後、A から B の方向を 2 つの変数で定め、
A と B とを通る軸の回転を 1 つの変数で定める。

こうして剛体の空間配置は決定される。



もう一つ別の考え方も存在する。こちらは座標で考える。
はじめに剛体中の 1 つの質点 (x_1, y_1, z_1) を決定する。この変数は完全に自由である。
次に 2 つ目の質点 (x_2, y_2, z_2) を決定する。この質点には 1 つ目の質点からの距離という条件が存在するので、完全に自由ではない。この 2 つ目の質点を置く際の自由度は 2 である。
さらに 3 つ目の質点を置く。この質点には 1 つ目の質点と 2 つ目の質点からの距離という条件が存在するので、自由度は 1 である。4 つ目の質点を置く際には、これ以前の 3 質点からの距離という条件があるので、自由度は 0 となる。これ以降剛体中に新たに質点を設定しても、その質点の自由度は 0 のままである。以上から、剛体の自由度は 6 となる。

従って、一般の剛体の運動を考えるには6個の運動方程式が必要となる。その運動方程式は剛体を剛体として維持するための力が内力であり、その内力に作用反作用の法則が成り立ち、なおかつ中心力であるとすると、全運動量と全角運動量に関する式となる。
具体的には

$$\frac{d\,P(t)}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$ …外力の和＝全運動量の時間変化

$$\frac{d\,\vec{L}(t)}{dt} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right)$$ …外力のモーメントの和＝全角運動量の時間変化

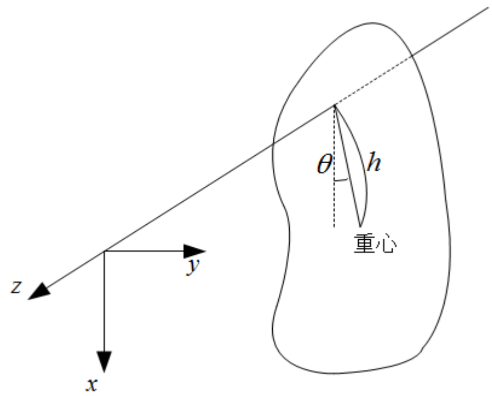
（ $\sum_i$ …剛体を微小に分割し質点の集合と考え、その個々の質点に関しての式を集めていくということを意味する。）

が成り立つ。成分で数えて6個の運動方程式が6個の変数の時間発展を決める。
（内力はこれらの式には登場しない。）

一般に $\vec{L}$ を6個の変数で表示するのは複雑なので、ここでは簡単な運動について考える。

§7.2　実体振り子

　ある一般的な剛体が固定回転軸の周りを回転する場合を考えよう。(x 軸方向に重力)
このとき、剛体の運動は 1 変数　$\theta(t)$　で表される。
回転軸を z 軸にとると



$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt}=\sum_i(\vec{r}_i\times\vec{F}_i)$$

の z 成分の式で　$\theta(t)$　は決まる。
角運動量の z 成分を　L_z　とすると、この剛体を
質点に分割して作られる質点系では

$$L_z=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)\dot{\theta}=I\dot{\theta}$$

となる。
ただし、I は慣性モーメントと呼ばれる値であり、この場合には

$$I=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)$$

として与えられる。慣性モーメントは直線運動での質量の表す意味と同じように、回転運動の変化のしにくさを表す量であり、慣性モーメントを用いることで角運動量と角速度とを関連づけることができる。一般には剛体の密度を　ρ　として、慣性モーメントは

$$I=mr^2\left(=\int dm\,r^2=\int\rho\,r^2\,dV\right)$$ (r:回転半径 , dm:微小質量)

として与えられる。今回の場合、剛体の密度を　$\rho(x,y,z)$　として、

$$m_i\to\rho(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$$

と考えると

$$L_z=I\dot{\theta}$$
$$I=\iiint(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

となる。
　また、回転軸にかかる力は慣性モーメントに寄与しない。
　重力のモーメントは、重力加速度　$\vec{g}$　として

$$\sum_i(\vec{r}_i\times m_i\vec{g})=\sum_i m_i(\vec{r}_i\times\vec{g})$$
$$=M\vec{R}\times\vec{g}$$
$$=\vec{R}\times M\vec{g}$$ (M:剛体の質量　$\vec{R}$　:重心の位置ベクトル)

と表示できるので、重心に　$M\vec{g}$　が作用してると考えてよい。
　重心の回転軸からの距離を h とすると、

$$\frac{dL}{dt}=-mgh\sin\theta$$
$$\Leftrightarrow I\ddot{\theta}=-Mgh\sin\theta$$
$$\Leftrightarrow\ddot{\theta}=\frac{-Mgh}{I}\sin\theta$$

となり、実体振り子の運動は長さが　$\frac{I}{Mh}$　の単振り子と場合と同じ方程式になることが分かる。
θ　が十分小さいとき、この運動は単振動であり、周期 T は　$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}}$　となる。

・回転運動のエネルギー

質点系を考えると、質点の持つ運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\sqrt{x_i^2+y_i^2}\,\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)\ddot{\theta}^2$$
$$= \frac{1}{2} I\,\ddot{\theta}^2$$

剛体でも $I=\iiint (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ とすると $T=\frac{1}{2}I\,\dot{\theta}^2$ が成り立つ。

ここで、重力によるポテンシャルを考えよう。重心の x 座標を G_x とすると

$$-\sum_i m_i\,g\,x_i = -Mg\,G_x$$
$$= mgh(1-\cos\theta)$$

が一般に成り立つ。これを用いると実体振り子の持つエネルギーは

$$E=\frac{1}{2}I\,\dot{\theta}^2+Mgh(1-\cos\theta)$$
$$\frac{dE}{dt}=I\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta}+Mgh\,\dot{\theta}\sin\theta$$
$$=0$$

となり、エネルギーは保存する。

以上のことから分かるように、回転運動と直線運動とには以下のような対応がある。

	直線運動	回転運動
変位	x	θ
慣性	m	I
運動量	$P=m\dot{x}$	$L=I\,\dot{\theta}$
運動方程式	$\frac{dP}{dt}=F$	$\frac{dL}{dt}=N$
運動エネルギー	$\frac{1}{2}m\dot{x}^2$	$\frac{1}{2}I\,\dot{\theta}^2$

何か物体を回転させようとしたとき、物体をもつ位置によって回転のさせやすさが違った、という経験は誰にでもあるだろう。これは慣性モーメントの値は回転軸のとり方によって変わる、という事実を意味している。しかし、先ほど示した定義に基づいて計算するのは大変な手間がかかる。慣性モーメントの計算を統一的に表現できないだろうか？

質量Mの剛体について、重心から距離hだけ離れた軸周りの慣性モーメント I_z を考えてみよう。（簡単のためz軸回りのみを考える。）

重心の座標を (x_G, y_G) 、回転軸を原点とする。このとき、座標は $(x, y = x_G + x', y_G + y')$ と表わせることに注意する。(x', y' は重心を原点とした座標系で設定される値。)
定義に基づいて慣性モーメントを計算すると

$$
\begin{aligned}
I_z &= \iiint (x^2+y^2)\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \\
&= \iiint \{(x_G+x')^2+(y_G+y')^2\}\rho(x', y', z')\,dx'\,dy'\,dz'
\end{aligned}
$$

となり、これを展開すると

$$
\begin{aligned}
I_z = (x_G^2+y_G^2)\iiint \rho(x', y', z')\,dx'\,dy'\,dz' + 2x_G\iiint x'\rho(x', y', z')\,dx'\,dy'\,dz' \\
+2y_G\iiint y'\rho(x', y', z')\,dx'\,dy'\,dz' + \iiint (x'^2+y'^2)\rho(x', y', z')\,dx'\,dy'\,dz'
\end{aligned}
$$

となる。右辺の各項についてその意味を確認していこう。

第1項について、 $x_G^2+y_G^2=h^2$ であるので、（第1項）= h^2M
第4項について、これは重心を通る軸周りの慣性モーメントに等しいので、重心を通るz軸周りの慣性モーメントを I_G とすると、(第4項)= I_G
第2項、第3項については、これが重心まわりの1次モーメントであることを考えると共に0となる。

以上のことを踏まえると、 $I_z = h^2M + I_G$ となる。（これを平行軸の定理という。）
すなわち、 I_G を求めておくと慣性モーメントはすぐに計算できるようになる。

§7.3 慣性モーメントの計算

重心を原点とした回転モーメントは非常に役に立つ。ここでは、簡単な質量分布を持ついくつかの剛体について、原点（重心）周りの慣性モーメントを計算しておく。
今回は2つしか紹介していないが、各自参考サイトなどを見て確認しておくとよい。

1.円筒（中空円柱）

半径aとする。このとき、z軸周りの慣性モーメントは

$$I = Ma^2$$

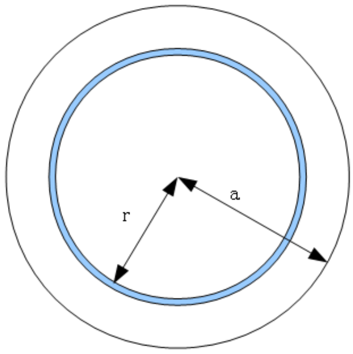
となる。

2.円盤

このとき、円盤の質量がMとすると、右図で示す微小部の質量は

$$dm = \frac{2\pi r M}{\pi a^2}\Delta r$$

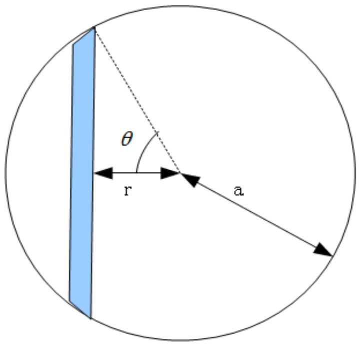
であるから、z軸回りの慣性モーメントは



$$\begin{aligned} I_z &= \int dm\, r^2 \\ &= \int_0^a \frac{2\pi M}{\pi a^2} r^3\, dr \\ &= \frac{M a^2}{2} \end{aligned}$$

となる。また、z軸回りの慣性モーメントはz軸からの距離のみに依存することが言えるので、円柱の厚みに関係なく、円柱のz軸回りの慣性モーメントは $\frac{M a^2}{2}$ となる。
x軸、y軸回りの慣性モーメントも考えてみよう。
このとき、右図のように分割すると微小部の質量は

$$dm = \frac{2\sqrt{a^2 - r^2} M}{\pi a^2}\Delta r$$



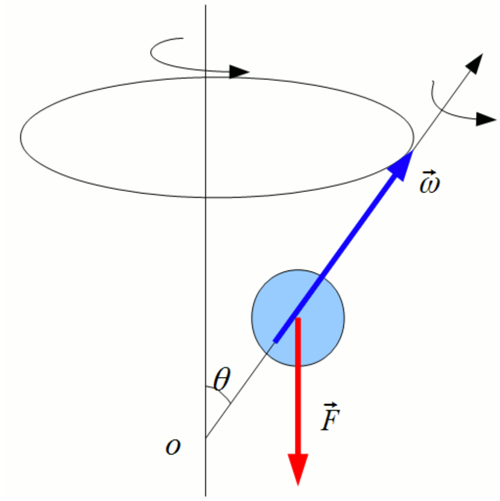
原点に対して反対にも同様の分割をとる。
円形なので、対称性から

$$\begin{aligned} I_x = I_y &= \int dm\, r^2 \\ &= \int_0^a \frac{4\sqrt{a^2 - r^2} M}{\pi a^2} r^2\, dr \\ &= \frac{4\mathrm{M}}{\pi a^2}\int_0^a r^2\sqrt{a^2 - r^2}\, dr \end{aligned}$$

$r = a\cos\theta$ とすると

$$\begin{aligned} I_x = I_y &= \frac{4\mathrm{M}}{\pi a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\, a^2\sin^2\theta\, d\theta \\ &= \frac{Ma^2}{4} \end{aligned}$$

§7.4　こまの歳差運動



最後にこまの歳差運動を考えてみよう。
右図はこまの歳差運動の模式図である。
各定数を次のように設定する。

ω　:こまの自転の角速度
Ω　:こまの自転軸の向きの回転の角速度
　　　（歳差運動）
M　:こまの質量

$\omega \gg \Omega$　とする。
こまの支点を原点とする。
こまの重心の位置ベクトルを　$\vec{R}$　とおくと

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{R}\times\vec{F}$$

となる。この式はこまが歳差運動することを表している。また

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| &= |\vec{L}|\,\Omega\sin\theta \\ &= I\,\omega\,\Omega\sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{R}\times\vec{F}| &= |\vec{R}|Mg\sin\theta \\ &= Mg\,l\sin\theta \qquad (\ l=|\vec{R}|\ \ \text{:重心の高さ})\end{aligned}$$

の 2 式より、 $\Omega=\dfrac{Mg\,l}{I\,\omega}$　が得られる。
ω　が遅くなると　Ω　は速くなる。