数学I（社会科学）期末試験問題解答 作成TA河口・鈴木、監修松本眞

問1

(ア) $(e^x)' = e^x$

(イ) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

(ウ) $(x^n)' = nx^{n-1}$

(エ) $(\sin x)' = \cos x$

(オ) $(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \left(\sin x \dfrac{1}{\cos x}\right)' = (\sin x)'\dfrac{1}{\cos x} + \sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'$

$= \cos x \dfrac{1}{\cos x} + \sin x\left(-\dfrac{1}{(\cos x)^2}\right)(\cos x)' = 1 - \dfrac{-\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(カ) $\theta = \arcsin x$ とおくと、$\sin\theta = x, -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ であり、

$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$($-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta \geq 0$ に注意）となる。

逆関数の微分法より $(\arcsin x)' = \dfrac{d\theta}{dx} = 1/\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ となる。

(キ) $(x^2\cos x)' = (x^2)'\cos x + x^2(\cos x)' = 2x\cos x - x^2\sin x$

(ク) $\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)' = -\dfrac{1}{(\sin x)^2}(\sin x)' = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

(ケ) $(\log(1+x^2))' = \dfrac{1}{1+x^2}(1+x^2)' = \dfrac{2x}{1+x^2}$

(コ) $(a^x)' = \left((e^{\log a})^x\right)' = \left(e^{(\log a)x}\right)' = e^{(\log a)x}((\log a)x)' = a^x \log a$

問2 以下で C は全て積分定数を表す。

(ア) ($r \neq -1$ のとき) $\displaystyle\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$

($r = -1$ のとき) $\displaystyle\int x^r dx = \int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$

(イ) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

(ウ) 部分積分法より $\displaystyle\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = x\log x - \int x(\log x)' dx$

$\displaystyle= x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - \int 1 dx = x\log x - x + C$

(エ) $x = 2\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。置換積分法を適用すると、$\dfrac{dx}{d\theta} = 2\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$\displaystyle\int \frac{1}{4+x^2}dx = \int \frac{1}{4+(2\tan\theta)^2} \cdot 2\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int \frac{1}{4+4\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} \cdot 2\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$\displaystyle= \int \frac{2}{4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}d\theta = \int \frac{1}{2}d\theta = \frac{1}{2}\theta + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$

(オ) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}(\log|x-1| - \log|x+1|) + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

問 3

1. $(C\text{ の長さ}) = \int_a^b \sqrt{(dx/dt)^2+(dy/dt)^2}dt$

2.
$$
\begin{aligned}
(C_1\text{ の長さ}) &= \int_0^a \sqrt{\left((t^3-3t)'\right)^2+\left((3t^2)'\right)^2}dt \\
&= \int_0^a \sqrt{(3t^2-3)^2+(6t)^2}dt \\
&= \int_0^a \sqrt{9(t^4+2t^2+1)}dt \\
&= \int_0^a 3(t^2+1)dt \quad (t^2+1\geq 0\text{ に注意}) \\
&= \left[t^3+3t\right]_0^a \\
&= a^3+3a
\end{aligned}
$$

問 4 $f(x)=\log x$ とおく。$n\geq 1$ について $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$ となることが帰納的に分かる。よって $f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ となる。また $f(1)=0$ である。よって、$\log x$ の $x=1$ の周りでのテーラー展開は $\log x = f(1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ となる。$x=1.2$ を代入すると、$\log 1.2 = 0.2-0.2^2/2+0.2^3/3-0.2^4/4+0.2^5/5-\cdots = 0.2-0.02+0.00266666\cdots-0.0004+0.000064-\cdots$ で、四つ目まで計算すると $0.18226666\cdots$、五つ目まで計算すると $0.18233066\cdots$ となる。問題文の (事実) より級数の値はこの間にあるので、小数第五位を四捨五入すると 0.1823 となる。

問 5

1. まず、$\cos^2(\arcsin(X))+\sin^2(\arcsin(X))=1$ より、

$$
\begin{aligned}
\cos^2(\arcsin(X)) &= 1-\sin^2(\arcsin(X)) \\
&= 1-X^2
\end{aligned}
$$

である。ここで、$-\pi/2\leq \arcsin(X)\leq \pi/2$ より、$\cos(\arcsin(X))\geq 0$ であるから、$\cos(\arcsin(X))=\sqrt{1-X^2}$ である。よって、

$$
\begin{aligned}
\sin(2\arcsin(X)) &= 2\sin(\arcsin(X))\cos(\arcsin(X)) \quad (\because\text{ 倍角公式}) \\
&= 2\cdot X\cdot\sqrt{1-X^2}.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
S &= \int_a^b \sqrt{1-4x^2}dx \\
&= \int_{\arcsin(2a)}^{\arcsin(2b)} \sqrt{1-\sin^2\theta}\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta \quad (x=\frac{\sin\theta}{2}\text{とおいた}) \\
&= \int_{\arcsin(2a)}^{\arcsin(2b)} \cos\theta\cdot\frac{\cos\theta}{2}\cdot d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\arcsin(2a)}^{\arcsin(2b)} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\arcsin(2a)}^{\arcsin(2b)} \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(\arcsin(2b)+\frac{\sin(2\arcsin(2b))}{2}\right)-\left(\arcsin(2a)+\frac{\sin(2\arcsin(2a))}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\arcsin(2b)+2b\sqrt{1-4b^2}-\arcsin(2a)-2a\sqrt{1-4a^2}\right).
\end{aligned}
$$

問6

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(e^{x\log x}\right)' \\
&= e^{x\log x}\cdot(x\log x)' \\
&= x^x\cdot(1\cdot\log x + x\cdot 1/x) \\
&= x^x(1+\log x)
\end{aligned}
$$

である。よって、$x<1/e$ のとき $f'(x)<0$, $x=1/e$ のとき $f'(x)=0$,$x>1/e$ のとき $f'(x)>0$ である。したがって、$f(x)$ は $x=1/e$ で最小値 $e^{-1/e}$ をとる。一方、$f(x)$ は $x\to\infty$ のとき無限大に発散するので、$f(x)$ の最大値は存在しない。

問 7

1.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xy^2-6y\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2x^2y-6x+2y-6\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2y^2\\ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4xy-6\\ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2x^2+2\end{aligned}$$

3. 停留点は $\left(\begin{array}{lcll}\frac{\partial f}{\partial x}f(x,y) &=& 2xy^2-6y=0 & \cdots\ (1)\\ \frac{\partial f}{\partial y}f(x,y) &=& 2x^2y-6x+2y-6=0 & \cdots\ (2)\end{array}\right.$ の解である。

(1) より $2(xy-3)y=0$ だから、$y=0$ または $xy=3$ となる。$y=0$ のとき (2) より $-6x-6=0$ だから、$x=-1$、$xy=3$ のとき (2) より $2(xy-3)x+2y-6=2y-6=0$ だから、$y=3, x=1$ となる。よって停留点は $(-1,0)$ と $(1,3)$ である。

$D=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(4xy-6)^2-2y^2(2x^2+2)$ と置くと、D の $(-1,0)$ での値は $36>0$ だから、$(-1,0)$ は $f(x,y)$ の鞍点である。D の $(1,3)$ での値は $-36<0$ で $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(1,3)=18>0$ だから $f(x,y)$ は $(1,3)$ で極小値を取る。

4. $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\le x\le 4, 0\le y\le 4\}$ と置く。S は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合だから、最大値の定理により $f(x,y)$ は S 上最大値と最小値を持つ。また最大値、最小値をとる点は、S の境界上に存在するか、または S の内点で、停留点である。まず、停留点での $f(x,y)$ の値は $f(-1,0)=0$ と $f(1,3)=-18$ である。次に境界での最大値と最小値を求める。S の境界は $T_1=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2|0\le y\le 4\}, T_2=\{(4,y)\in\mathbb{R}^2|0\le y\le 4\}, T_3=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2|0\le x\le 4\}, T_4=\{(x,4)\in\mathbb{R}^2|0\le x\le 4\}$ と分けられる。

T_1 上での最大値、最小値は、$f(0,y)=y^2-6y=(y-3)^2-9\quad(0\le y\le 4)$ の最大値、最小値だから、それぞれ $0(y=0$ のとき $), -9(y=3$ のとき $)$ である。

T_2 上での最大値、最小値は、$f(4,y)=17y^2-30y=17(y-\frac{15}{17})^2-\frac{225}{17}\quad(0\le y\le 4)$ の最大値、最小値だから、それぞれ $152(y=4$ のとき $), -\frac{225}{17}(y=\frac{15}{17}$ のとき $)$ である。

T_3 上での最大値、最小値は、$f(x,0)=0\quad(0\le x\le 4)$ の最大値、最小値だから、共に 0 である。

T_4 上での最大値、最小値は、$f(x,4)=16x^2-24x-8=16(x-\frac{3}{4})^2-17\quad(0\le x\le 4)$ の最大値、最小値だから、それぞれ $152(x=4$ のとき $), -17(x=\frac{3}{4}$ のとき $)$ である。

以上をまとめて、最大値は $152(x=4, y=4$ のとき $)$、最小値は $-18(x=1, y=3$ のとき $)$ である。