

数学 IA ノート

木曜 3 限 高木俊輔師

理科 1 類 27 組前多啓一

理科 1 類 27 組夏学期木曜 3 限の数学 IA のノートをデータで打ち込んだだけのものです。間違いがあったら、メールしてくださると助かります。L^AT_EX をはじめて利用したので見苦しい点もあると思いますが、ご了承ください。

1 数列の極限

$$\mathbf{N} = \{ \text{自然数全体} \} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbf{Z} = \{ \text{整数全体} \} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbf{Q} = \{ \text{有理数全体} \} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}$$

$$\mathbf{R} = \{ \text{実数全体} \} \ni \sqrt{2}$$

† 実数とは何か

この講義では、実数とは、次の公理を満たすものとする。

- ・ 四則演算 (加減乗除)
- ・ 順序

$\{a, b \in \mathbf{R}, \forall a \forall b\}$ に対して、 $a > b, a = b, a < b$ のいずれかが成り立つ。

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

- ・ $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ さらに、 \mathbf{Q} 上の四則演算・順序は通常のも的一致する。
- ・ 次の 2 つの公理を満たす (実数の連続性)

公理 1 アルキメデスの公理

$\forall a, \forall b \in \mathbf{R}, a > 0, b > 0$ に対して、 $a < Nb$ となるような自然数 N が存在する。

公理 2 区間縮小法

$I_n = [a_n, b_n] = \{x \in \mathbf{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\} (n \in \mathbf{N})$ が次の 2 条件を満たすとする。

(i) $\forall n \in \mathbf{N}$ に対して $I_n \supset I_{n+1}$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ このとき、 $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} I_n = \{c\}$ となる実数 c が存在し、さらに、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$

注意 具体的には、有理数を「完備化」して実数を構成する。

† $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ をどのように定義するか

例

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ をどのように数学的に正当化するか？

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow$ 「 n を限りなく大きくしていくと, $|a_n - a|$ は限りなく 0 に近づく」

\Leftrightarrow 「どんなに小さい実数 $\varepsilon > 0$ をとってきても, n を十分大きくとれば, $|a_n - a| < \varepsilon$

定義

a_n を実数列 ($a_n \in \mathbf{R}$), $a \in \mathbf{R}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ($a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$))

\Leftrightarrow 任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在し, $n \geq N$ ならば, $|a_n - a| < \varepsilon$

$a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$) となるとき, $\{a_n\}$ は a に収束するという.

例 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$\forall \varepsilon$ に対し, アルキメデスの公理により, $1 < \varepsilon N$ となる自然数 N が存在する.

もし, $n \geq N$ であれば, $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. \square

命題

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ とする. ($a, b \in \mathbf{R}$)

このとき, (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$

(3) $\forall n \in \mathbf{N}$ に対して, $b_n \neq 0, b \neq 0$ とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b$

\therefore

(1) $\forall \varepsilon$ を一つ固定する.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \exists N_1 \in \mathbf{N}$ が存在して, $n \geq N_1$ ならば, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \Leftrightarrow \exists N_2 \in \mathbf{N}$ が存在して, $n \geq N_2$ ならば, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ として, $n \geq N$ ならば, $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

よって, (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ になる. \square

すなわち, 「収束していれば, \lim と四則演算は交換可能」ということ.

定理(はさみうちの原理)

$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して, $b_n \leq a_n \leq c_n$ とする.

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ ($a \in \mathbf{R}$) ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

\therefore

$\forall \varepsilon$ を一つ固定する.

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \Leftrightarrow \exists N_1 \in \mathbf{N}$ が存在して, $n \geq N_1$ ならば, $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a \Leftrightarrow \exists N_2 \in \mathbf{N}$ が存在して, $n \geq N_2$ ならば, $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ として, $n \geq N$ ならば, $a - \varepsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < a + \varepsilon$

よって, $|a_n - a| < \varepsilon$ となるので, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ になる. \square

例 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ ($1 > r > 0$)

$\frac{1}{r} > 1$ より, $\frac{1}{r} = 1 + \theta$ ($\theta > 0$) と書ける.

$$\frac{1}{r^n} = (1 + \theta)^n = 1 + n\theta + \cdots + \theta^n > n\theta$$

$$0 < r^n < \frac{1}{n\theta} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

はさみうちの原理より, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$. \square

定義

(1)

a が S の上界 $\Leftrightarrow \forall x \in S$ に対して, $x \leq a$

S が上に有界 $\Leftrightarrow S$ の上界が存在する.

(下界, 下に有界も同様に定義する.)

(2)

$\sup S$ S の上界のうち, 最小のもの

$\inf S$ S の下界のうち, 最大のもの

例

$$S = \{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbf{N}\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$$

$$\sup S = 1 \quad \inf S = 0$$

たとえば, 上の例では, $\max S$ は存在しない. 1 に限りなく近い S の元はとれるが, $1 \notin S$

定理

S が上に有界ならば, $\sup S$ は常に存在する.

S が下に有界ならば, $\inf S$ は常に存在する.

注意

$\max S$ は常に存在するとは限らないが, $\sup S$ は上に有界ならば, 常に存在する. $\max S$ が存在すれば,

$$\sup S = \max S$$

\therefore

S の上界を一つ取る. $b_1 \in R$

S の上界ではない元を一つ取る. $a_1 \in R$

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

c_1 が S の上界ならば, $b_2 = c_1, a_2 = a_1$ とおく.

c_1 が S の上界でないならば, $b_1 = b_2, a_2 = c_1$ とおく.

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

c_2 が S の上界ならば, $b_3 = c_2, a_3 = a_2$ とおく.

c_2 が S の上界でないならば, $b_2 = b_3, a_3 = c_2$ とおく.

これを繰り返して, 数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ を定義する.

$$\cdot a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

$$\cdot b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) (\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0)$$

区間縮小法の公理から, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ となる $c \in \mathbf{R}$ が存在する.

まず c は S の上界であることを示す.

上界でないとする, $\exists x \in S$ が存在して, $x > c$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ より, $\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して,
 $n \geq N$ ならば, $|b_n - c| = b_n - c < x - c$ ($\varepsilon = x - c$ の場合を考えている)

つまり, $b_n < x$

$\{b_n\}$ の定義から, b_n は $\forall n \in \mathbf{N}$ に対して, b_n は S の上界なので, これは矛盾. よって, c は S の上界.
 次に, $c = \sup S$ を示す.

もし, $c > d$ となる S の上界 $d \in \mathbf{R}$ が存在したとすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ より, $\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して,
 $n \geq N$ ならば, $|a_n - c| = c - a_n < c - d$ ($\varepsilon = c - d$)

つまり, $d < a_n$ $\{a_n\}$ の定義から, $\forall n$ に対して, a_n は S の上界ではない.

ゆえに, d も S の上界ではない. これは矛盾. よって, $c = \sup S$. \square

定理

数列 $\{a_n\}$ が単調増加かつ上に有界ならば, 数列 $\{a_n\}$ は収束する.

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \quad \exists M > 0 \text{ が存在して, } \forall n \in \mathbf{N} \text{ に対して, } a_n \leq M$$

数列 $\{a_n\}$ が単調減少かつ下に有界ならば, 数列 $\{a_n\}$ は収束する.

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \quad \exists M < 0 \text{ が存在して, } \forall n \in \mathbf{N} \text{ に対して, } a_n \geq M$$

\therefore

1 つ上の定理から, $\sup\{a_n\}$ が存在する. $\sup\{a_n\} = a$ とおく.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ を示す.

もし $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq a$ とすると, $\exists \varepsilon > 0$ が存在して, $\forall n \in \mathbf{N}$ に対して, $|a_n - a| \geq \varepsilon$ となる $n \geq N$ が存在.

つまり, $\exists \varepsilon$ が存在して, $\forall N \in \mathbf{N}$ に対して, $a - \varepsilon \geq a_N$

$a - \varepsilon$ は, $\{a_n\}$ の上界となるが, これは矛盾 ($a = \sup S$ の最小性に反する.).

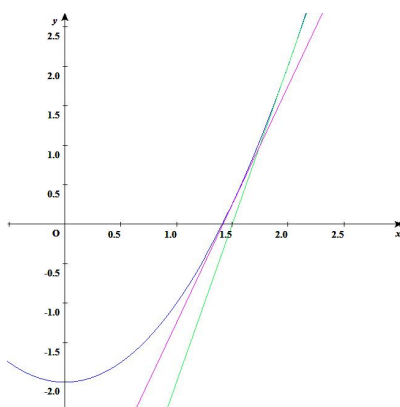
$$a - a_n \geq \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon \geq a_n \geq a_N$$

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. \square

系

単調増加で上に有界な数列は収束する.

例



数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する.

$$a_1 = 2$$

$x = a_n$ での接線 l_n の方程式は,

$$y - f(a_n) = f'(a_n)(x - a_n) \Leftrightarrow y = 2a_n x - a_n^2 - 2$$

接線 l_n と x 軸の交点の x 座標は,

$$x = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$$

これを a_{n+1} とおく.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$ となることを示す.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = \sqrt{2} \quad (\because \text{相加相乗平均})$$

よって, 数列 a_n は下に有界.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2 - 2}{2a_n} > 0 \quad (\because a_n \geq \sqrt{2})$$

よって、数列 $\{a_n\}$ は単調減少.

$\Rightarrow \{a_n\}$ は収束する. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ となる $a \in \mathbf{R}$ が存在する ($a > 0$) (\because 系 (単調減少の場合)).

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} a_n + \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{1}{2} a + \frac{1}{a}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} a + \frac{1}{a}$$

$$\therefore a^2 = 2$$

$$\therefore a > 0 \text{ より, } a = \sqrt{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$$

$\{a_n\}$ は $\sqrt{2}$ の近似を与えている. (Newton 法)

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{a_1} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$a_3 = \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{a_2} = \frac{17}{12} = 1.4166\dots$$

$$a_4 = \frac{1}{2} a_3 + \frac{1}{a_3} = \frac{577}{408} = 1.41426\dots$$

2 関数の極限

$f: I \rightarrow \mathbf{R}$ 関数

$a \in \mathbf{R} \exists b > 0$ が存在して, $(a-b, a) \cup (a, a+b) \subset I$ ($a \in I$ とは限らない)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A = x$ を a に限りなく近づけると, $f(x)$ は A に限りなく近づく.

$= x$ を a に限りなく近づけたとき「その近づけ方に依らず」 $f(x)$ は A に限りなく近づく.

定義

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ($I \ni x_n \neq a$) なる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = a$ ($I \ni x_n > a$) となる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = a$ ($I \ni x_n < a$) となる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

例

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

($f(x)$ は $x = 0$ では定義されていない.)

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ($x > 0$) となる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

よって, $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ($y < 0$) となる任意の数列 $\{y_n\}$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$.

よって, $\lim_{y \rightarrow 0-0} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は存在しない.

命題

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon$ に対して, $\exists \delta$ が存在し, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon$ に対して, $\exists \delta$ が存在し, $0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon$ に対して, $\exists \delta$ が存在し, $0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

∴

(⇐) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a (I \ni x_n \neq a)$ となる任意の $\{x_n\}$ を 1 つとる. $\forall \varepsilon$ を 1 つ固定する.

仮定より, $\exists \delta > 0$ が存在して, $0 < |x - a| < \varepsilon$ ならば, $|f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ より, $\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば, $0 < |x_n - a| < \delta$

よって, $n \geq N$ ならば, $|f(x_n) - A| < \varepsilon$

つまり, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

これより, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

(⇒) $\exists \varepsilon$ が存在して, $\forall \delta$ に対して,

$0 < |x - a| < \delta$ かつ $|f(x) - A| \geq \varepsilon$

となる $x \in \mathbf{R}$ が存在すると仮定する (背理法). $\forall n \in \mathbf{N}$ に対して, $\delta = \frac{1}{n}$ の時を考える.

$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$

となる $x_n \in \mathbf{R}$ が存在する. はさみうちの原理から, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

仮定より, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

しかし, $\forall n \in \mathbf{N}$ に対して, $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. これは矛盾. \square

系

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$

定義

$f: I \rightarrow \mathbf{R} \quad a \in I$

f が $x = a$ で連続 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists \delta$ が存在して, $|x - a| < \delta$ ならば, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

f が (I 上) 連続 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall a \in I$ に対して, f は $x = a$ で連続

◎連続 \equiv グラフがつながっている

例

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 0$$

f は $x = 0$ で不連続.

命題

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ とする.

(1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$

(2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB$

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ (ただし, $g(x) \neq 0$ かつ $B \neq 0$ とする.)

特に, $f, g: I \rightarrow \mathbf{R} \quad x = a$ で連続とすると,

$$f(x) + g(x), f(x)g(x) \frac{f(x)}{g(x)} (g(a) \neq 0)$$

はいずれも $x = A$ で連続.

† a^x は次のように定義する.

(i) x が有理数のとき

$x = \frac{m}{n}$ ならば, $a^x = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ と定義する.

(ii) x が無理数のとき

$a > 1$ とする. $S_x = \{a^t | t \in \mathbf{Q}, t < x\} \subseteq \mathbf{R}$

$x < u$ となる $u \in \mathbf{Q}$ をとると, a^u は S_x の上界.

つまり, S_x は上に有界. $a^x = \sup S_x$ と定義する. $x < x'$ ならば, $a^x < a^{x'}$ となる.

例

$x = 1.23423123\dots$ 無理数

$x_n = x$ の小数点以下第 n 位まで $\rightarrow a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$

定理

$f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 連続

(1) 最大値・最小値の定理

$\exists c, d \in [a, b]$ が存在して, $\forall x \in [a, b]$ に対して, $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$

(2) 中間値の定理

$f(a) < f(b)$ とする. $f(a) < \forall \gamma < f(b)$ に対して, $f(c) = \gamma$ となる $c \in [a, b]$ が存在する.

注意

(1) f が連続でなければ成り立たない.

$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$f(-1) = -1 < \frac{1}{2} < 1 = f(1)$

$f(c) = \frac{1}{2}$ となる $c \in [-1, 1]$ は存在しない.

$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -\infty$

より, 最大値, 最小値も存在しない.

(2) I が閉区間でなければ成り立たない.

$f: [0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$

$f(x) = x$

$\sup f(x) = 1$ だが, f は最大値をもたない.

∴

(1) 「点列コンパクト」を学んだあとに証明する.

(2) $S = \{x \in [a, b] | f(x) < \gamma\}$ とおく.

$S \subset [a, b]$ より, S は上に有界. $c = \sup S$ とおく.

$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して, $c = \frac{1}{n}$ は S の上界ではない. $\exists x_n \in S$ が存在して, $c - \frac{1}{n} < x_n$ $c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$ はさみうちの原理から,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$

一方, $x_n \in S$ より, $f(x_n) < \gamma$

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \gamma$$

$$y_n = c + \frac{1}{n} \text{とおくと,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$$

$$y_n > c \quad y_n \notin S$$

よって, $y_n \geq \gamma \quad f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \geq \gamma$ したがって, $f(c) = \gamma$. \square

$f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 狭義単調増加な連続関数

$$a \leq s < t \leq b \Rightarrow f(s) < f(t)$$

定義

$$f(s) = f(t) \Leftrightarrow s = t (s, t \in [a, b])$$

$f(a) \leq \forall y \leq f(b)$ に対して, 中間値の定理を使うと, $y = f(x)$ となる $x \in [a, b]$ がただ一つ存在する.

$$f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbf{R}$$

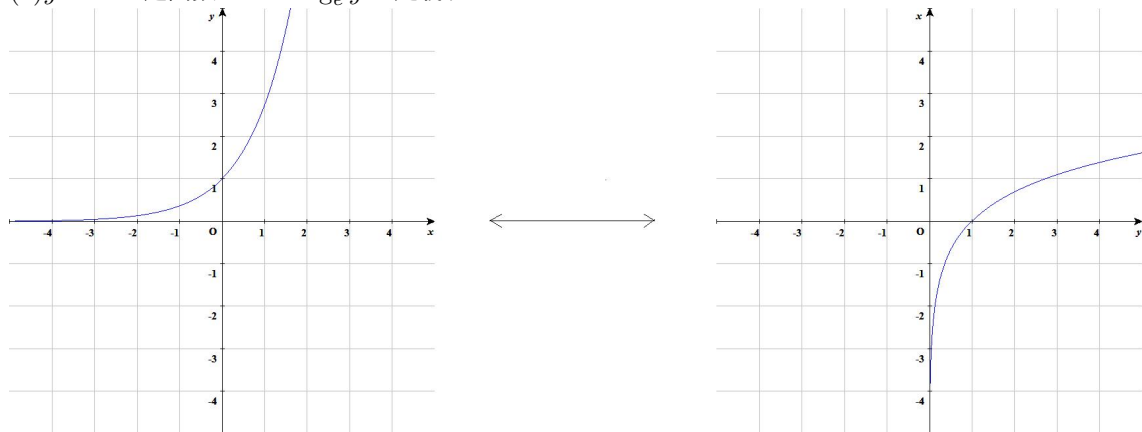
これを f の逆関数という.

注意

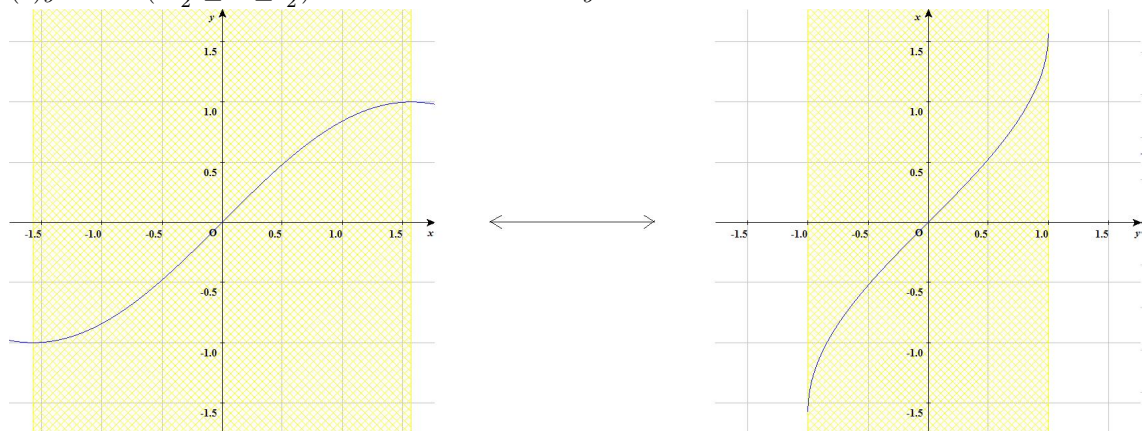
$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

例

(1) $y = e^x$ の逆関数を $x = \log_e y$ と定義する.



(2) $y = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) の逆関数を, $x = \arcsin y$ と定義する.



(3) $y = \cos (0 \leq x \leq \pi)$ の逆関数を $x = \arccos y$ と定義する.

(4) $y = \tan x (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ の逆関数を, $x = \arctan y$ と定義する.

注意

$\arcsin y, \arccos y, \arctan y$ の値域に注意.

命題

$f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 狭義単調増加でかつ連続 $\Rightarrow f^{-1}[f(a), f(b)] \rightarrow \mathbf{R}$ は連続

\therefore

$f(a) \leq \forall A \leq f(b)$ に対し, $f^{-1}(y)$ が $y = A$ で連続を示す.

$A = f(c)$ となる $c \in [A, B]$ をとる. 簡単のため, $c \neq A, B$ とする.

$\forall \varepsilon$ を 1 つ固定する. $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset [A, B]$ と仮定してよい.

$f(c - \varepsilon) = A - \delta_1$ $f(c + \varepsilon) = A + \delta_2$ と書くと, f は単調増加だから, $\delta_1, \delta_2 > 0$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ とおくと,

$A - \delta < y < A + \delta$ となる任意の y に対して,

$f(c - \varepsilon) \leq A - \delta < y < A + \delta \leq f(c + \varepsilon)$

$c - \varepsilon < f^{-1}(y) < c + \varepsilon$

$c = f^{-1}(A)$ より, $|f^{-1}(y) - f^{-1}(A)| < \varepsilon$

これより, f^{-1} は $y = A$ で連続. \square

この命題より, $x = \arcsin y, x = \arccos y, x = \arctan y$ はすべて連続.

3 微分

定義 $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ $x_0 \in I$

(1) f が $x = x_0$ で微分可能 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ が存在する.

(2) f が $(I$ 上) 微分可能 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x_0 \in I$ に対して, f が $x = x_0$ で微分可能.

このとき, $f': I \rightarrow \mathbf{R}$ もしくは, $\frac{df}{dx}: I \rightarrow \mathbf{R}$ を f の導関数という.

命題

f が $x = x_0$ で微分可能 $\Rightarrow f$ は $x = x_0$ で連続

\therefore

f が $x = x_0$ で連続 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x + h) = f(x)$

$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x + h) - f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \cdot h \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = 0. \square$

例

$f(x) = |x|$ について,

$\lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{h}{h} = 1$ $\lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{-h}{h} = -1$

よって, $f(x)$ は $x = 0$ で微分不可能.

命題 $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 狭義単調増加で微分可能さらに, $f'(x) \neq 0 (\forall x \in [a, b])$ とする.

$\Rightarrow f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbf{R}$ も微分可能で, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

∴

$f^{-1}(y)$ が $y = y_0$ で微分可能であることを示す.

$x = f^{-1}(y), x_0 = f^{-1}(y_0)$ とおく. $f^{-1}(y)$ は連続なので, $y \rightarrow y_0$ のとき, $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x)}. \square$$

例

$x = \arcsin y$ ($\sin x$)' $\neq 0$ のとき微分可能.

$\sin x = y$ の両辺を y で微分.

$$(\cos x)(\arcsin y)' = 1$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2} \text{ より, } \cos x \geq 0$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

命題(Rolle の定理)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 微分可能 $c \in (a, b)$

f が $x = c$ で極大(極小) $\Rightarrow f'(c) = 0$

∴

$f'(c)$ が $x = c$ で極大 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ が存在して, $c \neq \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$ に対して, $f(x) < f(c)$.

$$c - \delta < x < c \text{ のとき, } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

$$c < x < c + \delta \text{ のとき, } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$$

$$\text{よって, } \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

$$\text{ゆえに, } \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = 0. \square$$

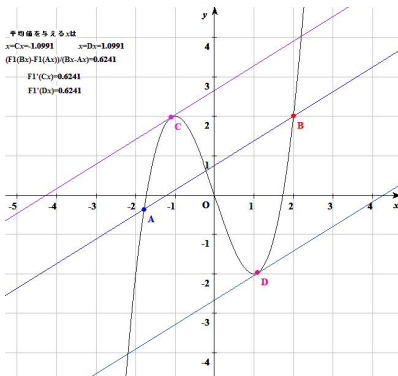
定理(平均値の定理)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 連続

さらに, f は (a, b) 上微分可能とする. このとき,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

となる $c \in (a, b)$ が存在する.



∴

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ に対して平均値の定理が成り立つと仮定すると,

$$0 = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} = \varphi'(c)$$

となる c が存在する.

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ より,}$$

$$\varphi'(c) = 0 \text{ ならば, } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

よって, $f(a) = f(b)$ の場合を示せばよい.

($f'(c) = 0$ となる c が存在することを示す.)

f が定数関数だとすると明らか. f は定数関数ではないとする.

最大値, 最小値の定理より, f は最大値 M , 最小値 m をもつ.

f は定数関数ではないので, $M > f(a) = f(b)$, もしくは, $m < f(a) = f(b)$.

$M > f(a) = f(b)$ とする. $M = f(c)$ となる $c \in [a, b]$ よって, M は $x = c$ で極大.

したがって, 前の命題より, $f'(c) = 0$ □.

$[a, x]$ 上, 平均値の定理を適用すると,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$$

となる $a < c < x$ が存在する.

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a) \quad \text{「一次近似」}$$

$f : I \rightarrow \mathbf{R}$ が微分可能 $\Rightarrow f' : I \rightarrow \mathbf{R}$ 導関数

$f' : I \rightarrow \mathbf{R}$ が微分可能 $\Rightarrow f'' : I \rightarrow \mathbf{R}$ 2次導関数 (f は2階微分可能)

$f'' : I \rightarrow \mathbf{R}$ が微分可能 $\Rightarrow f'''(f^{(3)}) : I \rightarrow \mathbf{R}$ 3次導関数 (f は3階微分可能)

$f^{(n)} : I \rightarrow \mathbf{R}$ を $\frac{d^n f}{dx^n} : I \rightarrow \mathbf{R}$ とも書く.

定義

f が C^n 級 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} f$ が n 階微分可能かつ f^n が連続.

f が C^∞ 級 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} f$ が何回でも微分可能.

例

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

$f(x)$ は C^1 級.

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = 0$$

よって, $f'(x)$ は $x = 0$ で微分不可能 (f は C^2 級ではない).

定理(Taylor の定理)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ C^{n-1} 級

さらに, f は (α, β) 上 n 階微分可能とする.

$a, x \in [\alpha, \beta]$ のとき,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

となる $a < c < x$ もしくは, $x < c < a$ が存在する.

特に, $a = 0$ の場合,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

このとき, $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = R_n(x, a) \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = R_n(x, 0)$ を (Lagrange の) 剰余項という.

∴

$x > a$ とする ($x < a$ の場合も同様). x を固定する.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{A}{n!}(x-a)^n$$

となる実数 A をとる.

$a \leq t \leq x$ とし, $F(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{A}{n!}(x-t)^n$ という関数 $F[a, x] \rightarrow \mathbf{R}$ を考える. F は $[a, x]$ 上連続で, (a, x) 上微分可能.

$F(a) = f(a)$ $F(x) = f(x)$ であるから, Rolle の定理より, $F'(c) = 0$ となる $a < c < x$ が存在する.

$$F'(x) = f'(t) + \left(\frac{f'(t)}{1!}(x-t)\right)' + \left(\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2\right)' + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - \frac{A}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

$$0 = F'(c) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} - \frac{A}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}$$

これより, $A = f^{(n)}(c)$. \square

注意

剰余項 $R_n(x, a)$ の表し方は 1 通りではない. 同様の方法で,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^n(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}(x-a)$$

$(a < c < x, x < c < a)$

$\frac{f^n(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}(x-a) = R_n(x, a)$ を Cauchy の剰余項という.

定義

$f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ C^∞ 級

$(a, x) \in [\alpha, \beta]$

Taylor の定理より,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

もし, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = 0$ ならば,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と書ける. これを, $f(x)$ の $x = a$ での Taylor 展開という.

例

$$(1) f(x) = e^x$$

$$f^{(k)}(x) = e^x (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$f^{(k)}(0) = 1$$

Taylor の定理より,

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^c}{n!}x^n \quad (0 < c < x \text{ または } x < c < 0)$$

$0 < c < x$ とする. ($x < c < 0$ の場合も同様)

$$0 \leq |R_n(0, x)| \leq e^x \frac{x^n}{n!} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

よって, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, a) = 0$$

より, e^x は Taylor 展開可能.

$$\therefore e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots (x \in \mathbf{R})$$

$$(2) f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \quad f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} \quad f''(0) = -\frac{1}{4} \quad f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$$

Taylor の定理より,

$$\sqrt{1+x} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}(1+c)^{-\frac{5}{2}}x^3$$

$x = 0.01$ を代入

$$\sqrt{1.01} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot (0.01) - \frac{1}{8} \cdot (0.0001) = 1.0049875$$

$$\text{誤差 } 0 < \frac{1}{16}(1+c)^{-\frac{5}{2}}(0.01)^3 < \frac{1}{16} \times 10^{-6}$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 3 \cdot 1}{2^k} (1+x)^{\frac{1}{2}-k}$$

$f^k(0) = A_k$ とすると, Taylor の定理より,

$$\sqrt{1+x} = 1 + A_1x + \frac{A_2}{2}x^2 + \cdots + \frac{A_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}x$$

$c = \theta x (0 < \theta < 1)$ とおくと,

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!} - (1-\theta)^{n-1}x^n$$

$|x| < 1$ とする.

$$|R_n| = \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3 \cdot 1}{2^n(n-1)!} (1+\theta x)^{\frac{1}{2}-n} (1-\theta)^{n-1} |x|^n$$

$$\geq \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3 \cdot 1}{(2n-n-2)(2n-4)\cdots 4 \cdot 2 \cdot 2} (1-\theta|x|)^{\frac{1}{2}-n} (1-\theta)^{n-1} |x|^n$$

$|x| < 1, 0 < 1-\theta < 1-\theta|x|$ より,

$$|x|^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \left(\frac{1-\theta}{1-\theta|x}\right)^{n-1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \text{ なので,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

よって, $\sqrt{1+x}$ は $|x| < 1$ で Taylor 展開可能で,

$$\sqrt{1+x} = 1 + A_1x + \cdots + \frac{A_n}{n!}x^n + \cdots (|x| < 1)$$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} x^n (\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, 0) = 0)$ となるとき, f は $x = 0$ の周りで Taylor 展開可能という.

問い

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ はいつ収束するか.

(2) いつでも Taylor 展開可能か.

(3) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n (|x| < r)$ となるとき,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!} x^n \text{ となるか. } (\sum \text{ と } \frac{d}{dx} \text{ は交換可能か.})$$

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} (|x| < r) \text{ となるか. } (\sum \text{ と } \int \text{ は交換可能か.})$$

(2) は No!

例 $f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

f は $x = 0$ で微分可能で, $f'(0) = 0$.

同様にして, $f''(0) = f^{(3)}(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \cdots = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 (x \in \mathbf{R})$$

一方, $x > 0$ ならば, $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \neq 0$
 よって, $f(x)$ は $x = 0$ で Taylor 展開不可能.

4 級数

定義(上極限・下極限)

$a_n (a_n \in \mathbf{R})$

$S = \{a_n | n \in \mathbf{N}\}$ は上に有界とする. $\forall k \in \mathbf{N}$ に対して, $S_k = \{a_n | n \geq k\}$ とおく.

$S \supset S_1 \supset S_2 \cdots$

各 S_k は上に有界なので, $\sup S_k = \bar{a}_k$ とおく.

$\bar{a}_1 \geq \bar{a}_2 \geq \bar{a}_3 \geq \cdots$

・ $\{\bar{a}_k\}$ が下に有界な場合

$\{\bar{a}_k\}$ は収束する. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k$ と定義する.

・ $\{\bar{a}_k\}$ が下に有界でない場合

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ と定義する.

(S が上に有界でない場合には, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ と定義する.)

$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ も同様に定義する (sup を inf に変える).

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ を数列 a_n の上極限, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ を数列 a_n の下極限という.

例 $a_n = (-1)^n (a + \frac{1}{n})$

$k = 2m$ のとき

$\bar{a}_k = \sup S_k = \sup \{(-1)^n (1 + \frac{1}{n}) | n \geq k\} = 1 + \frac{1}{k}$

$k = 2m + 1$ のとき

$\bar{a}_k = 1 + \frac{1}{k+1}$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = 1$

同様に, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$

注意

(1) $\inf S_k = \underline{a}_k \leq a_k \leq \bar{a}_k = \sup S_k$

(2) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

命題

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$

(1) $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば, $a_n - \alpha > \varepsilon$

かつ

(2) $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\alpha - \varepsilon < a_n$ となる n が無限個存在する.

∴

(\Rightarrow)

$\forall \varepsilon$ を 1 つ固定する.

$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = \alpha$ より, $\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して, $k \geq N$ ならば, $\alpha - \varepsilon < \bar{a}_k < \alpha + \varepsilon$

$a_k \leq \bar{a}_k$ より, $k \geq N$ ならば,

$a_k \leq \overline{a_k} < \alpha + \epsilon$ (1) はOK. \square

$\alpha - k < \overline{a_k} = \sup S_k$ より, $\alpha - k$ は S_k の上界ではない.

$\exists n_k \geq k$ が存在して, $\alpha - k < a_{n_k}$

$k \rightarrow \infty$ のとき, $n_k \rightarrow \infty$ よって,

$\alpha - k < a_{n_k}$

となる n_k は無限個存在する. (2) はOK. \square .

(\Leftarrow)

$\forall \epsilon > 0$ を1つ固定する.

(1) より, $\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば, $a_n < \alpha + \epsilon$ $n \geq N$ ならば,

$\overline{a_k} = \sup S_k \geq \alpha + \epsilon$

(2) より, $\alpha - \epsilon < a_{n_k}$ となる

$n_1 < n_2 < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$

となるものが存在する.

$\forall k \in \mathbf{N}$ に対して,

$a - \epsilon < a_{n_k} \leq \overline{a_{n_k}} \leq \overline{a_k}$

$a - \epsilon \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{a_k} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n}$

以上より, $a - \epsilon \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n$. \square

系

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$

\therefore

\Leftarrow はさみうち

\Rightarrow 今の命題を使う

定理(Cauchy の収束条件)

$\{a_n\}$ が収束する $\Leftrightarrow \forall \epsilon$ に対して, $\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して, $n, m \geq N$ ならば, $|a_n - a_m| < \epsilon$

\therefore

(\Rightarrow) かんたん

(\Leftarrow) $\forall \epsilon$ を一つ固定する. $\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して, $n, m \geq N$ ならば, $|a_n - a_m| < \epsilon$

$\forall n \geq N$ に対して,

$a_N - \epsilon < a_n < a_N + \epsilon$ ($m = N$ の場合)

$k > N$ ならば,

$\overline{a_k} = \sup\{a_n | n \geq k \geq N\} \leq a_N + \epsilon$

$\underline{a_k} = \inf\{a_n | n \geq k \geq N\} \geq a_N - \epsilon$

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_k} \leq a_N + \epsilon$

$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a_k} \geq a_N - \epsilon$

$|\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n| < 2\epsilon$

$\epsilon > 0$ は任意だったので, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

よって, $\{a_n\}$ は収束する.

◎ $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ は常に存在する ($\infty, -\infty$ かもしれない). $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は存在するとは限らない.

定義

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束する. $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \{S_n\}$ が収束する.

このとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

と定義する.

例

$$r \in \mathbf{R}, |r| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots$$

$$S_n = 1 + r + \dots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-r} \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

補題

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{が収束する.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

対偶をとると, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しない.

∴

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n (S_n = a_0 + \dots + a_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0. \quad \square$$

定義

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が絶対収束する. $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ が収束する. ($\Leftrightarrow \{S'_n\}$ が収束する ($S'_n = |a_0| + \dots + |a_n|$).)

定理

絶対収束 \Rightarrow 収束

∴

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束する $\Leftrightarrow S_n$ が収束する $\Leftrightarrow \forall \varepsilon$ に対して, $\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して, $\forall m > \forall n \geq N$ に対して,

$$|a_{n+1}| + \dots + |a_m| = |S_m - S_n| < \varepsilon$$

$|a_{n+1} + \dots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_m|$ より, (三角不等式)

絶対収束 \Rightarrow 収束 $\quad \square$

注意

「収束 \Rightarrow 絶対収束」は成り立たない.

補題

$\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して,

$$0 \leq |a_n| \leq b_n (\forall n \geq N)$$

と仮定する. このとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ が収束} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は絶対収束する.}$$

∴

$$c_n = |a_N| + |a_{N+1}| + \cdots + |a_{N+n}|$$

とおく. $\{c_n\}$ が収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束.

$$c_n \leq \sum_{k=N}^{n+N} b_k \leq \sum_{k=N}^{\infty} b_k < \infty$$

一方, $c_{n+1} - c_n = |a_{N+n+1}| \geq 0$ なので, c_n は単調増加.

単調増加で上に有界な数列は収束するので, c_n は収束する. \square

定理 1(Cauchy-Hadamard の判定法)

$$r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ とおく.}$$

$$r < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は絶対収束する.}$$

$$r < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は収束しない.}$$

定理 2(d'Alembert の判定法)

$$|a_n| > 0 (\forall n \in \mathbf{N})$$

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ が存在すると仮定する.}$$

このとき,

$$r < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は絶対収束する.}$$

$$r < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は収束しない.}$$

注意

(1) 定理 1, 2 において, $r = 1$ のときは収束を判定できない (収束しない場合もある).

(2)

定理 1 \Rightarrow 常に使える. r の計算が煩雑.

定理 2 \Rightarrow 使える場合に限られる. r の計算はかんたん.

定理 1 の証明

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$$

\Leftrightarrow

(a) $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば, $\sqrt[n]{|a_n|} > r + \varepsilon$

かつ

(b) $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $r - \varepsilon < \sqrt[n]{|a_n|}$ となる n が無限個存在する.

$r < 1$ のとき

$r + \varepsilon < 1$ となる $\varepsilon > 0$ を 1 つ固定する.

(a) より, $\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば,

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r + \varepsilon < 1 \text{ 両辺を } n \text{ 乗して,}$$

$$|a_n| < (r + \varepsilon)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (r + \varepsilon)^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} (r + \varepsilon)^n$ は $|r + \varepsilon| < 1$ より収束する.

先の補題から, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ は収束する. \square

$r > 1$ のとき

$r - \varepsilon < 1$ となる $\varepsilon > 0$ を 1 つ固定する.

$$(b) \text{ より, } r - \varepsilon < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}$$

$$n_1 < n_1 < \cdots \lim_{n \rightarrow \infty} n_k = \infty$$

となる自然数列 n_k が取れる.

両辺を n_k 乗すると,

$$(r - \varepsilon)^{n_k} < |a_{n_k}|$$

$$(r - \varepsilon) \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty)$$

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

補題から, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しない. \square

定義

$$R = \sup \left\{ |x| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ が収束する} \right\}$$

R を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径という.

系(定理 1, 2 の系)

$$(1) r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ とおくと,}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ の収束半径} = \frac{1}{r}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ が存在すると仮定. これを } r \text{ とおくと,}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ の収束半径} = \frac{1}{r}$$

$$\begin{cases} r = \infty \text{ のとき収束半径} = 0 \\ r = 0 \text{ のとき収束半径} = \infty \end{cases}$$

\therefore (1) のみを示す)

$$\text{定理 1 を } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ に適用する. } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right) |x| = r|x|$$

$$r|x| < 1 (\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{r}) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は収束する.}$$

$$r|x| > 1 (\Leftrightarrow |x| > \frac{1}{r}) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は収束しない.}$$

よって, $a_n x^n$ の収束半径 $= \frac{1}{r}$. □

例

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} \right| = 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n \text{ の収束半径は, } \frac{1}{2}.$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^3}$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = m^3) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1 & (n = m^3) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \{ \sqrt[n]{|a_n|} \mid n \geq k \} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^3} \text{ の収束半径は } 1.$$

この系を使えば, テイラー級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ の収束半径が計算できる.

まとめ

$f: [-a, a] \rightarrow \mathbf{R}$ C^∞ 級

(1) f は常にテイラー展開できるとは限らない.

(2) f のテイラー級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ の収束半径は,

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|}}$$

$|x| < R$ ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ は絶対収束する.

$$(3) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (|x| < r)$$

ならば,

$$\int_0^{x'} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (|x| < r)$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} \quad (|x| < r)$$

両辺とも絶対収束する ((3) は来学期).

例

$$y = \arctan x$$

$$x = \tan y$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad |x| < 1$$

x に $-x^2$ を代入.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{a+t^2} dt = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \dots \quad (|x| < 1)$$

$\arctan x$ の $x=0$ での Taylor 展開.

5 2変数関数の微分

$$\mathbf{R}^2 = \{x, y \mid x, y \in \mathbf{R}\}$$

$$P = (a, b), Q = (c, d)$$

$$\text{点 } P \text{ と点 } Q \text{ の距離 } d(P, Q) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

$$P_n = (a_n, b_n)$$

$$P_n \rightarrow P (n \rightarrow \infty) \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} d(P_n, P) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow b (n \rightarrow \infty)$$

$U \in \mathbf{R}^2$ 部分集合

$$f: U \rightarrow \mathbf{R}$$

ex)

$$U = (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

定義

$\lim_{(x,y) \rightarrow P} f(x, y) = A \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = A$ となるような, 任意の点列 $\{P_n\}$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = A \text{ (ただし, } P_n \in U \text{)}$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon$ に対して, $\exists \delta$ が存在して,

$$d(P, (x, y)) < \delta \text{ ならば, } |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

(P への近づき方に寄らず一定の値に近づく)

注意

・1変数の場合

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$$

a への近づき方は2通り.

・2変数の場合

P への近づき方は無数にある.

定義

$P \in U$ が P で連続

$$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{(x,y) \rightarrow P} f(x, y) = f(P)$$

$\forall P \in U$ で f が連続ならば, f は連続という.

例

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ となる数列 x_n を考える. ($x_n \neq 0$)

$$ex) x_n = \frac{1}{n}$$

$$P_n = (x_n, x_n) \rightarrow (0, 0) (n \rightarrow \infty)$$

$$f(P_n) = \frac{x_n^2}{2x_n^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq f(0, 0) (n \rightarrow \infty)$$

よって, f は原点で不連続.

定義

$D \subset \mathbf{R}$ 部分集合

D が領域 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

(1) $\forall P \in D$ に対し, $\exists \delta > 0$ が存在して, $B_\delta(P) \cap D$

かつ

(2) $\forall P \forall Q \in D$ に対し, P, Q を結ぶ直線が, D 内に存在する.

(1) \ni 境界上の点は含まない.

定義

$D \subset \mathbf{R}$ 領域 $f : D \rightarrow \mathbf{R} (a, b) \in D$

f の (a, b) での x に関する偏微分係数として,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) (f_x(a, b) \text{ ともかく.}) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

$= (y = b \text{ を代入して, } f(x, b) \text{ を } x \text{ の 1 変数関数とみなしたときの } x = a \text{ での微分係数})$

f が (a, b) で x に関して偏微分可能 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ が存在する.

$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), f_y(a, b)$ も同様に定義する.

例

$$f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + y^3$$

$f_x(1, 2)$ を計算する.

$$F(x) = f(x, 2) = x^2 + 8x + 8 \quad \text{とおく.}$$

$$F'(x) = 2x + 8$$

$$f_x(1, 2) = F'(1) = 10$$

$\forall (a, b) \in D$ において, f が x に関して偏微分可能であるとき

$f_x : D \rightarrow \mathbf{R}$ f の x に関する偏導関数

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} : D \rightarrow \mathbf{R} \right)$$

f が C^1 級 $\Leftrightarrow f_x, f_y$ がともに連続

注意

・ 1 変数関数の場合 微分可能 \Rightarrow 連続

・ 2 変数関数の場合 偏微分可能 \Rightarrow 連続は成り立たない

例

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

f は $(0, 0)$ で連続ではない。

$$F(x) = f(x, 0) = 0 \quad F'(x) = 0 \text{ より,}$$

$$f_x(0, 0) = F'(0) = 0$$

$$f_y(0, 0) = 0$$

f_x が x に関して偏微分可能なとき, その偏導関数を,

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

f_y が y に関して偏微分可能なとき, その偏導関数を,

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

と書く。

$$f : D \rightarrow \mathbf{R} \quad (D \subset \mathbf{R}^2 \text{ 領域})$$

$f(x, y)$ が偏微分可能 $\Leftrightarrow f$ が x, y 両方に関して偏微分可能

もし, f が偏微分可能ならば,

$$f_x : D \rightarrow \mathbf{R} \quad (a, b) \mapsto f_x(a, b)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} : D \rightarrow \mathbf{R} \right)$$

$$f_y : D \rightarrow \mathbf{R} \quad (a, b) \mapsto f_y(a, b)$$

これらを f の偏導関数という。

もし, f_x, f_y が偏微分可能ならば, それらの偏導関数を f の第 2 次導関数という。

$$\frac{\partial f_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

(x で微分してから y で微分)

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

(y で微分してから x で微分)

例

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

$$f_x(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hy \frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2}}{h}$$

$$= -y$$

$$f_{xy}(0, 0) = -1$$

$$f_y(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, h) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hx \frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2}}{h}$$

$$= x$$

$$f_{yx}(0, 0) = 1$$

$$f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$$

定義

f が C^2 級 $\Leftrightarrow f$ は 2 階偏微分可能 (f, f_x, f_y が偏微分可能で, f の 2 次以下の同値性は全て連続)

命題

f が C^2 級 $\Leftrightarrow f_{xy} = f_{yx}$

6 全微分

偏微分可能 \Rightarrow 連続 は成り立たない

全微分可能 \Rightarrow 連続 は成り立つ

1 変数の場合

$y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能

$\Leftrightarrow a$ の周りで $f(x) = f(a) + A(x-a) + B(x)(x-a)$ と書ける.

ただし, A は定数, B は a の周りで定義された関数で $x = a$ で連続 $B(a) = 0$

\therefore

$$B(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & (x \neq a) \\ 0 & (x = a) \end{cases}$$

f は $x = a$ で微分可能で, $B(x)$ は $x = a$ で連続

$$B(x)(x-a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

より,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + B(x)(x-a)$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{A(x-a)+B(x)(x-a)}{x-a} = A + B(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A \text{ なので, } f(x) \text{ は } x = a \text{ で微分可能.}$$

2 変数の場合

定義

$f = f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

(a, b) の周りで, $f(x, y) = f(a, b) + A(x-a) + B(y-b) + C(x, y)d((x, y), (a, b))$

と書ける.

ただし, A, B は定数.

$C(x, y)$ は (a, b) の周りで定義された関数で (a, b) で連続

$$C(a, b) = 0$$

$$d((x, y), (a, b)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

(a, b) の周りで $\exists \delta$ が存在して, $\forall (x, y) \in B_\delta(a, b) = \{Q \in \mathbf{R}^2 | d(Q, (a, b)) < \delta\}$ に対して

命題

(1) f が (a, b) で全微分可能 $\Rightarrow f$ は (a, b) で偏微分可能で $A = f_x(a, b), B = f_y(a, b)$

(2) f が (a, b) で全微分可能 $\Rightarrow f$ は (a, b) で連続

\therefore

(1) $y = b$ とする.

$$f(x, b) = f(a, b) + A(x-a) + C(x, b)|x-a|$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{A(x-a) + C(x, b)(x-a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a+0} (A + C(x, b)) = A$$

同様に,

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = A$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = A$$

つまり, f は (a, b) で x に関して偏微分可能で $A = f_x(a, b)$

$$(2) |f(x, y) - f(a, b)| = |A(x - a) + B(y - b) + C(x, y)d((x, y), (a, b))| \rightarrow 0 (x \rightarrow a, y \rightarrow b)$$

よって, f は (a, b) で連続.

定理

$$f: D \rightarrow \mathbf{R} (D \subset \mathbf{R}^2 \text{領域})$$

f が C^1 級 $\Rightarrow \forall (a, b) \in D$ に対し, f は (a, b) で全微分可能.

\therefore

f が (a, b) で全微分可能

$$\Leftrightarrow f(a + s, b + t) = f(a, b) + As + Bt + C(s, t)\sqrt{s^2 + t^2}$$

$$f(a + s, b + t) - f(a, b + t) + f(a, b + t) - f(a, b)$$

平均値の定理より,

$$\frac{f(a+s, b+t) - f(a, b+t)}{s} = f_x(a + \theta s, b + t) (0 < \theta < 1)$$

$$\frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t} = f_y(a, b + \theta' t) (0 < \theta' < 1)$$

$$f_x(a + \theta s, b + t) - f_x(a, b) = u(s, t)$$

$$f_y(a, b + \theta' t) - f_y(a, b) = v(t) \text{ とおく.}$$

$$C(s, t) = \begin{cases} \frac{su(s, t) + tv(t)}{\sqrt{s^2 + t^2}} & ((s, t) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((s, t) = (0, 0)) \end{cases}$$

$$f(a + s, b + t) - f(a, b) = sf_x(a + \theta s, b + t) + tf_y(a, b + \theta' t) = f_x(a, b)s + f_y(a, b)t + su(s, t) + tv(t)$$

f_x, f_y が連続なので, $C(s, t)$ も連続. よって, $f(x)$ は (a, b) で全微分可能.

定義

f が C^n 級 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f$ は n 階偏微分可能で f の第 n 次偏導関数は全て連続.

f の第 $n - 1$ 次偏導関数は C^1 級 \Rightarrow 連続

f が C^n 級 $\Leftrightarrow f$ は n 階偏微分可能で n 次以下の偏導関数はすべて連続

「 f が C^2 級 $\Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$ 」より,

「 f が C^n 級ならば, n 次以下の偏導関数について, x, y で偏微分する順序に依らない」

例

f が C^1 級ならば, $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$

7 合成関数の偏微分

1 変数の場合

$f(x)$ x の 1 変数 C^1 級関数

$x = \varphi(t)$ t の 1 変数関数

$\Rightarrow f(\varphi(t))$ t の 1 変数 C^1 級関数

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}$$

命題 $f(x, y)$ xy の 2 変数 C^1 級関数

$x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$

$\Rightarrow f(\varphi(t), \psi(t))$ は t の 1 変数 C^1 級関数で,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

\therefore

$\lim_{t \rightarrow c} \frac{f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(c), \psi(c))}{t - c}$ を計算する.

前回やった命題より,

$$\begin{cases} \varphi(t) - \varphi(c) = \varphi'(c)(t - c) + A(t)(t - c) \\ \psi(t) - \psi(c) = \psi'(c)(t - c) + B(t)(t - c) \end{cases}$$

$A(t)$ は $t = c$ で連続 $A(c) = 0$

$B(t)$ は $t = c$ で連続 $B(c) = 0$

f は全微分可能なので,

$$f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(c), \psi(c))$$

$$= f_x(\varphi(c), \psi(c))(\varphi(t) - \varphi(c)) + f_y(\varphi(c), \psi(c))(\psi(t) - \psi(c)) + C(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi(t) - \varphi(c))^2 + (\psi(t) - \psi(c))^2}$$

$C(\varphi(t), \psi(t))$ は $t = c$ で連続で $C(\varphi(c), \psi(c)) = 0$

$$f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(c), \psi(c)) = (t - c)\{f_x(\varphi(c), \psi(c)) + f_y(\varphi(c), \psi(c))\psi'(c)\}$$

$$+ (t - c)\{f_x(\varphi(c), \psi(c))A(t) + f_y(\varphi(c), \psi(c))B(t) + C(\varphi(t), \psi(t))\frac{\sqrt{(\varphi(t) - \varphi(c))^2 + (\psi(t) - \psi(c))^2}}{t - c}\}$$

$$f_x(\varphi(c), \psi(c))\varphi'(c) + f_y(\varphi(c), \psi(c))\psi'(c)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(c), \psi(c))\frac{dx}{dt}(c) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(c), \psi(c))\frac{dy}{dt}(c)$$

定理

$f(x, y)$ x, y の 2 変数 C^1 級関数

$x = \varphi(u, v)$ $y = \psi(u, v)$ u, v の 2 変数 C^1 級関数

$\Rightarrow f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ は u, v の 2 変数 C^1 級関数

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ を Jacobi 行列と呼ぶ.

例

$$f(x, y) = \sin x \cos y$$

$$x = u + v \quad y = uv$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= \cos x \cos y \cdot 1 + (-\sin x \sin y)v$$

$$= \cos(u + v) \cos(uv) - v \sin(u + v) \sin(uv)$$

定理(平均値の定理)

$f(x, y) : (a, b)$ の周りで定義された C^1 級関数 $(0, 0)$ の周りの点 (s, t) に対して, $0 \leq \exists \theta \leq 1$ が存在して,

$$f(a + s, b + t) = f(a, b) + sf_x(a + \theta s, b + \theta t) + tf_y(a + \theta s, b + \theta t)$$

と書ける.

\therefore

$g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, g(u) = f(a + us, b + ut)$ と定義する.

$$\frac{dg}{du} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{du} = f_x(a + us, b + ut)s + f_y(a + us, b + ut)t$$

1 変数関数 g に平均値の定理を適用すると,

$$g(1) - g(0) = g'(\theta) = f_x(a + \theta s, b + \theta t)s + f_y(a + \theta s, b + \theta t)t \text{ となる } 0 < \theta < 1 \text{ が存在する.}$$

$$g(1) - g(0) = f(a + s, b + t) - f(a, b) \quad \square$$

定理(Taylor の定理)

$f(x, y)$: 点 (a, b) の周りで定義された C^n 級関数 ($n \geq 2$)($0, 0$) の周りの点 (s, t) に対して,
 $0 < \exists \theta < 1$ が存在して,

$$f(a + s, b + t) = f(a, b)$$

$$+ (s \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial y})f(a, b)$$

$$+ \frac{1}{2}(s \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial y})^2 f(a, b) + \dots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}(s \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial y})^{n-1} f(a, b)$$

$$+ \frac{1}{n!}(s \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial y})^n f(a + \theta s, b + \theta t)$$

と書ける.

$$(s \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial y})f(a, b) = sf_x(a, b) + tf_y(a, b)$$

$$(s \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial y})^2 f(a, b) = s^2 f_{xx}(a, b) + 2st f_{xy}(a, b) + t^2 f_{yy}(a, b) \dots$$

8 2 変数関数の極大・極小

$$f : D \rightarrow \mathbf{R} (D \subset \mathbf{R}^2 \text{ 領域}) (a, b) \in D$$

定義

f が (a, b) で極大 (resp. 極小)

$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exists \delta > 0$ が存在して, $0 < d((x, y), (a, b)) < \delta$ となる $\forall (x, y) \in D$ に対して, $f(x, y) < (\text{resp. } >) f(a, b)$

定理(2 変数の Taylor の定理)

$$f : D \rightarrow \mathbf{R} \quad C^n \text{ 級 } (D \subset \mathbf{R}^2 \text{ 領域})$$

$$(a, b), (a + s, b + t) \in D$$

(a, b) と $(a + s, b + t)$ を結ぶ線分も D に含まれるとする.

このとき,

$$f(a + s, b + t) = f(a, b) + sf_x(a, b) + tf_y(a, b) + \dots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}(s \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial y})^{n-1} f(a, b) + \frac{1}{n!}(s \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial y})^n f(a + \theta s, b + \theta t)$$

特に $n = 2$ のとき

$$f(a + s, b + t) - f(a, b) =$$

$$sf_x(a, b) + tf_y(a, b) + \frac{1}{2}\{s^2 f_{xx}(a + \theta s, b + \theta t) + 2st f_{xy}(a + \theta s, b + \theta t) + t^2 f_{yy}(a + \theta s, b + \theta t)\}$$

定義

$f : D \rightarrow \mathbf{R}, f$ が (a, b) で (広義の極大) \Leftrightarrow

$\exists \delta > 0$ が存在して, $(a, b) \neq \forall (x, y) \in B_\delta(a, b) = \{(x, y) | d((x, y), (a, b)) < \delta\}$ に対して,

$$f(x, y) < f(a, b)$$

極値 = 極大値もしくは極小値 極大点 = 極大値をとる点

命題

f は C^1 級とする. f が (a, b) で広義の極大または極小.

$$\Leftrightarrow f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

∴

f が (a, b) で広義の極大とする. $\Rightarrow x$ の 1 変数関数 $f(x, b)$ は $x = a$ で広義の極大. $\Rightarrow f_x(a, b) = 0$ □

1 変数の場合

$$f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R} \quad C^2 \text{級} \quad \alpha < c < \beta \quad f'(c) = 0$$

$f''(c) > 0 \Rightarrow f$ は $x = c$ で極小

$f''(c) < 0 \Rightarrow f$ は $x = c$ で極大

$$f : D \rightarrow \mathbf{R} \quad C^2 \text{級}$$

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

を Hesse 行列という. (2 次対称行列)

定理

$\{a, b\} = f_y(a, b) = 0$ とする.

(1) $f_{xx}(a, b) > 0$ かつ $\det(H(x, y)) > 0 \Rightarrow f$ は (a, b) で極小.

(2) $f_{xx}(a, b) < 0$ かつ $\det(H(x, y)) > 0 \Rightarrow f$ は (a, b) で極大.

(3) $\det(H(x, y)) < 0 \Rightarrow f$ は (a, b) で極大でも極小でもない.

注意

$\det H(a, b) = 0$ の場合は, 上の定理から極大・極小を判定できない.

補題

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2 次対称行列 ($a_{12} = a_{21}$)

$$g(x, y) = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(i) $a_{11} > 0$ かつ $\det A > 0$

$\Rightarrow g(x, y)$ は正定値, つまり $g(x, y) > 0 (\forall (x, y) \neq (0, 0) \in \mathbf{R}^2)$

$\Leftrightarrow A$ の固有値は全て正

(ii) $a_{11} < 0$ かつ $\det(A) > 0$

$\Rightarrow g(x, y)$ は負定値, つまり $g(x, y) < 0 (\forall (x, y) \neq (0, 0) \in \mathbf{R}^2)$

$\Leftrightarrow A$ の固有値は全て負

(iii) $\det A < 0$

$\Rightarrow g(x, y)$ は不定値, つまり $g(x, y)$ は正にも負にもなる.

$\Leftrightarrow A$ は正と負の固有値を 1 つずつもつ.

定理の証明

$f_{xx}(a, b) > 0$ かつ $\det H(a, b) > 0$ とする.

f は C^1 級なので $f_{xx}, \det H$ は連続.

$\Rightarrow \exists \delta$ が存在して, $B_\delta(a, b) \subset D$ かつ $\forall (x, y) \in B_\delta(a, b)$ に対して, $f_{xx}(x, y) > 0, \det H(x, y) > 0$

$\forall (a + s, b + t) \in B_\delta(a, b)$ に対し, Taylor の定理を使うと,

$$f(a + s, b + t) - f(a, b) = sf_x(a, b) + tf_y(a, b) + \frac{1}{2}\{s^2 f_{xx}(a + \theta s, b + \theta t) + 2st f_{xy}(a + \theta s, b + \theta t)\}$$

$$+t^2 f_{yy}(a + \theta s, b + \theta t)\} (0 < \theta < 1)$$

$(a + \theta s, b + \theta t) \in B_\delta(a, b)$ より, $f_{xx}(a + \theta s, b + \theta t) > 0$ $\det H(a + \theta s, b + \theta t) > 0$

$$s^2 f_{xx}(a + \theta s, b + \theta t) + 2st f_{xy}(a + \theta s, b + \theta t) + t^2 f_{yy}(a + \theta s, b + \theta t)\}$$

$$= (s, t)H(a + \theta s, b + \theta t) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = g(s, t)$$

補題 (i) より $g(s, t)$ は正定値

$$(s, t) \neq (0, 0) \Rightarrow g(s, t) > 0$$

$$f(a + s, b + t) - f(a, b) = \frac{1}{2}g(s, t) > 0$$

つまり, f は (a, b) で極小.

(3) $\det H(a, b) < 0$ とする.

補題 (iii) より, $H(a, b)$ は正の固有値 μ と負の固有値 ν をもつ.

(u_1, u_2) を μ に対する固有ベクトル, (v_1, v_2) を ν に対する固有ベクトルとする.

$$F(t) = f(a + u_1 t, b + u_2 t)$$

$$G(t) = f(a + v_1 t, b + v_2 t)$$

は $t = 0$ の周りで定義される 1 変数 C^2 級関数.

f が (a, b) で極大 (極小) ならば, $F(t), G(t)$ は $t = 0$ で極大, もしくは極小となる.

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = u_1 f_x(a + u_1 t, b + u_2 t) + u_2 f_y(a + u_1 t, b + u_2 t)$$

$$F''(t) = u_1^2 f_{xx}(a + u_1 t, b + u_2 t) + 2u_1 u_2 f_{xy}(a + u_1 t, b + u_2 t) + u_2^2 f_{yy}(a + u_1 t, b + u_2 t)$$

$$F'(0) = u_1 f_x(a, b) + u_2 f_y(a, b) = 0$$

$$F''(0) = u_1^2 f_{xx}(a, b) + 2u_1 u_2 f_{xy}(a, b) + u_2^2 f_{yy}(a, b) = (u_1, u_2)H(a, b) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow F$ は $t = 0$ で極小. 同様にして, G は $t = 0$ で極大. 矛盾. よって, f は (a, b) で極大・極小ではない.

例

$$x^3 + y^3 + 6xy$$

$$f_x = 3x^2 + 6y$$

$$f_y = 3y^2 + 6x$$

$$f_x = f_y = 0 \text{ ならば, } x^2 = -2y$$

$$\Rightarrow x^4 + 8x = 0$$

$$x(x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$x = 0 \text{ or } x = -2$$

$$x = 0 \text{ のとき } y = 0$$

$$x = -2 \text{ のとき } y = -2$$

$$f_{xx} = 6x, f_{xy} = f_{yz} = f_{yy} = 6y$$

$$\det H = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 36xy - 36$$

$$\det(-2, -2) = 108 > 0$$

$$\det(0, 0) = -12 < 0$$

$f(-2, -2)$ で極大 $f(-2, -2) = 8$ が極大値.

$$\det H(0, 0) = -36 < 0$$

よって, f は $(0, 0)$ で極大でも極小でもない.

$D \subset \mathbf{R}^2$ 部分集合

D が閉集合 $\Leftrightarrow \mathbf{R}^2 D$ が閉集合 \equiv 境界 (ふち) を含む部分集合

D が有界 $\Leftrightarrow \exists R > 0$ が存在し, $D \subset B_R(0,0)$

例

$$(1) D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

有界閉集合

$$(2) D = \{(x, y) | x \leq 0, y \leq 0\}$$

閉集合 有界ではない.

定理(最大値・最小値の定理)

$D \subset \mathbf{R}^2$ 有界閉集合

$f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 連続

$\Rightarrow f$ は D 上最大値・最小値をもつ.

注意 1 変数のとき, $D = [a, b]$

◎ どうやって最大値・最小値をもとめるか.

$f: D \rightarrow \mathbf{R}$ C^1 級とする.

$D = D^\circ (D$ の内部) $\cup \partial D (D$ の境界) と分ける.

D° は開集合

∂D は有界閉集合

$\partial D = \{(x, y) | g(x, y) = 0\}$ (g は C^1 級) と書けていると仮定.

f が $(a, b) \in D$ で最大ならば, 次のいずれかが成り立つ.

(i) $(a, b) \in D^\circ$ で, (a, b) で広義の極大. (この場合は, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$)

(ii) $(a, b) \in \partial D$ で f は (a, b) で条件 $g(x, y) = 0$ の下, 広義の極大. (ラグランジュの未定乗数法)

上の議論から, 最大値をとる点の候補を計算する. その中で f の値が最大なものを選ぶ.

9 陰関数

例

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$y \geq 0$ として, $f(x, y) = 0$ を y について解くと, $y = \sqrt{1 - x^2}$

$y < 0$ なら, $y = -\sqrt{1 - x^2}$

局所的には, y について解ける.

定理(陰関数定理)

$f: D \rightarrow \mathbf{R}$ C^1 級, $(a, b) \in D \subset \mathbf{R}^2$

$f(a, b)$ かつ $f_y(a, b) \neq 0$ と仮定する.

$\Rightarrow x = a$ の周りで定義された 1 変数関数 $y = \varphi(x)$ が存在して, 次が成り立つ.

$$(1) \varphi(a) = b$$

$$(2) f(x, \varphi(x)) = 0$$

$$(3) \varphi \text{ は } C^1 \text{ 級で } \varphi'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

注意

このような $y = \varphi(x)$ を $f(x, y) = 0$ の陰関数という.

∵

$f_y(a, b) > 0$ とする. (< 0 のときも同様.)

f_y は連続関数なので, $\exists \delta > 0$ が存在して,

$|x - a| < \delta$ かつ $|y - b| < \delta$ ならば, $y(x, y) > 0$

$\Rightarrow y$ の 1 変数関数 $f(a, y)$ は, $(b - \delta, b + \delta)$ 上単調増加.

$f(a, b) = 0$ より,

$b - \delta < y_1 < b < y_2 < b + \delta$

となる $\forall y_1, y_2$ に対し, $f(a, y_1) < 0, f(a, y_2) > 0$

f は連続関数なので, $\exists \delta' = \delta'(y_1, y_2) < \delta$ (δ' は y_1, y_2 のとり方に依存する)

が存在して, $|x - a| < \delta'$ ならば,

$f(x, y_1) < 0, f(x, y_2) > 0$

$\delta x_0 \in (a - \delta', a + \delta')$ を 1 つ固定する.

$\delta' < \delta$ から,

$f(x_0, y)$ は $(b - \delta', b + \delta')$ 上単調増加. $f(x_0, y_1) < 0, f(x_0, y_2) > 0$ なので, 中間値の定理から,

$f(x_0, y_0) = 0$ となる $y_1 < y_0 < y_2$ が唯 1 つ存在する.

$\varphi(a - \delta', a + \delta') \rightarrow \mathbf{R}$

を φ と定義すると,

$\varphi(a) = b$ ($\because f(a, b) = 0$)

$f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0) = 0$

(1) と (2) は OK.

(3) を示す. まず, 「 φ が $x = a$ で連続」を示す. ($x \neq a$ でも同様.)

$|\varphi(x_0) - \varphi(a)| = |y_0 - b| < y_2 - y_1$ ($\because y_0 < y_2, y_1 < b$)

$b - \delta < y_1 < b < y_2 < b + \delta$ となる $\forall y_1, y_2$ に対し, $\exists \delta' > 0$ が存在して, $|x_0 - a| < \delta'$ ならば,

$|\varphi(x_0) - \varphi(a)| < y_2 - y_1$

つまり,

$\lim_{x_0 \rightarrow a} |\varphi(x_0) - \varphi(a)| = 0$

よって, φ は $x = a$ で連続.

$|s| < \delta'$ となる $\forall s$ を 1 つ固定する.

$t: \varphi(a + s) - \varphi(a)$ と定義.

2 変数の平均値の定理から, $0 < \exists \theta < 1$ が存在して,

$f(a + s, b + t) = f(a, b) + s f_x(a + \theta s, b + \theta t) + t f_y(a + \theta s, b + \theta t)$

$\frac{\varphi(a+s) - \varphi(a)}{s} = \frac{t}{s}$

φ は連続なので, $s \rightarrow 0$ のとき, $t \rightarrow 0$

$\frac{t}{s} = -\frac{f_x(a + \theta s, b + \theta t)}{f_y(a + \theta s, b + \theta t)} \xrightarrow{s \rightarrow 0} -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}$

よって, φ は $x = a$ で微分可能で,

$\varphi'(a) = -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}$

例

$f(x, y) = x^3 + 3xy + 4xy^2 + y^2 + y - 2$ の $(1, -1)$ における接線を計算する. ($f(1, -1) = 0$)

$$f_x = 3x^2 + 3y + 4y^3, f_y = 3x + 8xy + 2y + 1$$

$f_y(1, -1) = -6 \neq 0$ から, 陰関数定理より, $x = 1$ の周りで, $f(x, y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在する.

f の $(1, -1)$ での接線の傾き: $\varphi'(1)$

$$\varphi'(1) = -\frac{f_x(1, -1)}{f_y(1, -1)} = -\frac{4}{-6} = \frac{2}{3}$$

よって, 求める接線は,

$$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 1)$$