問1 (1) $\det(xE-A) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -4 \\ -4 & x-3 & -8 \\ 2 & 2 & x+5 \end{vmatrix} = \begin{matrix}(x-1)(x-3)(x+5)+32+32 \\ +8(x-3)+16(x-1)-8(x+5)\end{matrix} = (x+1)^2(x-1)$

$\lambda = 1$ について.

$(\lambda E - A)v = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -4 & -2 & -8 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow v = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$ について

$(\lambda E - A)v = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -4 & -4 & -8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow v = \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと. $\det P \neq 0$ で, $P^{-1}$ が存在し. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる.

(2) $B_1, B_2 \in V$, $\mu \in \mathbb{R}$ とおくと.

$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = B_1A + B_2A = (B_1+B_2)A$ で. $(B_1+B_2) \in V$

$A(\mu B) = \mu AB = \mu BA = (\mu B)A$ で. $(\mu B) \in V$ となる.

$\therefore$ $V$ は $M_3(\mathbb{R})$ の部分線型空間である

(3) 与式 $AB = BA \Leftrightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} B' = B' \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

$B' = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}$ とおくと $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ -h_{21} & -h_{22} & -h_{23} \\ -h_{33} & -h_{32} & -h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & -h_{12} & -h_{13} \\ h_{21} & -h_{22} & -h_{23} \\ h_{31} & -h_{32} & -h_{33} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow h_{12} = h_{13} = h_{21} = h_{31} = 0$. $B'$ 全体が成す集合を $V'$ とおく $\dim V' = 5$.

$P$. $P^{-1}$ ともに正則なので. $\dim V' = \dim V$ であり. $\dim V = 5$ //

問2 (1) $f, g \in \mathbb{R}_3[x]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とおくと

$\varphi(f+g) = x^2 \frac{d^2(f+g)}{dx^2}(x) + (x-1)\frac{d(f+g)}{dx}(x) - 4(f+g)(x)$

$= x^2 \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + (x-1)\frac{df}{dx}(x) - 4f(x) + x^2 \frac{d^2 g}{dx^2}(x) + (x-1)\frac{dg}{dx}(x) - 4g(x)$

$= \varphi(f) + \varphi(g)$

$\varphi(\lambda f) = x^2 \frac{d^2(\lambda f)}{dx^2}(x) + (x-1)\frac{d(\lambda f)}{dx}(x) - 4(\lambda f)(x)$

$= \lambda\left(x^2 \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + (x-1)\frac{df}{dx}(x) - 4f(x)\right) = \lambda\varphi(f)$

$\therefore$ $\varphi$ は線型写像

No.

(2) $f \in \mathbb{R}_3[x]$ とし $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ とおく

$\frac{df}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$ , $\frac{d^2f}{dx^2} = 2a_2 + 6a_3 x$

$$\therefore \varphi(f)(x) = x^2(2a_2 + 6a_3 x) + (x-1)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2) - 4(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)$$

$$= 5a_3 x^3 - 3a_3 x^2 + (-3a_1 - 2a_2)x + (-a_1 - 4a_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a_1 = -2a_2 ,\ a_1 = -4a_0 ,\ a_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathrm{Ker}\,\varphi = \langle 6x^2 - 4x + 1 \rangle_{\mathbb{R}}$$

問3 (1) $(A-E)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ∴ $Av = v$ は0以外の解を持ち、1は$A$の固有値である

さらに 1に属する$A$の固有空間は $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ である

(2) $V' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ とおくと $V \perp V'$ かつ $V \oplus V' = \mathbb{R}^3$ で

$V'$は $V$ の直交補空間 $V^{\perp}$ である

(3) $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in V^{\perp}$ かつ $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V^{\perp}$

∴ $\forall v \in V^{\perp}$ について $Av \in V^{\perp}$ となる

(4) $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ を$V^{\perp}$の正規直交基底とする

$$g_w^{-1} \circ f \circ g_w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = g_w^{-1} \circ f \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = g_w^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$g_w^{-1} \circ f \circ g_w \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = g_w^{-1} \circ f \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = g_w^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(5) $|xE - A| = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ or } \frac{-1 \pm \sqrt{3} i}{2}$

$\lambda = 1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = \frac{-1+\sqrt{3} i}{2} \to \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3} i}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3} i}{2} \end{pmatrix}$

$\lambda = \frac{-1-\sqrt{3} i}{2} \to \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3} i}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{3} i}{2} \end{pmatrix}$

$$P = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1+\sqrt{3} i}{\sqrt{12}} & \frac{-1-\sqrt{3} i}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1-\sqrt{3} i}{\sqrt{12}} & \frac{-1+\sqrt{3} i}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{12}} & \frac{2}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}}_{\text{直交基底を入れた}}$$ とおくと $P^{-1} = P^{*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1-\sqrt{3} i}{\sqrt{12}} & \frac{-1+\sqrt{3} i}{\sqrt{12}} & \frac{2}{\sqrt{12}} \\ \frac{-1+\sqrt{3} i}{\sqrt{12}} & \frac{-1-\sqrt{3} i}{\sqrt{12}} & \frac{2}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}$

であり、$P$はユニタリ行列

さらに固有ベクトルなので $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{-1+\sqrt{3} i}{2} & \\ & & \frac{-1-\sqrt{3} i}{2} \end{pmatrix}$ 対角化 ok!

問4 1) $\mathcal{Q}\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\-1 & -1 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)'\begin{pmatrix}1+\sqrt{7} & 0 & 0\\0 & 1-\sqrt{7} & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}'$

ただし $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}' = O_n^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ である; $O_n$は直交行列である. これがとれる理由は $\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\-1 & -1 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ が対称行列だから.

$\therefore \mathcal{Q}\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = \underbrace{(1+\sqrt{7})}_{正}x_1^2 + \underbrace{(1-\sqrt{7})}_{負}x_2^2$ で. 符号は (1. 1)

2) $\operatorname{sgn}\mathcal{Q} = (1.0)$ より.

$V$の基底 $\{v_1. v_2\}$ を適当に選ぶと. $\mathcal{Q}(x_1v_1+x_2v_2) = x_1^2$ とできる.

さらに. 上の基底を拡大して得られた基底 $\{v_1. v_2. \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$ に対し.

$Q\left(x_1v_1+x_2v_2+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \sum_{1\le i\le j\le 3} a_{ij}x_ix_j = \mathcal{Q}(x_1v_1+x_2v_2) + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$

$= x_1^2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$

$= (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}a_{13}\\0 & 0 & \frac{1}{2}a_{23}\\\frac{1}{2}a_{13} & \frac{1}{2}a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とできる.

$r+s$ は $\operatorname{rank}Q$ と同じであり:

$\begin{vmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}a_{13}\\0 & 0 & \frac{1}{2}a_{23}\\\frac{1}{2}a_{13} & \frac{1}{2}a_{23} & a_{33}\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}a_{23}^2$ であり. $a_{23} \neq 0$ のとき. $\operatorname{rank}Q = 3$ なので.

これは反例である.

$\mathcal{Q}\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}\right) = x_1^2$

$Q\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = x_1^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ で.

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} = 3$ で. $\operatorname{sgn}Q = (r.s)$ で. $r+s=3$ となる.