数 II シケプリ (授業のまとめ)

秋山大地

平成 16 年 1 月

目次

第1章　行列式

1.1　置換

自然数 $1 \cdots n$ を定義域かつ値域にもつ関数のうち、全単射であるものを n 文字の置換という。

要は n 個の文字の並べ替えであると思えばよい。

一般に置換は、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

などと表される。

（わかると思うが $\sigma(1) = i_1, \sigma(2) = i_2, \cdots \sigma(n) = i_n$ である。）

1.2　行列式の定義

n 次正方行列 $A = \{a_{ij}\}$ に対して、

$$\det A = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{1.1}$$

を A の行列式という

1.3　行列式の性質

定理 1

$$|{}^t A| = |A| \tag{1.2}$$

これにより、行列式に関して、列の関係で成り立つことは行についても成り立つことがわかる。以下は列の関係のみを示すが、行についても全く同様に成り立つ。

証明　$B =^t A$ とすると $b_{ij} = a_{ji}$ となるから、

$$\begin{aligned} \det B = \det A &= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \end{aligned}$$

ここで、$\sigma(i) = k_i$ とすると、$i = \sigma^{-1}(k_i)$ であり、σ が置換の全体を動くとき σ^{-1} も置換の全体をうごく。さらに $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$ であるから

$$
\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\{} \sigma^{\{}-1\}\}\epsilon(\sigma^{-1}) a_{k_1\sigma^{-1}(k_1)} a_{k_2\sigma^{-1}(k_2)} \cdots a_{k_n\sigma^{-1}(k_n)} \\
&= \det A
\end{aligned}
$$

定理 2 **(線形性)**

$$
\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{ccccccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \lambda\vec{a}_i + \mu\vec{b}_i & \cdots & \vec{a}_n \end{array} \right| && (1.3) \\
= \;& \lambda \left| \begin{array}{ccccccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_n \end{array} \right| && (1.4) \\
& +\mu \left| \begin{array}{ccccccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{b}_i & \cdots & \vec{a}_n \end{array} \right| && (1.5)
\end{aligned}
$$

証明

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots (\lambda a_{\sigma(i)i} + \mu b_{\sigma(i)i}) \cdots a_{\sigma(n)n} \\
= \lambda \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
+\mu \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

定理 3 **(交代性)**

$$
\left| \begin{array}{cccc} \vec{a}_{\sigma(1)} & \vec{a}_{\sigma(2)} & \cdots & \vec{a}_{\sigma(n)} \end{array} \right| = \epsilon(\sigma) \left| \begin{array}{cccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{array} \right| \qquad (1.6)
$$

(1.7)

特に置換が互換のとき

$$
\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{ccccccccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_n \end{array} \right| && (1.8) \\
= \;& -\left| \begin{array}{ccccccccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_i & \cdots & \vec{a}_n \end{array} \right| && (1.9)
\end{aligned}
$$

(1.10)

証明

$$
\begin{aligned}
& \det(\vec{a}_{\sigma(1)}, \vec{a}_{\sigma(2)}, \cdots, \vec{a}_{\sigma(n)}) \\
= \;& \sum_{\tau} \epsilon(\tau) a_{1\sigma\tau(1)} a_{2\sigma\tau(2)} \cdots a_{n\sigma\tau(n)} \\
= \;& \epsilon(\sigma) \sum_{\tau} \epsilon(\sigma\tau) a_{1\sigma\tau(1)} a_{2\sigma\tau(2)} \cdots a_{n\sigma\tau(n)}
\end{aligned}
$$

τ が置換全体を動くとき、$\sigma\tau$ も置換全体を動くから

$$\begin{aligned} \text{上の式} &= \epsilon(\sigma)\sum_{\sigma\tau}\epsilon(\sigma\tau)a_{1\sigma\tau(1)}a_{2\sigma\tau(2)}\cdots a_{n\sigma\tau(n)} \\ &= \epsilon(\sigma)\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n) \end{aligned}$$

定理 4 **(正規性)**

$$\begin{vmatrix} \mathsf{e}_1 & \mathsf{e}_2 & \cdots & \mathsf{e}_n \end{vmatrix} = 1 \tag{1.11}$$

証明　自明

定理 5 **(行列式の積)**

$$\det \mathsf{A}\,\mathsf{B} = \det \mathsf{A} \det \mathsf{B} \tag{1.12}$$

証明　教科書 p65 参照

1.4　余因子展開

n 次正方行列 $A = a_{ij}$ に対して

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.13}$$

を a の ij 余因子という。

定理 6 **(余因子展開)**

$$\det A = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \tag{1.14}$$

$$= a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \tag{1.15}$$

証明

定理 7

$$a_{1j}\Delta_{1l} + a_{2j}\Delta_{2l} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nl} = 0 \ (j \neq l) \tag{1.16}$$

$$a_{i1}\Delta_{k1} + a_{i2}\Delta_{k2} + \cdots + a_{in}\Delta_{kn} = 0 \ (i \neq k) \tag{1.17}$$

上の二つをあわせると

定理 8

$$a_{1j}\Delta_{1l} + a_{2j}\Delta_{2l} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nl} = \delta_{jl}\det A \tag{1.18}$$

$$a_{i1}\Delta_{k1} + a_{i2}\Delta_{k2} + \cdots + a_{in}\Delta_{kn} = \delta_{ik}\det A \tag{1.19}$$

$$\tilde{A} = \{\Delta_{ji}\}\ (ij\ \text{ではない !}) \tag{1.20}$$

を A の余因子行列という。

定理 9 **(余因子行列と行列の正則性)**

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)I_n \tag{1.21}$$

特に、$\det A \neq 0$ のとき、A は正則で、

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} \tag{1.22}$$

1.5 クラメールの公式

連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} + x_2 + \cdots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22} + x_2 + \cdots + a_{2n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2} + x_2 + \cdots + a_{nn} = b_n \end{cases}$$

は、係数行列 $A = \{a_{ij}\}$ が正則のとき

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\mathsf{b} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}\mathsf{b} \tag{1.23}$$

ここで、

$$\tilde{A}\mathsf{b} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1\Delta_{11} + b_2\Delta_{21} + \cdots + b_n\Delta_{n1} \\ b_1\Delta_{12} + b_2\Delta_{22} + \cdots + b_n\Delta_{n2} \\ \vdots \\ b_1\Delta_{1n} + b_2\Delta_{2n} + \cdots + b_n\Delta_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

であり、さらに

$$b_1\Delta_{1i} + b_2\Delta_{2i} + \vdots + b_n\Delta_{ni} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \ (= \det A_i \text{とする}) \tag{1.25}$$

であるから、

定理 10 (**クラメールの公式**)

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \tag{1.26}$$

第2章　多項式

2.1　イデアル

K 係数 n 次多項式 $f(x)$ の群 M_nK の中で、以下の二つの条件を満たす I をイデアルという

$$\begin{array}{lll} (1) \quad f(x) \in I,\ g(x) \in I & \rightarrow & f(x) + g(x) \in I \\ (2) \quad f(x) \in M_n\mathsf{K},\ g(x) \in I & \rightarrow & f(x)g(x) \in I \end{array}$$

定理 11 (**イデアルの最大公約数**) あるイデアル I に対して、最低次の元 $d(x) \in I$(最高次の係数 1) が存在して、I のどの元も $d(x)$ の倍数となっている。すなわち、任意の $f(x) \in I$ に対して対応する多項式 $m(x)$ が存在して、$f(x) = m(x)d(x)$ となる。

2.2　最小多項式

多項式 $f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ に対して、

$$\mathrm{f}\ (A) = a_o A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_n I_n \tag{2.1}$$

と定める。

定理 12 任意の正方行列 A に対して、$f(A) = 0$ を満たす多項式 $f(x)$ が存在し、その集合はイデアルを形成する。

定理 13 (**最小多項式の存在と一意性**) このイデアルの中で次数が最も低く、かつ最高次の係数が 1 であるものが各 A に対して一意的に定まる。

これを A の最小多項式という。以下ではこれを $\psi(x)$ で表すことにする。

定理 14 $f(A) = 0$ を満たす多項式 $f(x)$ は $\psi(x)$ で割り切れる。

これが最小多項式の最小たる所以ともいえます。

2.3　Hamilton-Cayley の定理

定理 15 (Hamilton-Cayley **の定理**) A の特性方程式 $\Phi_A(x) = \det(xI_n - A)$ に対して、$\Phi_A(A) = O_n$

定理 16 (**特性方程式と最小多項式**) 特性方程式は最小多項式で割り切れる。
とくに、$\Phi_A(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_r)^{n_r}$
ならば、$\psi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_r)k_r$ $(1 \le k_I \le n_i$ となる。

第3章　部分空間

3.1　グラムシュミットの直行化

定理 17 (**正規直交基底の存在**)

$$V \subseteq \mathsf{K}^n \tag{3.1}$$

を r 次元部分空間とするとき V に次のような条件を満たす基底 $\mathsf{p}_1 \cdots \mathsf{p}_r$ が存在する。

$$\begin{array}{lll} (1) & \| \mathsf{p}_i \| & = & 1 \\ (2) & (\mathsf{p}_i, \mathsf{p}_j)\ (i \neq j) & = & 0 \end{array}$$

第4章　行列の標準化

4.1　様々な行列

これから先色々な行列が出てきます。混乱するといけないので整理しときます。

以下 $K = C$	
随伴行列 (A^*)	A の行と列を入れ替え、かつ成分を全て共役な複素数に変えた行列
正規行列	$A^*A = AA^*$ を満たす行列
エルミート行列	$A^* = A$ を満たす行列
ユニタリ行列	$A^*A = AA^* = I_n$ を満たす行列
以下 $K = R$	
転置行列 (${}^tA$)	A の行と列を入れ替えた行列
（実）対称行列	${}^tA = A$ を満たす行列
直交行列	${}^tAA = A{}^tA = I_n$ を満たす行列

これらからわかるように、

Aがエルミート	$\rightarrow$	Aが正規
Aがユニタリ	$\rightarrow$	Aが正規
Aがエルミートかつ実行列	$\Longleftrightarrow$	Aが実対称
Aがユニタリかつ実行列	$\Longleftrightarrow$	Aが直交

である。

4.2　固有値と固有ベクトル

n 次正方行列 A、n 次元ベクトル $\vec{x}(\neq 0)$、及びスカラー量 α の間に、関係式

$$A\vec{x} = \alpha\vec{x} \tag{4.1}$$

が成り立つとき、α を A の固有値、$\vec{x}$ を固有値 α に対する A の固有ベクトルという。また、部分空間 $W_\alpha = \{c\vec{x} | c \in \mathsf{K}\}$ は $\vec{0}$ および α に対する A の固有ベクトル全ての集合であり、α に対する A の固有空間という。

定理 18 **(固有ベクトルの一次独立性)** A の相違なる固有値に対する固有ベクトルは一次独立である。

証明　一次独立でない（一次従属である）と仮定すればある固有値 α_i に対応する固有ベクトル $\vec{x_i}$　は次のように他の一次独立な固有ベクトルの線型結合であらわされる。

$$\vec{x}_i = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_{i-1}\vec{x}_{i-1}$$

これに対応する行列（A とする）をかけると

$$\alpha_i\vec{x}_i = c_1\alpha_1\vec{x}_1 + c_2\alpha_2\vec{x}_2 + \cdots + c_{i-1}\alpha_{i-1}\vec{x}_{i-1}$$

一方、α_i をかけると

$$\alpha_i\vec{x}_i = c_1\alpha_i\vec{x}_1 + c_2\alpha_i\vec{x}_2 + \cdots + c_{i-1}\alpha_i\vec{x}_{i-1}$$

差をとって

$$\vec{0} = c_1(\alpha_1 - \alpha_i)\vec{x}_1 + c_2(\alpha_2 - \alpha_i)\vec{x}_2 + \cdots + c_{i-1}(\alpha_{i-1} - \alpha_i)\vec{x}_{i-1}$$

α_k は相違なるから $\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_{i-1}$ の一次独立性により $c_k = 0 \to \vec{x}_i = \vec{0}$ これは $\vec{x}_i$ が固有ベクトルであるという仮定に反する

4.3　三角化

定理 19 (**三角化**) 任意の行列 A に対して、正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ は上三角行列となる

証明　n に関する帰納法で示す。$n=1$ のときは明らか
$n-1$ までは成り立つとする。ある固有値 α_1 に対する固有ベクトル $\vec{x_1}$ をとると、

$$A\vec{x_1} = \alpha\vec{x_1}$$

である。$\vec{x_1}$ を含めて C の基底 $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots \vec{x_1}$ を取り、$P_1 = (\vec{x_1}\vec{x_2}\cdots\vec{x_n})$ とおくと

$$AP_1 = P_1 \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \\ \hline \vec{0} & B \end{array}\right)$$

となる。ここで帰納法の仮定から $Q^{-1}BQ$ が上三角行列となるような正則行列 Q が存在するから、これを用いて

$$P_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & {}^t\vec{0} \\ \hline \vec{0} & Q \end{array}\right)$$

とすれば、

$$P_2^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & {}^t\vec{0} \\ \hline \vec{0} & Q^{-1} \end{array}\right)$$

であり、

$$
\begin{aligned}
P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & {}^t\vec{0} \\ \hline \vec{0} & Q^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \\ \hline \vec{0} & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & {}^t\vec{0} \\ \hline \vec{0} & Q \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} 1 & {}^t\vec{0} \\ \hline \vec{0} & Q^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \\ \hline \vec{0} & BQ \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \\ \hline \vec{0} & Q^{-1}BQ \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

となるから $P_1P_2 = P$ とすれば ($P^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}$ に注意して) $P^{-1}AP$ は上三角行列となる。

定理 20 上記の上三角行列の対角成分は A の固有値がならぶ

証明 pugera

4.4 正規行列の対角化

定理 21 (**正規行列の対角化**) A がユニタリ行列で対角化できるための必要十分条件は A が正規行列であることである。

証明 教科書 p167 参照

4.5 射影子とスペクトル分解

ユニタリ空間 V の部分空間 W に対して、W の直交補空間を $\mathrm{W}^\perp$ とすれば、V の任意の元 $\vec{x}$ は、

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 \in \mathrm{W}, \vec{x}_2 \in \mathrm{W}^\perp$$

と一意的に表される。$\vec{x}$ に $\vec{x}_1$ を対応させる写像を表す行列 P のことを、V の W への射影子という。

定理 22 (**射影子の性質**)

$$P^2 = P, P^* = P \tag{4.2}$$

定理 23 (**射影された部分空間の直交条件**) $\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2$ を V の二つの部分空間、P_1, P_2 をそれぞれ $\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2$ への射影子とする。W_1 と W_2 が直交するためには、$P_1P_2 = O$ が成り立つことが必要十分である。

定理 24 (スペクトル分解) 正規行列 A の固有値全てを $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$、対応する固有空間を $\mathsf{W}_1, \mathsf{W}_2, \cdots, \mathsf{W}_k$ とする。W_i への射影子を P_i とすれば、

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_k = I_n, P_i P_j \neq 0 \ (i \neq j) \tag{4.3}$$

$$A = \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \cdots + \beta_k P_k \tag{4.4}$$

が成り立つ。これを正規行列 A のスペクトル分解という。

具体的に A が与えられたときに射影子を求めるときは次の等式が有効である。

定理 25 (射影子の具体的な形) 前定理と同じ条件のもとで、

$$P_i = \frac{\Pi_{j \neq i}(A - \beta_j I_n)}{\Pi_{j \neq i}(\beta_i - \beta_j)} \tag{4.5}$$

4.6 エルミート行列のユニタリ行列による対角化

上に示した射影子の性質から

$$\begin{aligned} A &= \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \cdots + \beta_k P_k \text{に対して、} && (4.6) \\ A^* &= \bar{\beta}_1 P_1 + \bar{\beta}_2 P_2 + \cdots + \bar{\beta}_k P_k \text{であり、} && (4.7) \\ AA^* &= |\beta_1|^2 P_1 + |\beta_2|^2 P_2 + \cdots + |\beta_k|^2 P_k \text{となる。} && (4.8) \end{aligned}$$

であるから、エルミート行列、ユニタリ行列の固有値について以下の定理が成り立つ

定理 26 (エルミート行列、ユニタリ行列の固有値) エルミート行列の固有値は実数であり、ユニタリ行列の固有値は絶対値が 1 の複素数となる。

4.7 実対称行列の直交行列による対角化

実対称行列は正規行列であるから

定理 27 (実対称行列の対角化) 実対称行列は実ユニタリ行列（つまり直交行列）によって対角化可能である

第５章　雑多な事項

5.1　３次の回転群

３次の行列式のうち、その行列式の値が１になるものの集合を３次の回転群とよぶ。

すなわち、

$$SO(3) = \{P \in M_3(\mathsf{R}) | \det P = 1 \ {}^tPP = P^tP = I_3\} \tag{5.1}$$

定理 28 (**軸の存在**) $P \neq I_3$ ならば

$$\dim W = 1 (W = \{x \in \mathsf{R}^3 | P\vec{x} = \vec{x}\}) \tag{5.2}$$

これは回転群に属する行列 P で表される座標変換に対して変わらない方向が存在することを示している。

またそれは次の定理から、それが回転軸としての特徴を持つことがわかる。

定理 29 (**軸の周りの回転**) W の直交補空間を $W^{\perp}$ とするとき

$$\vec{x} \in W^{\perp} \to P\vec{x} \in W^{\perp} \tag{5.3}$$

定理 30 (**変換による大きさ不変**)

$$\forall \vec{x} \in \mathsf{R}^3 \parallel P\vec{x} \parallel = \parallel \vec{x} \parallel \tag{5.4}$$

定理 31 (**角度不変**) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathsf{R}^3$ に対して、$\vec{x}, \vec{y}$ のなす角を θ, $P\vec{x}, P\vec{y}$ のなす角を $\acute{\theta}$ とすると

$$\theta = \acute{\theta}$$

は軸に垂直な平面内のベクトルは P による変換に対して閉じていることを示す。

は変換による大きさが不変であることを示す。

ところで ${}^tPP = P^tP = I_3$ となる行列は他にも存在する。それは $\det P = -1$ となるものでこちらはある面に関する対称移動を表す。

5.2 Lagrange 補間

定理 32 (**補間多項式**) 多項式

$$f_N(x) = \sum_{i=0}^{N} c_j x^j \tag{5.5}$$

が

$$f_N(x_i) = y_i \ (i = 0 \cdots N) \tag{5.6}$$

を満たすとき、

$$f_{Ni}(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{5.7}$$

とおくと、

$$f_N(x) = \sum_{i=0}^{N} y_i f_{Ni}(x) \tag{5.8}$$

で与えられる

5.3 グラム行列

この章では $\mathsf{K} = \mathsf{R}$ とする。

$m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix}$、$\vec{x} \in \mathsf{R}^n$ に対して、$\vec{x}$ の $\mathsf{V} = Im(A)$ への直交射影 P_{V} を求める。

$$\begin{aligned} \vec{x} - P_{\mathsf{V}}\vec{x} \perp \mathsf{V} \quad &\Longleftrightarrow \quad (\vec{x} - P_{\mathsf{V}}\vec{x}\ , A\vec{w}) = \vec{0}(\forall \vec{w} \in \mathsf{R}^n) && (5.9) \\ &\Longleftrightarrow && (5.10) \end{aligned}$$

5.4 Wronski 行列

微分方程式

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A(t)\vec{x}(t)$$

(各成分に分けて書くと)

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) \ (i = 1 \cdots n)$$

の解が $\vec{x}_1(t), \cdots \vec{x}_n(t)$ であるとする。A に対する Wronski 行列 W を

$$W(\vec{x}_1(t), \cdots \vec{x}_n(t)) = \det(\vec{x}_1(t), \cdots \vec{x}_n(t))$$

によって定義する。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(\vec{x}_1(t), \cdots \vec{x}_n(t)) &= \frac{d}{dt}\sum_{\sigma}\epsilon(\sigma)x_{1\sigma(1)}\cdots x_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma}\epsilon(\sigma)x_{1\sigma(1)}\cdots\frac{d}{dt}x_{i\sigma(i)}\cdots x_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dt}x_{i1} & \cdots & \frac{d}{dt}x_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{11} & \cdots & x_{1n} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n}a_{ii}\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{11} & \cdots & x_{1n} \end{vmatrix} \\
&= (trA)W
\end{aligned}$$

であるから、W は微分方程式

$$\frac{d}{dt}W = (trA)W \tag{5.11}$$

の解であり、

$$W(t) = \exp(\int_0^s trA(s)ds)W(0) \tag{5.12}$$

第6章　終わりに

一応授業のまとめって形でシケプリ作ったのですが、結局ノートを整理したぐらいのものになってしまいました。理解のしやすさとかを考えて授業で行った証明とは異なる証明を与えていたり、順番を変えた部分があります。証明は適宜与えていますが、難しいものは教科書参照という形にしました。そういったものはおそらく試験には出ないだろうし、出たとしても誰もできなくて成績には関係ないと思います。（特に行列の標準化の部分は説明しようと思えばいくらでも細かく説明できますが、今の段階ではそこまで深く踏み込む必要はないでしょう）

　試験についてちょっとここで話しときたいと思います。一学期は試験がとーっても簡単だったので（4 割優だったそうな）今回は（少なくともあれよりは）難化すると予想されます。難化といっても普段慶応の経済学部生相手にして、学力低下を肌で感じているであろう教師ですから、（彼のホームページにいって慶応生用の試験問題のぞいてみればわかります）そんなにカオス的な問題にはならないでしょう。まあやってること自体かなりレベルが高いので、自然に試験も難しくなるでしょうが、単位をとりに行くだけなら、どこかの人が言っていたような「計算機に乗るような」問題だけやっときゃ何とかなるでしょう（例えば回転の軸を求めたり、対角化したり、グラム行列出したり、最小多項式求めたり、具体的な行列をスペクトル分解したり、ジョルダン標準形求めたりなど）。まず演習の計算問題から始めて余裕があればなんか自分で問題集買うのもいいでしょう。あるいはオール東大から他の教官の試験問題引っ張り出してとくのもいいかもしれません。もっといい点取りたい人へ。演習の証明問題やっておきましょう。あとは教科書とひたすら格闘してください。ではでは健闘をお祈りします。

関連図書

[1] 佐武一郎著、「線型代数学」　（裳華房）

[2] 齋藤正彦著、「線型代数入門」（東京大学出版会）

[3] 乙部厳己、江口庄英著、　「pLaTeX2ε for Windows 」
（ソフトバンクパブリッシング）

[4] 高妻真吾著、数学II①②③ノート　（非買品）