数学 IA ノート

木曜 3 限 高木俊輔師

理科 1 類 27 組前多啓一

理科 1 類 27 組夏学期木曜 3 限の数学 IA のノートをデータで打ち込んだだけのものです．間違いがあったら，メールしてくださると助かります．LaTeX をはじめて利用したので見苦しい点もあると思いますが，ご了承ください．

1　数列の極限

$\mathbf{N} = \{$ 自然数全体 $\} = \{1, 2, 3, \cdots\}$
$\mathbf{Z} = \{$ 整数全体 $\} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$
$\mathbf{Q} = \{$ 有理数全体 $\} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$
$\mathbf{R} = \{$ 実数全体 $\} \ni \sqrt{2}$

† 実数とは何か
この講義では，実数とは，次の公理を満たすものとする．
・四則演算 (加減乗除)
・順序
$\{a, b \in \mathbf{R}, \forall a \forall b\}$ に対して，$a > b, a = b, a < b$ のいずれかが成り立つ．

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

・$\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ さらに，$\mathbf{Q}$ 上の四則演算・順序は通常のものと一致する．
・次の 2 つの公理を満たす (実数の連続性)
公理 1　アルキメデスの公理
$\forall a, \forall b \in \mathbf{R}, a > 0, b > 0$ に対して，$a < Nb$ となるような自然数 N が存在する．
公理 2　区間縮小法
$I_n = [a_n, b_n] = \{x \in \mathbf{R} | a_n \geq x \geq b_n\} (n \in \mathbf{N})$ が次の 2 条件を満たすとする．
(i) $\forall n \in \mathbf{N}$ に対して $I_n \supset I_{n+1}$
(ii) $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$　このとき，$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} I_n = \{c\}$ となる実数 c が存在し，さらに，
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$
<u>注意</u>　具体的には，有理数を「完備化」して実数を構成する．

† $\lim_{n\to\infty} a_n$ をどのように定義するか
<u>例</u>

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ をどのように数学的に正当化するか？

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$「$n$ を限りなく大きくしていくと，$|a_n - a|$ は限りなく 0 に近づく」

$\Leftrightarrow$「どんなに小さい実数$\varepsilon > 0$ をとってきても，n を十分大きくとれば，$|a_n - a| < \varepsilon$

<u>定義</u>

a_nを実数列 $(a_n \in \mathbf{R}), a \in \mathbf{R}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a(a_n \to a(n \to \infty))$

$\Leftrightarrow$ 任意の実数$\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 N が存在し，$n \geq N$ ならば，$|a_n - a| < \varepsilon$

$a_n \to a(n \to \infty)$ となるとき，$\{a_n\}$ は a に収束するという．

<u>例</u>　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\forall\varepsilon$に対し，アルキメデスの公理により，$1 < \varepsilon N$ となる自然数 N が存在する．

もし，$n \geq N$ であれば，$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$ □

<u>命題</u>

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$ とする．$(a, b \in \mathbf{R})$

このとき，(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

(3)$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して，$b_n \neq 0, b \neq 0$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$

$\because$

(1) $\forall\varepsilon$を一つ固定する．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \exists N_1 \in \mathbf{N}$ が存在して，$n \geq N1$ ならば，$|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = b \Leftrightarrow \exists N_2 \in \mathbf{N}$ が存在して，$n \geq N2$ ならば，$|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ として，$n \geq N$ ならば，$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

よって，(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ になる．　□

すなわち，「収束していれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ と四則演算は交換可能」ということ．

<u>定理</u>(はさみうちの原理)

$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して，$b_n \leq a_n \leq c_n$とする．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a(a \in \mathbf{R})$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$

$\because$

$\forall\varepsilon$を一つ固定する．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = a \Leftrightarrow \exists N_1 \in \mathbf{N}$ が存在して，$n \geq N1$ ならば，$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = a \Leftrightarrow \exists N_2 \in \mathbf{N}$ が存在して，$n \geq N2$ ならば，$a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ として，$n \geq N$ ならば，$a - \varepsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < a + \varepsilon$

よって，$|a_n - a| < \varepsilon$となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ になる．　□

<u>例</u> $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n (1 > r > 0)$

$\frac{1}{r} > 1$ より，$\frac{1}{r} = 1 + \theta(\theta > 0)$ と書ける．

$\frac{1}{r^n} = (1+\theta)^n = 1 + n\theta + \cdots + \theta^n > n\theta$

$0 < r^n < \frac{1}{n\theta} \to 0 (n \to \infty)$

はさみうちの原理より，$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. $\square$

<u>定義</u>

(1)

a が S の上界 $\Leftrightarrow \forall x \in S$ に対して，$x \leq a$

S が上に有界 $\Leftrightarrow$ S の上界が存在する．

(下界，下に有界も同様に定義する．)

(2)

$\sup S$ 　S の上界のうち，最小のもの

$\inf S$ 　S の下界のうち，最大のもの

<u>例</u>

$S = \{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbf{N}\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\}$

$\sup S = 1$ 　$\inf S = 0$

たとえば，上の例では，$\max S$ は存在しない．1 に限りなく近い S の元はとれるが，$1 \notin S$

<u>定理</u>

S が上に有界ならば, $\sup S$ は常に存在する．

S が下に有界ならば, $\inf S$ は常に存在する．

<u>注意</u>

$\max S$ は常に存在するとは限らないが, $\sup S$ は上に有界ならば，常に存在する．$\max S$ が存在すれば,

$\sup S = \max S$

$\because$

S の上界を一つ取る．$b_1 \in R$

S の上界ではない元を一つ取る．$a_1 \in R$

$c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$

c_1が S の上界ならば，$b_2 = c_1, a_2 = a_1$とおく．

c_1が S の上界でないならば，$b_1 = b_2, a_2 = c_1$とおく．

$c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$

c_2が S の上界ならば，$b_3 = c_2, a_3 = a_2$とおく．

c_2が S の上界でないならば，$b_2 = b_3, a_3 = c_2$とおく．

これを繰り返して，数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ を定義する．

・$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$

・$b_n - a_n = \frac{1}{2^n-1}(b_1 - a_1) \to 0 (n \to \infty) (\lim_{n\to\infty} r^n = 0)$

区間縮小法の公理から，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$ 　となる $c \in \mathbf{R}$ が存在する．

まず c は S の上界であることを示す．

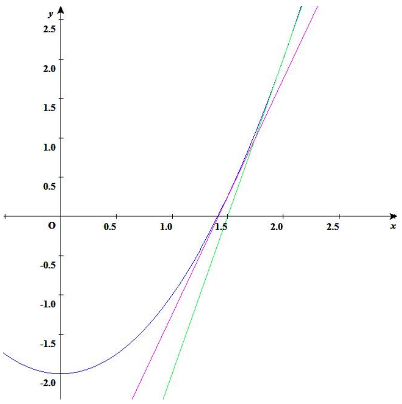
上界でないとすると, $\exists x \in S$ が存在して，$x > c$

$\lim_{n\to\infty} b_n = c$ より，$\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して，
$n \geq N$ ならば，$|b_n - c| = b_n - c < x - c(\varepsilon = x - c$ の場合を考えている$)$
つまり，$b_n < x$
$\{b_n\}$ の定義から，b_nは $\forall \in \mathbf{N}$ に対して，b_nは S の上界なので，これは矛盾．よって，c は S の上界．
次に，$c = \sup S$ を示す．
もし，$c > d$ となる S の上界 $d \in \mathbf{R}$ が存在したとすると，$\lim_{n\to\infty} a_n = c$ より，$\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して，
$n \geq N$ ならば，$|a_n - c| = c - a_n < c - d(\varepsilon = c - d)$
つまり，$d < a_n \{a_n\}$ の定義から，$\forall n$ に対して，a_nは S の上界ではない．
ゆえに，d も S の上界ではない．これは矛盾．よって，$c = \sup S$. $\square$

<u>定理</u>
数列 $\{a_n\}$ が<u>単調増加</u>かつ<u>上に有界</u>ならば，数列 $\{a_n\}$ は収束する．
　$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$　　$\exists M > 0$ が存在して，$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して，$a_n \leq M$
数列 $\{a_n\}$ が<u>単調減少</u>かつ<u>下に有界</u>ならば，数列 $\{a_n\}$ は収束する．
　$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$　　$\exists M < 0$ が存在して，$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して，$a_n \geq M$
$\because$
1 つ上の定理から，$\sup\{a_n\}$ が存在する．$\sup\{a_n\} = a$ とおく．
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を示す．
もし $\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$ とすると，$\exists \varepsilon > 0$ が存在して，$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して，$|a_n - a| \geq \varepsilon$となる $n \geq N$ が存在．
つまり，$\exists \varepsilon$が存在して，$\forall N \in \mathbf{N}$ に対して，$a - \varepsilon \geq a_N$
$a - \varepsilon$は，$\{a_n\}$ の上界となるが，これは矛盾 ($a = \sup S$ の最小性に反する．)．
$a - a_n \geq \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon \geq a_n \geq a_N$
よって，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$. $\square$

<u>系</u>
単調増加で上に有界な数列は収束する．

<u>例</u>



数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する．
$a_1 = 2$
$x = a_n$での接線 l_nの方程式は，
$y - f(a_n) = f'(a_n)(x - a_n) \Leftrightarrow y = 2a_n x - a_n^2 - 2$
接線 l_nと x 軸の交点の x 座標は，
$x = \frac{a_n^2+2}{2a_n} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$
これを a_{n+1}とおく．
$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$　となることを示す．
$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = \sqrt{2}$ ($\because$ 相加相乗平均)
よって，数列 a_nは下に有界．
$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2-2}{2a_n} > 0$ ($\because a_n \geq \sqrt{2}$)

よって，数列 $\{a_n\}$ は単調減少．

$\Rightarrow \{a_n\}$ は収束する．$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ となる $a \in \mathbf{R}$ が存在する $(a > 0)$($\because$ 系 (単調減少の場合))．

$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{a_n}) = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{a}$

$\therefore a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{a}$

$\therefore a^2 = 2$

$\therefore a > 0$ より，$a = \sqrt{2} \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$

$\{a_n\}$ は$\sqrt{2}$ の近似を与えている．(Newton 法)

$a_1 = 2$

$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{a_1} = \frac{3}{2} = 1.5$

$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{a_2} = \frac{17}{12} = 1.4166\ldots$

$a_4 = \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{a_3} = \frac{577}{408} = 1.41426\ldots$

2 関数の極限

$f : I \to \mathbf{R}$ 関数

$a \in \mathbf{R}$ $\exists b > 0$ が存在して，$(a-b, a) \cup (a, a+b) \subset I(a \in I$ とは限らない)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A =$ x を a に限りなく近づけると，$f(x)$ は A に限りなく近づく．

$=$ x を a に限りなく近づけたとき「その近づけ方に依らず」$f($x$)$ は A に限りなく近づく．

定義

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a(I \ni x_n \neq a)$ なる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = A$.

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to\infty} x_n = a(I \ni x_n > a)$ となる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to\infty} x_n = a(I \ni x_n < a)$ となる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

例

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

($f(x)$ は $x = 0$ では定義されていない．)

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ $(x > 0)$ となる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

よって，$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ $(y < 0)$ となる任意の数列 $\{y_n\}$ に対して，$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

よって，$\lim\limits_{y\to 0-0} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ は存在しない．

命題

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon$に対して，$\exists\delta$が存在し，$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon$に対して，$\exists\delta$が存在し，$0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon$に対して，$\exists\delta$が存在し，$0 < a-x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\because$

($\Leftarrow$) $\lim_{n\to\infty} x_n = a(I \ni x_n \neq a)$ となる任意の $\{x_n\}$ を 1 つとる．$\forall\varepsilon$を 1 つ固定する．
仮定より，$\exists\delta > 0$ が存在して，$0 < |x-a| < \varepsilon$ならば，$|f(x) - A| < \varepsilon$
$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ より，$\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して，$n \geq N$ ならば，$0 < |x_n - a| < \delta$
よって，$n \geq N$ ならば，$|f(x_n) - A| < \varepsilon$
つまり，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$
これより，$\lim_{x\to a} f(x) = A$.
($\Rightarrow$)$\exists\varepsilon$が存在して，$\forall\delta$に対して，
$0 < |x-a| < \delta$かつ $|f(x) - A| \geq \varepsilon$
となる $x \in \mathbf{R}$ が存在すると仮定する (背理法).$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して,$\delta = \frac{1}{n}$の時を考える．
$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$かつ $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$
となる $x_n \in \mathbf{R}$ が存在する．はさみうちの原理から，$\lim_{n\to\infty} x_n = a$
仮定より，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$
しかし，$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して，$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$．これは矛盾． $\square$

<u>系</u>

$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = A$

<u>定義</u>

$f : I \to \mathbf{R}$ $a \in I$
f が $x = a$ で連続 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to a} f(x) = f(a)$
$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ に対して，$\exists\delta$が存在して，$|x-a| < \delta$ならば，$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$
f が (I 上) 連続 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall a \in I$ に対して，f は $x = a$ で連続
◎連続 $\fallingdotseq$ グラフがつながっている

<u>例</u>

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0+0} f(x) = 1$ $\lim_{x\to 0-0} f(x) = 0$
f は $x = 0$ で不連続.

<u>命題</u>

$\lim_{x\to a} f(x) = A$ $\lim_{x\to a} g(x) = B$ とする．
(1) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$
(2) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = AB$
(3) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ (ただし，$g(x) \neq 0$ かつ $B \neq 0$ とする．)

特に，$f, g : I \to \mathbf{R}$ $x = a$ で連続とすると，
$f(x) + g(x), f(x)g(x)\frac{f(x)}{g(x)}(g(a) \neq 0)$
はいずれも $x = A$ で連続.

†a^xは次のように定義する．

(i)x が有理数のとき

$x=\frac{m}{n}$ならば，$a^x=(a^m)^{\frac{1}{n}}$と定義する．

(ii)x が無理数のとき

$a>1$ とする．$S_x=\{a^t|t\in\mathbf{Q},t<x\}\subseteq\mathbf{R}$

$x<u$ となる $u\in\mathbf{Q}$ をとると，a^uは S_xの上界．

つまり，S_xは上に有界．$a^x=\sup S_x$と定義する．$x<x'$ならば，$a^x<a^{x'}$となる．

<u>例</u>

$x=1.23423123\ldots$無理数

$x_n=x$ の小数点以下第 n 位まで　$\to a^x=\lim_{n\to\infty}a^{x_n}$

<u>定理</u>

$f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 連続

(1) 最大値・最小値の定理

$\exists c,d\in[a,b]$ が存在して，$\forall x\in[a,b]$ に対して，$f(c)\leq f(x)\leq f(d)$

(2) 中間値の定理

$f(a)<f(b)$ とする．$f(a)<\forall\gamma<f(b)$ に対して，$f(c)=\gamma$となる $c\in[a,b]$ が存在する．

<u>注意</u>

(1)f が連続でなければ成り立たない．

$f:[-1,1]\to\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

$f(-1)=-1<\frac{1}{2}<1=f(1)$

$f(c)=\frac{1}{2}$となる $c\in[-1,1]$ は存在しない．

$\lim_{x\to 0+0}f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to 0-0}f(x)=-\infty$

より，最大値，最小値も存在しない．

(2)I が閉区間でなければ成り立たない．

$f:[0,1)\to\mathbf{R}$

$f(x)=x$

$\sup f(x)=1$ だが，f は最大値をもたない．

$\because$

(1)「点列コンパクト」を学んだあとに証明する．

(2)$S=\{x\in[a,b]|f(x)<\gamma\}$ とおく．

$S\subset[a,b]$ より，S は上に有界．$c=\sup S$ とおく．

$\forall n\in\mathbf{N}$ に対して，$c=\frac{1}{n}$は S の上界ではない．$\exists x_n\in S$ が存在して，$c-\frac{1}{n}<x_n$　$c-\frac{1}{n}<x_n\leq c$

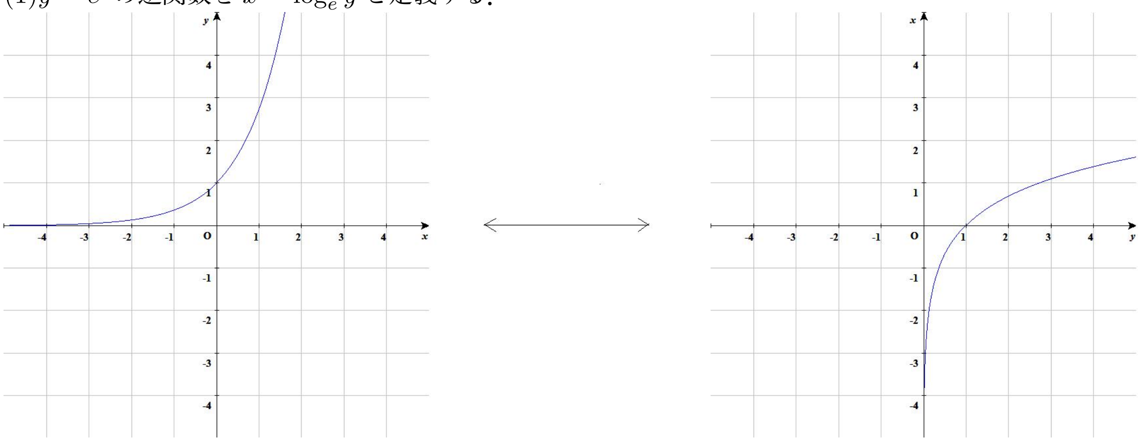
はさみうちの原理から，

$\lim_{n\to\infty}x_n=c$

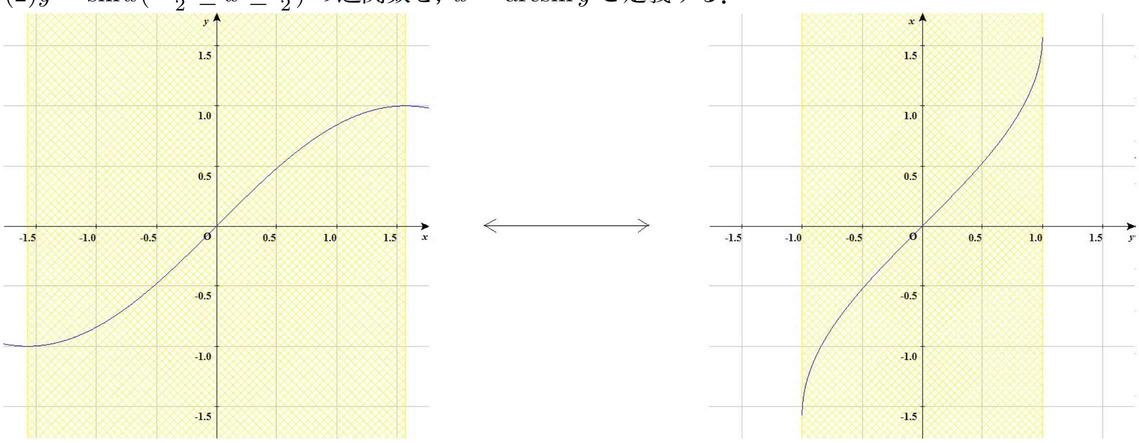
一方，$x_n\in S$ より，$f(x_n)<\gamma$

$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \gamma$
$y_n = c + \frac{1}{n}$ とおくと，
$\lim_{n\to\infty} y_n = c$
$y_n > c$ $y_n \notin S$
よって，$y_n \geq \gamma$ $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \geq \gamma$　したがって，$f(c) = \gamma$. $\square$

$f : [a,b] \to \mathbf{R}$ 狭義単調増加な連続関数
$a \leq s < t \leq b \Rightarrow f(s) < f(t)$
定義
$f(s) = f(t) \Leftrightarrow s = t (s,t \in [a,b])$
$f(a) \leq \forall y \leq f(b)$ に対して，中間値の定理を使うと，$y = f(x)$ となる $x \in [a,b]$ がただ一つ存在する．
$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbf{R}$
これを f の逆関数という．
注意
$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$
例
(1)$y = e^x$ の逆関数を $x = \log_e y$ と定義する．



(2)$y = \sin x (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ の逆関数を，$x = \arcsin y$ と定義する．



(3)$y=\cos\,(0\le x\le\pi)$ の逆関数を $x=\arccos y$ と定義する.

(4)$y=\tan x(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})$ の逆関数を, $x=\arctan y$ と定義する.

<u>注意</u>

$\arcsin y,\arccos y,\arctan y$ の値域に注意.

<u>命題</u>

$f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 狭義単調増加でかつ連続 $\Rightarrow f^{-1}[f(a),f(b)]\to\mathbf{R}$ は連続

$\because$

$f(a)\le\forall A\le f(b)$ に対し, $f^{-1}(y)$ が $y=A$ で連続を示す.

$A=f(c)$ となる $c\in[A,B]$ をとる. 簡単のため, $c\neq A,B$ とする.

$\forall\varepsilon$を 1 つ固定する. $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\subset[A,B]$ と仮定してよい.

$f(c-\varepsilon)=A-\delta_1$ $f(c+\varepsilon)=A+\delta_2$と書くと, f は単調増加だから, $\delta_1,\delta_2>0$

$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$ とおくと,

$A-\delta<y<A+\delta$となる任意の y に対して,

$f(c-\varepsilon)\le A-\delta<y<A+\delta\le f(c+\varepsilon)$

$c-\varepsilon<f^{-1}(y)<c+\varepsilon$

$c=f^{-1}(A)$ より, $|f^{-1}(y)-f^{-1}(A)|<\varepsilon$

これより, f^{-1}は $y=A$ で連続. $\square$

この命題より, $x=\arcsin y,x=\arccos y,x=\arctan y$ はすべて連続.

3 微分

<u>定義</u>$f:I\to\mathbf{R}$ $x_0\in I$

(1)f が $x=x_0$で微分可能 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$が存在する.

(2)f が (I 上) 微分可能 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}\forall x_0\in I$ に対して, f が $x=x_0$で微分可能.

このとき, $f':I\to\mathbf{R}$ もしくは, $\frac{df}{dx}:I\to\mathbf{R}$ を f の導関数という.

<u>命題</u>

f が $x=x_0$で微分可能 $\Rightarrow f$ は $x=x_0$で連続

$\because$

f が $x=x_0$で連続 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{h\to0}f(x+h)=f(x)$

$$\lim_{h\to0}(f(x+h)-f(x))=\lim_{h\to0}(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h)=\lim_{h\to0}(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to0}h=0.\ \square$$

<u>例</u>

$f(x)=|x|$ について,

$$\lim_{h\to0+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0+0}\frac{h}{h}=1\ \lim_{h\to0-0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0-0}\frac{-h}{h}=-1$$

よって, $f(x)$ は $x=0$ で微分不可能.

<u>命題</u> $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 狭義単調増加で微分可能さらに, $f'(x)\neq0(\forall x\in[a,b])$ とする.

$\Rightarrow f^{-1}:[f(a),f(b)]\to\mathbf{R}$ も微分可能で, $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$

$\because$

$f^{-1}(y)$ が $y=y_0$で微分可能であることを示す.

$x=f^{-1}(y), x_0=f^{-1}(y_0)$ とおく. $f^{-1}(y)$ は連続なので, $y\to y_0$のとき, $x\to x_0$

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x)}.\ \square$$

例

$x=\arcsin y \qquad (\sin x)'\neq 0$ のとき微分可能.

$\sin x=y$ の両辺を y で微分.

$(\cos x)(\arcsin y)'=1$

$-\frac{\pi}{2}\leq \arcsin y\leq \frac{\pi}{2}$より, $\cos x\geq 0$

$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-y^2}$

$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

命題(Rolle の定理)

$f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 微分可能 $c\in(a,b)$

f が $x=c$ で極大 (極小) $\Rightarrow f'(c)=0$

$\because$

$f'(c)$ が $x=c$ で極大 $\Rightarrow \exists\varepsilon>0$ が存在して, $c\neq\forall x\in(c-\delta,c+\delta)$ に対して, $f(x)<f(c)$.

$c-\delta<x<c$ のとき, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$

$c<x<c+\delta$のとき, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<0$

よって, $\displaystyle\lim_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0\ \lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$

ゆえに, $\displaystyle\lim_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)=0.\ \square$

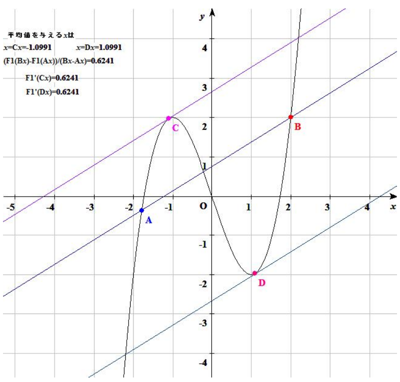
定理(平均値の定理)

$f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 連続

さらに, f は (a,b) 上微分可能とする. このとき,

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

となる $c\in(a,b)$ が存在する.



$\because$

$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$\varphi:[a,b]\to\mathbf{R}$ に対して平均値の定理が成り立つと仮定すると,

$0=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\varphi'(c)$

となる c が存在する.

$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ より,

$\varphi'(c)=0$ ならば, $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

よって, $f(a)=f(b)$ の場合を示せばよい.

$(f'(c)=0$ となる c が存在することを示す.$)$

f が定数関数だとすると明らか. f は定数関数ではないとする.

最大値, 最小値の定理より, f は最大値 M, 最小値 m をもつ.

f は定数関数ではないので，$M > f(a) = f(b)$, もしくは，$m < f(a) = f(b)$.
$M > f(a) = f(b)$ とする．$M = f(c)$ となる c $\in [a, b]$ よって，M は $x = c$ で極大.
したがって，前の命題より，$f'(c) = 0$ □.

$[a, x]$ 上，平均値の定理を適用すると，
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$
となる $a < c < x$ が存在する.
$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$ 「一次近似」
$f : I \to \mathbf{R}$ が微分可能 $\Rightarrow f' : I \to \mathbf{R}$ 導関数
$f' : I \to \mathbf{R}$ が微分可能 $\Rightarrow f'' : I \to \mathbf{R}$ 2 次導関数 (f は 2 階微分可能)
$f'' : I \to \mathbf{R}$ が微分可能 $\Rightarrow f'''(f^{(3)}) : I \to \mathbf{R}$ 3 次導関数 (f は 3 階微分可能)
$f^{(n)} : I \to \mathbf{R}$ を $\frac{d^n f}{dx^n} : I \to \mathbf{R}$ とも書く.

定義
f が C^n級 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ f が n 階微分可能かつ f^nが連続.
f が C^∞級 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ f が何回でも微分可能.
例

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

$f(x)$ は C^1級.

$$\lim_{n \to 0+0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = 2$$

$$\lim_{n \to 0-0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = 0$$

よって，$f'(x)$ は $x = 0$ で微分不可能 (f は C^2級ではない).

定理(Taylor の定理)
$f : [a, b] \to \mathbf{R}$ C^{n-1}級
さらに，f は (α, β) 上 n 階微分可能とする.
$a, x \in [\alpha, \beta]$ のとき，
$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - a)^n$
となる $a < c < x$ もしくは，$x < c < a$ が存在する.
特に，$a = 0$ の場合,
$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n$
このとき, $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - a)^n = R_n(x, a)$ $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n = R_n(x, 0)$ を(Lagrange の）剰余項という.
$\because$
$x > a$ とする ($x < a$ の場合も同様). x を固定する.
$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + \frac{A}{n!}(x - a)^n$

となる実数 A をとる．
$a \leq t \leq x$ とし，$F(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{A}{n!}(x-t)^n$
という関数 $F[a,x] \to \mathbf{R}$ を考える．F は $[a,x]$ 上連続で，(a,x) 上微分可能．
$F(a) = f(x)$ $F(x) = f(x)$ であるから，Rolle の定理より，$F'(c) = 0$ となる $a < c < x$ が存在する．
$F'(x) = f'(t) + (\frac{f'(t)}{1!}(x-t))' + (\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2)' + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - \frac{A}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$
$0 = F'(c) = \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - \frac{A}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$
これより，$A = f^{(n)}(c)$. $\square$

注意

剰余項 $R_n(x,a)$ の表し方は 1 通りではない．同様の方法で，
$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + \frac{f^n(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}(x-a)$
$(a < c < x, x < c < a)$
$\frac{f^n(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}(x-a) = R_n(x,a)$ をCauchy の剰余項という．

定義

$f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ C^∞級
$(a,x) \in [\alpha, \beta]$
Taylor の定理より，
$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$
もし，$\underline{\lim_{n\to\infty} \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n = 0}$ならば，
$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(x-a)^n$$
と書ける．これを，$f(x)$ の $x = a$ での Taylor 展開という．

例

(1)$f(x) = e^x$
$f^{(k)}(x) = e^x (k = 0, 1, 2, \dots)$
$f^{(k)}(0) = 1$
Taylor の定理より，
$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^c}{n!}x^n$ $(0 < c < x$ または $x < c < 0)$
$0 < c < x$ とする．($x < c < 0$ の場合も同様)
$0 \leq |R_n(0,x)| \leq e^x \ \frac{x^n}{n!} \to 0 (n \to \infty)$
よって，はさみうちの原理より，
$\lim_{n\to\infty} R_n(x,a) = 0$
より，e^x は Taylor 展開可能．
$\therefore e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots (x \in \mathbf{R})$

(2)$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$
$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ $f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$
$f'(0) = \frac{1}{2}$ $f''(0) = -\frac{1}{4}$ $f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$
Taylor の定理より，

$\sqrt{1+x} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}(1+c)^{-\frac{5}{2}}x^3$

$x = 0.01$ を代入

$\sqrt{1.01} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{2}\cdot(0.01) - \frac{1}{8}\cdot(0.0001)$=1.0049875

誤差 $0 < \frac{1}{16}(1+c)^{-\frac{5}{2}}(0.01)^3 < \frac{1}{16}\times 10^{-6}$

$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 3\cdot 1}{2^k}(1+x)^{\frac{1}{2}-k}$

$f^k(0) = A_k$ とすると，Taylor の定理より，

$\sqrt{1+x} = 1 + A_1 x + \frac{A_2}{2}x^2 + \cdots + \frac{A_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}x$

$c = \theta x (0 < \theta < 1)$ とおくと，

$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!} - (1-\theta)^{n-1}x^n$

$|x| < 1$ とする．

$|R_n| = \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{2^n(n-1)!}(1+\theta x)^{\frac{1}{2}-n}(1-\theta)^{n-1}|x|^n$

$\geq \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{(2n-n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2\cdot 2}(1-\theta|x|)^{\frac{1}{2}-n}(1-\theta)^{n-1}|x|^n$

$|x| < 1$ $0 < 1-\theta < 1-\theta|x|$ より，

$|x|^n \to 0 (n\to\infty)$ $(\frac{1-\theta}{1-\theta x})^{n-1} \to 0 (n\to\infty)$ なので，

$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$

よって，$\sqrt{1+x}$は $|x| < 1$ でTaylor 展開可能で，

$\sqrt{1+x} = 1 + A_1 x + \cdots + \frac{A_n}{n!}x^n + \ldots (|x| < 1)$

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}}{n!}x^n (\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(f,0) = 0)$ となるとき，f は $x = 0$ の周りでTaylor 展開可能という．

問い

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$はいつ収束するか．

(2) いつでも Taylor 展開可能か．

(3)$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n (|x| < r)$ となるとき，

$f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n+1)}(0)}{n!}x^n$ となるか．($\sum$ と $\frac{d}{dx}$は交換可能か．)

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} (|x| < r)$ となるか．($\sum$ と $\int$ は交換可能か．)

(2) は No!

例 $f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$$

f は $x = 0$ で微分可能で，$f'(0) = 0$.

同様にして，$f''(0) = f^{(3)}(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \cdots = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0 (x \in \mathbf{R})$$

一方，$x>0$ ならば，$f(x)=e^{-\frac{1}{x}}\neq 0$

よって，$f(x)$ は $x=0$ で Taylor 展開不可能.

4 級数

<u>定義</u>(上極限・下極限)

$a_n(a_n\in\mathbf{R})$

$S=\{a_n|n\in\mathbf{N}\}$ は上に有界とする. $\forall k\in\mathbf{N}$ に対して，$S_k=\{a_n|n\geq k\}$ とおく.

$S\supset S_1\supset S_2\cdots$

各 S_kは上に有界なので, $\sup S_k=\overline{a_k}$とおく.

$\overline{a_1}\geq\overline{a_2}\geq\overline{a_3}\geq\cdots$

・$\{\overline{a_k}\}$ が下に有界な場合

　$\{\overline{a_k}\}$ は収束する. $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\lim_{k\to\infty}\overline{a_k}$と定義する.

・$\{\overline{a_k}\}$ が下に有界でない場合

　$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=-\infty$ と定義する.

(S が上に有界でない場合には，$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\infty$ と定義する.)

$\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$も同様に定義する (sup を inf に変える).

$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$を数列 a_nの上極限, $\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$を数列 a_nの下極限という.

<u>例</u> $a_n=(-1)^n(a+\frac{1}{n})$

$k=2m$ のとき

$\overline{a_k}=\sup S_k=\sup\{(-1)^n(1+\frac{1}{n})|n\geq k\}=1+\frac{1}{k}$

$k=2m+1$ のとき

$\overline{a_k}=1+\frac{1}{k+1}$

$\lim_{k\to\infty}\overline{a_k}=1$

同様に，$\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=-1$

<u>注意</u>

(1) $\inf S_k=\underline{a_k}\leq a_k\leq\overline{a_k}=\sup S_k$

(2) $\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$

<u>命題</u>

$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\alpha\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$

(1)$\forall\varepsilon>0$ に対して，$\exists N\in\mathbf{N}$ が存在して，$n\geq N$ ならば，$a_n-\alpha<\varepsilon$

かつ

(2)$\forall\varepsilon>0$ に対して, $\alpha-\varepsilon<a_n$となる n が無限個存在する.

$\because$

$(\Rightarrow)$

$\forall\varepsilon$を 1 つ固定する.

$\lim_{k\to\infty}\overline{a_k}=\alpha$より，$\exists N\in\mathbf{N}$ が存在して，$k\geq\mathbf{N}$ ならば, $\alpha-\epsilon<\overline{a_k}<\alpha+\epsilon$

$a_k\leq\overline{a_k}$より，$k\geq N$ ならば,

$a_k \leq \overline{a_k} < \alpha + \epsilon$ (1) はＯＫ．□

$\alpha - k < \overline{\alpha_k} = \sup S_k$ より，$\alpha - k$ は S_k の上界ではない．

$\exists n_k \geq k$ が存在して，$\alpha - k < a_{n_k}$

$k \to \infty$ のとき，$n_k \to \infty$　よって，

$\alpha - k < a_{n_k}$

となる n_k は無限個存在する．(2) はＯＫ．□.

$(\Leftarrow)$

$\forall \varepsilon > 0$ を 1 つ固定する．

(1) より，$\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して，$n \geq N$　ならば，$a_n < \alpha + \epsilon k \geq N$ ならば，

$\overline{a_k} = \sup S_k \geq \alpha + \varepsilon$

(2) より，$\alpha - \varepsilon < a_{n_k}$ となる

$n_1 < n_2 < \cdots, \lim_{k\to\infty} n_k = \infty$

となるものが存在する．

$\forall k \in \mathbf{N}$ に対して，

$a - \varepsilon < a_{n_k} \leq \overline{a_{n_k}} \leq \overline{a_k}$

$a - \varepsilon \leq \lim_{k\to\infty} \overline{a_k} \leq \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}$

以上より，$a - \varepsilon \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n$. □

<u>系</u>

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n = \alpha$

$\because$

$\Leftarrow$　はさみうち

$\Rightarrow$　今の命題を使う

<u>定理</u>(Cauchy の収束条件)

$\{a_n\}$ が収束する $\Leftrightarrow \forall \varepsilon$ に対して，$\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して，$n, m \geq N$ ならば，$|a_n - a_m| < \varepsilon$

$\because$

$(\Rightarrow)$ かんたん

$(\Leftarrow) \forall \varepsilon$ を一つ固定する．$\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して，$n, m \geq N$ ならば，$|a_n - a_m| < \varepsilon$

$\forall n \geq N$ に対して，

$a_N - \varepsilon < a_n < a_N + \varepsilon (m = N$ の場合)

$k > N$ ならば,

$\overline{a_k} = \sup\{a_n | n \geq k \geq N\} \leq a_N + \varepsilon$

$\underline{a_k} = \inf\{a_n | n \geq k \geq N\} \geq a_N - \varepsilon$

$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a_k} \leq a_n + \varepsilon$

$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a_k} \geq a_n - \varepsilon$

$|\varlimsup_{n\to\infty} a_n - \varliminf_{n\to\infty} a_n| < 2\varepsilon$

$\varepsilon > 0$ は任意だったので，$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n$

よって，$\{a_n\}$ は収束する．

◎ $\varlimsup_{n\to\infty} a_n$，$\varliminf_{n\to\infty} a_n$ は常に存在する $(\infty, -\infty$ かもしれない)．$\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在するとは限らない．

定義

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \cdots$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$が収束する. $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\{S_n\}$ が収束する.

このとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

と定義する.

例

$r \in \mathbf{R}, |r| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots$$

$S_n = 1 + r + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r} \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

補題

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$が収束する. $\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

対偶をとると, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$は収束しない.

$\because$

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n (S_n = a_0 + \cdots + a_n)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_n + 1 - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = 0.$ $\square$

定義

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$が絶対収束する. $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束する.($\Leftrightarrow \{S'_n\}$ が収束する ($S'_n = |a_0| + \cdots + |a_n|$).)

定理

絶対収束 $\Rightarrow$ 収束

$\because$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$が収束する $\Leftrightarrow S_n$が収束する $\Leftrightarrow \forall\varepsilon$に対して, $\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して, $\forall m > \forall n \geq N$ に対して,

$|a_{n+1}| + \cdots + |a_m| = |S_m - S_n| < \varepsilon$

$|a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|$ より, (三角不等式)

絶対収束 $\Rightarrow$ 収束 $\square$

注意

「収束 $\Rightarrow$ 絶対収束」は成り立たない.

補題

$\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して,

$0 \leq |a_n| \leq b_n (\forall n \geq N)$

と仮定する．このとき,

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$が収束 $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$は絶対収束する.

$\because$

$c_n = |a_N| + |a_{N+1}| + \cdots + |a_{N+n}|$

とおく．$\{c_n\}$ が収束すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$は絶対収束.

$$c_n \leq \sum_{k=N}^{n+N} b_k \leq \sum_{k=N}^{\infty} b_k < \infty$$

一方, $c_{n+1} - c_n = |a_{N+n+1}| \geq 0$ なので, c_nは単調増加.

単調増加で上に有界な数列は収束するので, c_nは収束する．$\square$

定理 1(Chauchy-Hadamard の判定法)

$r = \displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$とおく.

$r < 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$は絶対収束する.

$r < 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$は収束しない.

定理 2(d'Alembert の判定法)

$|a_n| > 0 (\forall n \in \mathbf{N})$

$r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ が存在すると仮定する.

このとき,

$r < 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$は絶対収束する.

$r < 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$は収束しない.

注意

(1) 定理 1, 2 において, $r = 1$ のときは収束を判定できない (収束しない場合もする場合もある).

(2)

定理 1 $\Rightarrow$ 常に使える．r の計算が煩雑.

定理 2 $\Rightarrow$ 使える場合が限られる．r の計算はかんたん.

定理 1 の証明

$\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = r$

$\Leftrightarrow$

$(a) \forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists N \in \mathbf{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば, $\sqrt[n]{|a_n|} < r + \varepsilon$

かつ

$(b) \forall \varepsilon > 0$ に対して, $r - \varepsilon < \sqrt[n]{|a_n|}$となる n が無限個存在する.

$r < 1$のとき

$r+\varepsilon<1$ となる$\varepsilon>0$ を 1 つ固定する．

(a) より，$\exists N\in\mathbf{N}$ が存在して，$n\geq N$ ならば，

$\sqrt[n]{|a_n|}<r+\varepsilon<1$ 両辺を n 乗して，

$|a_n|<(r+\varepsilon)^n$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\leq\sum_{n=0}^{\infty}(r+\varepsilon)^n$

$\sum_{n=0}^{\infty}(r+\varepsilon)^n$ は $|r+\varepsilon|<1$ より収束する．

先の補題から，$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ は収束する．□

$\underline{r>1}$のとき

$r-\varepsilon>1$ となる$\varepsilon>0$ を 1 つ固定する．

(b) より，$r-\varepsilon<\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}$

$n_1<n_2<\cdots\quad\lim_{k\to\infty}n_k=\infty$

となる自然数列 n_kが取れる．

両辺を n_k乗すると，

$(r-\varepsilon)^{n_k}<|a_{n_k}|$

$(r-\varepsilon)\to\infty(k\to\infty)$

よって，$\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$

補題から，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$は収束しない．□

定義

$R=\sup\left\{|x|\,\middle|\,\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\text{が収束する}\right\}$

R を $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$の収束半径という．

系(定理 1，2 の系)

(1)$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$とおくと，

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$の収束半径 $=\frac{1}{r}$

(2) $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ が存在すると仮定．これを r とおくと，

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$の収束半径 $=\frac{1}{r}$

$$\begin{cases} r=\infty\text{ のとき収束半径}=0 \\ r=0\text{ のとき収束半径}=\infty \end{cases}$$

$\because$ ((1) のみを示す)

定理 1 を $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$に適用する．$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|})|x|=r|x|$

$r|x|<1(\Leftrightarrow|x|<\frac{1}{r})\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$は収束する．

$r|x| > 1 (\Leftrightarrow |x| > \frac{1}{r}) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束しない.

よって，$a_n x^n$ の収束半径 $= \frac{1}{r}$. □

例

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$

$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} \right| = 2(\frac{n}{n+1})^2 \to 2 (n \to \infty)$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ の収束半径は, $\dfrac{1}{2}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^3}$

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = m^3) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1 & (n = m^3) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sup\{ \sqrt[n]{|a_n|} | n \geq k\} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^3}$ の収束半径は 1 .

この系を使えば，テイラー級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ の収束半径が計算できる.

まとめ

$f : [-a, a] \to \mathbf{R}$ C^{∞} 級

(1) f は常にテイラー展開できるとは限らない.

(2) f のテイラー級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ の収束半径は,

$$R = \frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt{\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|}}$$

$|x| < R$ ならば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ は絶対収束する.

(3) $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n (|x| < r)$

ならば,

$$\int_0^{x'} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} (|x| < r)$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} (|x| < r)$$

両辺とも絶対収束する ((3) は来学期).

例

$y = \arctan x$

$x = \tan y$
$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$
$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots |x| < 1$
x に $-x^2$を代入．
$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^2 n + \cdots$
$\arctan x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{a+t^2} dt = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots (|x| < 1)$
$\arctan x$ の $x = 0$ での Taylor 展開．

5　2 変数関数の微分

$\mathbf{R}^2 = \{x, y | x, y \in \mathbf{R}\}$

$P = (a, b), Q = (c, d)$

点 P と点 Q の距離 $d(P, Q) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b^2)}$

$P_n = (a_n, b_n)$

$P_n \to P(n \to \infty) \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} d(P_n, P) \to 0(n \to \infty)$

or

$\lim\limits_{n \to \infty} P_n = P \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} a_n \to a \ b_n \to b(n \to \infty)$

$U \in \mathbf{R}^2$部分集合

$f : U \to \mathbf{R}$

ex)

$U = (x, y) | x^2 + y^2 \leq 1$

$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

定義

$\lim\limits_{(x,y) \to P} f(x, y) = A \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} {}_{n \to \infty} P_n = P$ となるような，任意の点列 $\{P_n\}$ に対して，
$\lim\limits_{n \to \infty} f(P_n) = A$(ただし，$P_n \in U$)
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon$に対して，$\exists \delta$が存在して，

$d(P, (x, y)) < \delta$ならば，$|f(x, y) - A| < \varepsilon$

(P への近づき方に寄らず一定の値に近づく)

注意

・1 変数の場合

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$
a への近づき方は 2 通り．

・2 変数の場合

P への近づき方は無数にある．

定義

$P \in U f$ が P で連続

$\overset{\mathbf{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{(x,y)\to P} f(x,y) = f(P)$
$\forall P \in U$ で f が連続ならば，f は連続という．
<u>例</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ となる数列 x_nを考える．$(x_n \neq 0)$
$ex)x_n = \frac{1}{n}$
$P_n = (x_n, x_n) \to (0,0)(n \to \infty)$
$f(P_n) = \frac{{x_n}^2}{2{x_n}^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq f(0,0)(n \to \infty)$
よって，f は原点で不連続.

<u>定義</u>
$D \subset \mathbf{R}$ 部分集合
Dが領域　$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$
(1)$\forall P \in D$ に対し，$\exists\delta > 0$ が存在して，$B_\delta(P) \supset D$
かつ
(2)$\forall P \forall Q \in D$ に対し，P, Q を結ぶ直線が，D 内に存在する．
(1) ≒ 境界上の点は含まない．

<u>定義</u>
$D \subset \mathbf{R}$ 領域 $f : D \to \mathbf{R}(a,b) \in D$
f の (a,b) での x に関する偏微分係数として，
$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(f_x(a,b)$ ともかく．$) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}$
$= (y = b$ を代入して，$f(x,b)$ を x の 1 変数関数とみなしたときの $x = a$ での微分係数$)$
f が (a,b) で x に関して偏微分可能 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ が存在する．
$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b), f_y(a,b)$ も同様に定義する．
<u>例</u>
$f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + y^3$
$f_x(1,2)$ を計算する．
$F(x) = f(x,2) = x^2 + 8x + 8$　とおく．
$F'(x) = 2x + 8$
$f_x(1,2) = F'(1) = 10$

$\forall(a,b) \in D$ において，f が x に関して偏微分可能であるとき
$f_x : D \to \mathbf{R}$　f の x に関する偏導関数
$(\frac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathbf{R})$
f が C^1級 $\Leftrightarrow f_x, f_y$がともに連続
<u>注意</u>
・1 変数関数の場合　微分可能 $\Rightarrow$ 連続

・2 変数関数の場合　偏微分可能 $\Rightarrow$ 連続は成り立たない

<u>例</u>

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

f は $(0,0)$ で連続ではない．

$F(x)=f(x,0)=0F'(x)=0$ より，

$f_x(0,0)=F'(0)=0$

$f_y(0,0)=0$

f_xが x に関して偏微分可能なとき，その偏導関数を，

$\frac{\partial f_x}{\partial x}=f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

f_yが y に関して偏微分可能なとき，その偏導関数を，

$\frac{\partial f_x}{\partial y}=f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

と書く．

$f:D\to\mathbf{R}(D\subset\mathbf{R}^2$領域$)$

$f(x,y)f$ が偏微分可能 $\Leftrightarrow$ f が x,y 両方に関して偏微分可能

もし，f が偏微分可能ならば，

$f_x:D\to\mathbf{R}(a,b)\mapsto f_x(a,b)$

$(\frac{\partial f}{\partial x}:D\to\mathbf{R})$

$f_y:D\to\mathbf{R}(a,b)\mapsto f_y(a,b)$

これらを f の偏導関数という．

もし，f_x,f_yが偏微分可能ならば，それらの偏導関数を f の第 2 次導関数という．

$\frac{\partial f_y}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}$

$\frac{\partial f_x}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}$

$\frac{\partial f_x}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{xy}$

$(x$ で微分してから y で微分$)$

$\frac{\partial f_y}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{yx}$

$(y$ で微分してから x で微分$)$

<u>例</u>

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

$f_x(0,y)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h,y)-f(0,y)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{hy\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}}{h}$

$=-y$

$f_{xy}(0,0)=-1$

$f_y=(x,0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x,h)-f(x,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{hx\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}}{h}$

$=x$

$f_{yx}(0,0)=1$

$f_{xy}(0,0) \neq_{yx} (0,0)$

定義

f が C^2級　$\Leftrightarrow f$ は 2 階偏微分可能　(f, f_x, f_yが偏微分可能で，ｆの 2 次以下の導関数は全て連続)

命題

f が C^2級　$\Leftrightarrow f_{xy} = f_{yx}$

6　全微分

偏微分可能 $\Rightarrow$ 連続 は成り立たない

全微分可能 $\Rightarrow$ 連続 は成り立つ

1 変数の場合

$y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能

$\Leftrightarrow a$ の周りで $f(x) = f(a) + A(x-a) + B(x)(x-a)$ と書ける．

ただし，A は定数，B は a の周りで定義された関数で $x = a$ で連続 $B(a) = 0$

$\because$

$$B(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & (x \neq a) \\ 0 & (x = a) \end{cases}$$

f は $x = a$ で微分可能で，$B(x)$ は $x = a$ で連続

$B(x)(x-a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$

より，

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + B(x)(x-a)$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{A(x-a)+B(x)(x-a)}{x-a} = A + B(x) \to A(x \to a)$

$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$ なので，$f(x)$ は $x = a$ で微分可能．

2 変数の場合

定義

$f = f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

(a,b) の周りで，$f(x,y) = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b) + C(x,y)d((x,y),(a,b))$

と書ける．

ただし，A, B は定数．

$C(x,y)$ は (a,b) の周りで定義された関数で (a,b) で連続

$C(a,b) = 0$

$d((x,y),(a,b)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

(a,b) の周りで $= \exists\delta$が存在して，$\forall(x,y) \in B_\delta(a,b) = \{Q \in \mathbf{R}^2 | d(Q(a,b)) < \delta\}$ に対して

命題

(1)f が (a,b) で全微分可能　$\Rightarrow f$ は (a,b) で偏微分可能で $A = f_x(a,b), B = f_y(a,b)$

(2)f が (a,b) で全微分可能　$\Rightarrow f$ は (a,b) で連続

$\because$

(1)$y = b$ とする．

$f(x,b) = f(a,b) + A(x-a) + C(x,b)|x-a|$

$\lim_{x \to a+0} \dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \lim_{x \to a+0} \dfrac{A(x-a)+C(x,b)(x-a)}{x-a} = \lim_{x \to a+0}(A+C(x,b)) = A$
同様に,
$\lim_{x \to a-0} \dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = A$
$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = A$
つまり，f は (a,b) で x に関して偏微分可能で $A = f_x(a,b)$

(2)$|f(x,y)-f(a,b)| = |A(x-a)+B(y-b)+C(x,y)d((x,y),(a,b))| \to 0 (x \to a\ y \to b)$

よって，f は (a,b) で連続.

<u>定理</u>

$f : D \to \mathbf{R}(D \subset \mathbf{R}^2$領域$)$

f が C^1級 $\Rightarrow \forall (a,b) \in D$ に対し，f は (a,b) で全微分可能.

$\because$

f が (a,b) で全微分可能

$\Leftrightarrow f(a+s,b+t) = f(a,b) + As + Bt + C(s,t)\sqrt{s^2+t^2}$

$f(a+s,b+t) - f(a,b+t) + f(a,b+t) - f(a,b)$

平均値の定理より，
$\frac{f(a+s,b+t)-f(a,b+t)}{s} = f_x(a+\theta s, b+t)(0 < \exists\theta < 1)$
$\frac{f(a,b+t)-f(a,b)}{t} = f_y(a, b++\theta' t)(0 < \exists\theta' < 1)$

$f_x(a+\theta s, b+t) - f_x(a,b) = u(s,t)$

$f_y = (a, b+\theta' t) - f_y(a,b) = v(t)$ とおく.

$$C(s,t) = \begin{cases} \frac{su(s,t)+tv(t)}{\sqrt{s^2+t^2}} & ((s,t) \neq (0,0)) \\ 0 & ((s,t) = (0,0)) \end{cases}$$

$f(a+s,b+t) - f(a,b) = sf_x(a+\theta s, b+t) + tf_y(a+b+\theta' t) = f_x(a,b)s + f_y(a,b)t + su(s,t) + tv(t)$

f_x, f_yが連続なので，$C(s,t)$ も連続．よって，$f(x)$ は (a,b) で全微分可能.

<u>定義</u>

f が C^n級 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ f は n 階偏微分可能で f の第 n 次偏導関数は全て連続.

f の第 $n-1$ 次偏導関数は C^1級 $\Rightarrow$ 連続

f が C^n級 $\Leftrightarrow f$ は n 階偏微分可能で n 次以下の偏導関数はすべて連続

「f が C^2級 $\Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$」より，

「f が C^n級ならば，n 次以下の偏導関数について，x, y で偏微分する順序に依らない」

<u>例</u>

f が C^3級ならば，$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$

7　合成関数の偏微分

<u>1 変数の場合</u>

$f(x)$ x の 1 変数 C^1級関数

$x = \varphi(t)$ t の 1 変数関数

$\Rightarrow f(\varphi(t))t$ の 1 変数 C^1級関数
$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$

命題$f(x,y)xy$ の 2 変数 C^1級関数

$x=\varphi(t)y=\psi(t)$

$\Rightarrow f(\varphi(t),\psi(t))$ は t の 1 変数 C^1級関数で，

$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

$\because$

$\displaystyle\lim_{t\to c}\frac{f(\varphi(t),\psi(t))-f(\varphi(c),\psi(c))}{t-c}$ を計算する．

前回やった命題より，

$$\begin{cases}\varphi(t)-\varphi(c)=\varphi'(c)(t-c)+A(t)(t-c)\\ \psi(t)-\psi(c)=\psi'(c)(t-c)+B(t)(t-c)\end{cases}$$

$A(t)$ は $t=c$ で連続　$A(c)=0$

$B(t)$ は $t=c$ で連続　$B(c)=0$

f は全微分可能なので，

$f(\varphi(t),\psi(t))-f(\varphi(c),\psi(c))$

$=f_x(\varphi(c),\psi(c))(\varphi(t)-\varphi(c)+f_y(\varphi(c),\psi(c))(\psi(t)-\psi(c))+C(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi(t)-\varphi(c))^2+(\psi(t)-\psi(c))^2}$

$C(\varphi(t),\psi(t))$ は $t=c$ で連続で $C(\varphi(c),\psi(c))=0$

$f(\varphi(t),\psi(t))-f(\varphi(c),\psi(c))=(t-c)\{f_x(\varphi(c),\psi(c))+f_y(\varphi(c),\psi(c))\psi'(c)\}$

$+(t-c)\{f_x(\varphi(c),\psi(c))A(t)+f_y(\varphi(c),\psi(c))B(t)+C(\varphi(t),\psi(t))\frac{\sqrt{(\varphi(t)-\varphi(c))^2+(\psi(t)-\psi(c))^2}}{t-c}\}$

$\xrightarrow{t\to c}$

$f_x(\varphi(c),\psi(c))\varphi'(c)+f_y(\varphi(c),\psi(c))\psi'(c)$

$=\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(c),\psi(c))\frac{dx}{dt}(c)+\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(c),\psi(c))\frac{dy}{dt}(c)$

定理

$f(x,y)$ x,y の 2 変数 C^1級関数

$x=\varphi(u,v)$ $y=\psi(u,v)u,v$ の 2 変数 C^1級関数

$\Rightarrow f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ は u,v の 2 変数 C^1級関数

$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$

$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$

$(\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial v})=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$ を Jacobi 行列と呼ぶ．

例

$f(x,y)=\sin x\cos y$

$x=u+v$ $y=uv$

$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$

$=\cos x\cos y\cdot 1+(-\sin x\sin y)v$

$=\cos(u+v)\cos(uv)-v\sin(u+v)\sin(uv)$

定理(平均値の定理)

$f(x,y):(a,b)$ の周りで定義された C^1級関数 $(0,0)$ の周りの点 (s,t) に対して，$0\le\exists\theta\le 1$ が存在して，

$f(a+s,b+t)=f(a,b)+sf_x(a+\theta s,b+\theta t)+tf_y(a+\theta s,b+\theta t)$

と書ける．

$\because$

$g:[0,1]\to\mathbf{R}g(u)=f(a+us,b+ut)$ と定義する．

$\frac{dg}{du}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{du}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{du}=f_x(a+us,b+ut)s+f_y(a+us,b+ut)t$

1 変数関数 g に平均値の定理を適用すると，

$g(1)-g(0)=g'(\theta)=f_x(a+\theta s,b+\theta t)s+f_y(a+\theta s,b+\theta u)t$ となる $0<\theta<1$ が存在する．

$g(1)-g(0)=f(a+s,b+t)-f(a,b)$ □

定理(Taylor の定理)

$f(x,y)$: 点 (a,b) の周りで定義された C^n 級関数 $(n\geq 2)$

$(0,0)$ の周りの点 (s,t) に対して，

$0<\exists\theta<1$ が存在して，

$f(a+s,b+t)=f(a,b)$

$+(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y})f(a,b)$

$+\frac{1}{2}(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y})^2f(a,b)+\dots$

$+\frac{1}{(n-1)!}(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y})^{n-1}f(a,b)$

$+\frac{1}{n!}(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y})^nf(a+\theta s,b+\theta t)$

と書ける．

$(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y})f(a,b)=sf_x(a,b)+tf_y(a,b)$

$(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y})^2f(a,b)=s^2f_{xx}(a,b)+2stf_{xy}(a,b)+t^2f_{yy}(a,b)\cdots$

8　2 変数関数の極大・極小

$f:D\to\mathbf{R}(D\subset\mathbf{R}^2$領域$)(a,b)\in D$

定義

f が (a,b) で極大 (resp. 極小)

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\delta>0$ が存在して，$0<d((x,y),(a,b))<\delta$となる $\forall(x,y)\in D$ に対して，$f(x,y)<$(resp.$>$)$f(a,b)$

定理(2 変数の Taylor の定理)

$f:D\to\mathbf{R}$ C^n級 $(D\subset\mathbf{R}^2$領域$)$

$(a,b),(a+s,b+t)\in D$

(a,b) と $(a+s,b+t)$ を結ぶ線分も D に含まれるとする．

このとき，

$f(a+s,b+t)=f(a,b)+sf_x(a,b)+tf_y(a,b)+\cdots$

$+\frac{1}{(n-1)!}(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y})^{n-1}f(a,b)+\frac{1}{n!}(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y})^nf(a+\theta s,b+\theta t)$

特に $n=2$ のとき

$f(a+s,b+t)-f(a,b)=$

$sf_x(a,b)+tf_y(a,b)+\frac{1}{2}\{s^2f_{xx}(a+\theta s,b+\theta t)+2stf_{xy}(a+\theta s,b+\theta t)+t^2f_{yy}(a+\theta s,b+\theta t)\}$

定義

$f:D\to\mathbf{R}f$ が (a,b) で (広義の) 極大 $\Leftrightarrow$

$\exists\delta>0$ が存在して，$(a,b)\neq\forall(x,y)\in B_\delta(a,b)=\{(x,y)|d((x,y),(ab))<\delta\}$ に対して，

$f(x,y) < f(a,b)$

極値＝極大値もしくは極小値

極大点＝極大値をとる点

<u>命題</u>

f は C^1級とする．f が (a,b) で広義の極大または極小．

$\Leftrightarrow f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$

$\because$

f が (a,b) で広義の極大とする．$\Rightarrow x$ の 1 変数関数 $f(x,b)$ は $x=a$ で広義の極大．$\Rightarrow f_x(a,b)=0$ $\square$

<u>1 変数の場合</u>

$f:(\alpha,\beta)\to\mathbf{R}C^2$級$\alpha < c < \beta f'(c)=0$

$f''(c) > 0 \Rightarrow f$ は $x=c$ で極小

$f''(c) < 0 \Rightarrow f$ は $x=c$ で極大

$f: D\to\mathbf{R}$ C^2級

$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$

を Hesse 行列という．(２次対称行列)

<u>定理</u>

$\{a,b\} = f_y(a,b) = 0$ とする．

(1)$f_{xx}(a,b) > 0$ かつ $\det(H(x,y)) > 0 \Rightarrow f$ は (a,b) で極小．

(2)$f_{xx}(a,b) < 0$ かつ $\det(H(x,y)) > 0 \Rightarrow f$ は (a,b) で極大．

(3) $\det(H(x,y)) < 0 \Rightarrow f$ は (a,b) で極大でも極小でもない．

<u>注意</u>

$\det H(a,b) = 0$ の場合は，上の定理から極大・極小を判定できない．

<u>補題</u>

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

2 次対称行列 $(a_{12} = a_{21})$

$g(x,y) = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(i)$a_{11} > 0$ かつ $\det A > 0$

$\Rightarrow g(x,y)$ は正定値，つまり $g(x,y) > 0(\forall(x,y)\neq(0,0)\in\mathbf{R}^2)$

$\Leftrightarrow A$ の固有値は全て正

(ii)$a_{11} < 0$ かつ $\det(A) > 0$

$\Rightarrow g(x,y)$ は負定値，つまり $g(x,y) < 0(\forall(x,y)\neq(0,0)\in\mathbf{R}^2)$

$\Leftrightarrow A$ の固有値は全て負

(iii)$\det A < 0$

$\Rightarrow g(x,y)$ は不定値，つまり $g(x,y)$ は正にも負にもなる．

$\Leftrightarrow A$ は正と負の固有値を 1 つずつもつ．

<u>定理の証明</u>

$f_{xx}(a,b) > 0$ かつ $\det H(a,b) > 0$ とする．

f は C^1級なので $f_{xx}, \det H$ は連続.
$\Rightarrow \exists\delta$が存在して，$B_\delta(a,b) \subset D$ かつ $\forall(x,y) \in B_\delta(a,b)$ に対して，$f_{xx}(x,y) > 0, \det H(x,y) > 0$
$\forall(a+s, b+t) \in B_\delta(a,b)$ に対し，Taylor の定理を使うと，
$f(a+s,b+t) - f(a,b) = sf_x(a,b) + tf_y(a,b) + \frac{1}{2}\{s^2 f_{xx}(a+\theta s, b+\theta t) + 2st f_{xy}(a+\theta s, b+\theta t)$
$+t^2 f_{yy}(a+\theta s, b+\theta t)\}(0 < \theta < 1)$
$(a+\theta s, b+\theta t) \in B_\delta(a,b)$ より，$f_{xx}(a+\theta s, b+\theta t) > 0 \det H(a+\theta s, b+\theta t) > 0$
$s^2 f_{xx}(a+\theta s, b+\theta t) + 2st f_{xy}(a+\theta s, b+\theta t) + t^2 f_{yy}(a+\theta s, b+\theta t)\}$
$= (s,t)H(a+\theta s, b+\theta t)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = g(s,t)$
補題 (i) より $g(s,t)$ は正定値
$(s,t) \neq (0,0) \Rightarrow g(s,t) > 0$
$f(a+s,b+t) - f(a,b) = \frac{1}{2}g(s,t) > 0$
つまり，f は (a,b) で極小.
(3) $\det H(a,b) < 0$ とする.
補題 (iii) より，$H(a,b)$ は正の固有値μと負の固有値νをもつ.
(u_1, u_2) をμに対する固有ベクトル，(v_1, v_2) をνに対する固有ベクトルとする.
$F(t) = f(a+u_1 t, b+u_2 t)$
$G(t) = f(a+v_1 t, b+v_2 t)$
は $t=0$ の周りで定義される 1 変数 C^2級関数.
f が (a,b) で極大 (極小) ならば，$F\ (t), G(t)$ は $t=0$ で極大，もしくは極小となる.
$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = u_1 f_x(a+u_1 t, b+u_2 t) + u_2 f_y(a+u_1 t, b+u_2 t)$
$F''(t) = u_1^2 f_{xx}(a+u_1 t, b+u_2 t) + 2u_1 u_2 f_{xy}(a+u_1 t, b+u_2 t) + u_2^2 f_{yy}(a+u_1 t, b+u_2 t)$
$F'(0) = u_1 f_x(a,b) + u_2 f_y(a,b) = 0$
$F''(0) = u_1^2 f_{xx}(a,b) + 2u_1 u_2 f_{xy}(a,b) + u_2^2 f_{xy}(a,b) = (u_1, u_2)H(a,b)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow F$ は $t=0$ で極小．同様にして，G は $t=0$ で極大．矛盾．よって，f は (a,b) で極大・極小ではない.
例
$x^3 + y^3 + 6xy$
$f_x = 3x^2 + 6y$
$f_y = 3y^2 + 6x$
$f_x = f_y = 0$ ならば，$x^2 = -2y$
$\Rightarrow x^4 + 8x = 0$
$x(x+2)(x^2 - 2x + 4)$
$x = 0$ or $x = -2$
$x = 0$ のとき $y = 0$
$x = -2$ のとき $y = -2$
$f_{xx} = 6x, f_{xy} = f_{yz} = f_{yy} = 6y$
$\det H = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 36xy - 36$
$\det(-2,-2) = 108 > 0$
$\det(0,0) = -12 < 0$

$f(-2,-2)$ で極大 $f(-2,-2)=8$ が極大値.
$\det H(0,0)=-36<0$
よって，f は $(0,0)$ で極大でも極小でもない.

$D\subset \mathbf{R}^2$ 部分集合
D が閉集合 $\Leftrightarrow \mathbf{R}^2 D$ が閉集合 $\fallingdotseq$ 境界 (ふち) を含む部分集合
D が有界 $\Leftrightarrow \exists R>0$ が存在し，$D\subset B_R(0,0)$
例
$(1)D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$
有界閉集合
$(2)D=\{(x,y)|x\leq 0,y\leq 0\}$
閉集合　有界ではない.

定理(最大値・最小値の定理)
$D\subset \mathbf{R}^2$有界閉集合
$f:D\to\mathbf{R}$　連続
$\Rightarrow f$ は D 上最大値・最小値をもつ.
注意 1 変数のとき，$D=[a,b]$
◎どうやって最大値・最小値をもとめるか.
$f:D\to \mathbf{R} C^1$級とする.
$D=D^\circ$(D の内部)$\bigcup \partial D$(D の境界) と分ける.
D°は開集合
∂D は有界閉集合
$\partial D=\{(x,y)|g(x,y)=0\}$($g$ は C^1級) と書けていると仮定.
f が $(a,b)\in D$ で最大ならば，次のいずれかが成り立つ.
(i)$(a,b)\in D^\circ$で，(a,b) で広義の極大. (この場合は，$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$)
(ii)$(a,b)\in\partial D$ で f は (a,b) で条件 $g(x,y)=0$ の下，広義の極大. ($Lagrange$ の未定乗数法)
上の議論から，最大値をとる点の候補を計算する．その中で f の値が最大なものを選ぶ.

9　陰関数

例
$f(x,y)=x^2+y^2-1$
$y\geq 0$ として，$f(x,y)=0$ を y について解くと，$y=\sqrt{(1-x^2)}$
$y<0$ なら，$y=-\sqrt{(1-x^2)}$
局所的には，y について解ける.
定理(陰関数定理)
$f:D\to\mathbf{R}$ C^1級，$(a,b)\in D\subset\mathbf{R}^2$
$f(a,b)$ かつ $f_y(a,b)\neq 0$ と仮定する.
$\Rightarrow x=a$ の周りで定義された 1 変数関数 $y=\varphi(x)$ が存在して，次が成り立つ.

(1)$\varphi(a)=b$

(2)$f(x,\varphi(x))=0$

(3)φ は C^1級で$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$

注意

このような $y=\varphi(x)$ を $f(x,y)=0$ の陰関数という.

$\because$

$f_y(a,b)>0$ とする. (<0 のときも同様.)

f_yは連続関数なので, $\exists\delta>0$ が存在して,

$|x-a|<\delta$かつ $|y-b|<\delta$ならば, $y(x,y)>0$

$\Rightarrow y$ の 1 変数関数 $f(a,y)$ は, $(b-\delta,b+\delta)$ 上単調増加.

$f(a,b)=0$ より,

$b-\delta<y_1<b<y_2<b+\delta$

となる $\forall y_1,y_2$に対し, $f(a,y_1)<0,f(a,y_2)>0$

f は連続関数なので, $\exists\delta'=\delta'(y_1,y_2)<\delta(\delta'$は y_1,y_2のとり方に依存する$)$

が存在して, $|x-a|<\delta'$ならば,

$f(x,y_1)<0,f(x,y_2)>0$

$\delta x_0\in(a-\delta',a+\delta')$ を 1 つ固定する.

$\delta'<\delta$から,

$f(x_0,y)$ は $(b-\delta',b+\delta')$ 上単調増加. $f(x_0,y_1)<0,f(x_0,y_2)>0$ なので, 中間値の定理から,

$f(x_0,y_0)=0$ となる $y_1<y_0<y_2$が唯 1 つ存在する.

$\varphi(a-\delta',a+\delta')\to\mathbf{R}$

をφ と定義すると,

$\varphi(a)=b(\because f(a,b)=0)$

$f(x_0,\varphi(x_0))=f(x_0,y_0)=0$

(1) と (2) はOK.

(3) を示す. まず,「φ が $x=a$ で連続」を示す. ($x\neq a$ でも同様.)

$|\varphi(x_0)-\varphi(a)|=|y_0-b|<y_2-y_1(\because y_0<y_2,y_1<b)$

$b-\delta<y_1<b<y_2<b+\delta$となる $\forall y_1,y_2$に対し, $\exists\delta'>0$ が存在して, $|x_0-a|<\delta'$ならば,

$|\varphi(x_0)-\varphi(a)|<y_2-y_1$

つまり,

$\lim_{x_0\to a}|\varphi(x_0)-\varphi(a)|=0$

よって,φ は $x=a$ で連続.

$|s|<\delta'$となる $\forall s$ を 1 つ固定する.

$t:\varphi(a+s)-\varphi(a)$ と定義.

2 変数の平均値の定理から, $0<\exists\theta<1$ が存在して,

$f(a+s,b+t)=f(a,b)+sf_x(a+\theta s,b+\theta t)+tf_y(a+\theta s,b+\theta t)$

$\frac{\varphi(a+s)-\varphi(a)}{s}=\frac{t}{s}$

φ は連続なので, $s\to0$ のとき, $t\to0$

$\frac{t}{s}=-\frac{f_x(a+\theta s,b+\theta t)}{f_y(a+\theta s,b+\theta t)}\xrightarrow{s\to0}-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$

よって, φ は $x=a$ で微分可能で,

$\varphi'(a)=-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$

例

$f(x,y)=x^3+3xy+4xy^2+y^2+y-2$ の $(1,-1)$ における接線を計算する．$(f(1,-1)=0)$

$f_x=3x^2+3y+4y^3, f_y=3x+8xy+2y+1$

$f_y(1,-1)=-6\neq 0$ から，陰関数定理より，$x=1$ の周りで，$f(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在する．

f の $(1,-1)$ での接線の傾き : $\varphi'(1)$

$\varphi'(1)=-\frac{f_x(1,-1)}{f_y(1,-1)}=-\frac{4}{-6}=\frac{2}{3}$

よって，求める接線は,

$y+1=\frac{2}{3}(x-1)$ □