2011 年度数学 I 冬学期総合問題解答例

1.

(1)

$$e^{-x^2}e^{-y^2}=e^{-(x^2+y^2)}=1+\{-(x^2+y^2)\}+\frac{\{-(x^2+y^2)\}^2}{2!}+\frac{\{-(x^2+y^2)\}^3}{3!}\cdots$$

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$, $-\infty<x<\infty$ のxに$-(x^2+y^2)$を代入した形です。これで OK

(2)

$$(\cos y)^x=e^{x\log(cosy)}=e^{x\log\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}\cdots\right)}=e^{x\left\{\left(\frac{-y^2}{2}+\frac{y^4}{24}-\cdots\right)-\frac{1}{2}\left\{\frac{-y^2}{2}+\frac{y^4}{24}-\cdots\right\}^2+\cdots\right\}}$$

$$=1+x\left\{\left(\frac{-y^2}{2}+\frac{y^4}{24}-\cdots\right)-\frac{1}{2}\left\{\frac{-y^2}{2}+\frac{y^4}{24}-\cdots\right\}^2+\cdots\right\}+\cdots=1-\frac{xy^2}{2}-\frac{xy^4}{12}+\cdots$$

[comment]こちらも同様に

$\log(1+u)=\frac{u}{1}-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^6}{6}\ldots$ の $1+u=\cos x$ とすると

$\cos y=1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\frac{y^8}{8!}\ldots$ なので、上の式に$u=-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\frac{y^8}{8!}\ldots$ を代入したものは、

$$\log\cos y=\frac{\left(-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\frac{y^8}{8!}\cdots\right)}{1}-\frac{\left(-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\frac{y^8}{8!}\cdots\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\frac{y^8}{8!}\cdots\right)^3}{3}$$

$$-\frac{\left(-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\frac{y^8}{8!}\cdots\right)^4}{4}+\frac{\left(-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\frac{y^8}{8!}\cdots\right)^5}{5}\cdots$$

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$,　　$-\infty<x<\infty$ のxに$x\log\cos y$ の級数展開(上の式にxかけたもの)を代入すると解答になります。ちなみに、どこら辺の項で打ち切るかですが、今回は 5 次まで、とあるので、各べき乗の項を次数の低い項から順に展開した時、5 次の項をつくる項までは残しましょう。つまり、今回の$x\log\cos y$ の級数展開は$x\log\cos y=\frac{x\left(-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}\cdots\right)}{1}-\frac{x\left(-\frac{y^2}{2!}+\cdots\right)^2}{2}+\cdots$ として計算していい、ということです。

また、有名な関数の$x=0$付近での Taylor 展開の式を以下に並べておきます。暗記していくと便利かと思います。

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,\qquad -\infty<x<\infty$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}\ldots\quad -\infty<x<\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}\ldots\quad -\infty<x<\infty$$

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\ldots-1<x\le 1$$

$$\mathrm{Arctan}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}\ldots-1<x\le 1$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha)(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,|\mathrm{x}|<1,\alpha\in\mathbb{R}$$

(3)

$$\int_0^y \frac{dt}{1-x^2t^2} = \int_0^y \sum_{n=0}^{\infty} (xt)^{2n} dt\,(|xy|<1\text{ でこの等式は成立する}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}y^{2n+1}}{2n+1}$$

[comment]無限等比数列(等比級数)の和公式

$\dfrac{1}{1-r} = 1+r+r^2+r^3+\cdots$ (但し$|r|<1$)の$r = xt$とした結果です。細かいことは省略

2.

(1)

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\text{は偶関数なので}\right) 2\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{x\to a-0} 2\left(Arcsin\frac{x}{a} - Arcsin0\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi$$

[comment]$f(x)$が偶関数ということは、$f(x) = f(-x)$ということです。大丈夫だとは思いますが念のため。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\frac{x}{a} + C \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a} + \mathrm{C} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \log\left(\sqrt{x^2+A}+x\right) + C$$

$\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+A} + A\log\left(\sqrt{x^2+A}+x\right)\right\} + C$が、よく出る積分で、答えを覚えていると便利です。

(2)

$$\int_0^a \sqrt{x(a-x)}dx = \int_0^a \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}-x\right)^2}\,dx\text{ ここで}\frac{a}{2}-x = \frac{a}{2}sint\text{とすれば、} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a}{2}\right)\cos t \times \left(-\frac{a}{2}\cos t\right) dt$$

$$= \frac{a^2}{4}\left[\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}a^2$$

[comment]

$\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx$が円の面積を求める積分だということを覚えた人も多いと思います。忘れた人は$x^2+y^2=a^2$をy $= \pm f(x)$の形に書き直してください。今回は平方完成をすることで上記の公式を導出しました。

(1)の Arcsin・Arctan 等の積分でも同様のことを問われる可能性があるのでこの種の式変形には慣れてください。

(3)

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-y^2}dxdy}{1+x^2} = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} e^{-y^2}dy \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

ここで、積分の前半部分を$\boldsymbol{I}$後半部分を$\boldsymbol{J}$としてそれぞれの積分値を求める。

$\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} e^{-x^2}dx \int_{y=-\infty}^{y=\infty} e^{-y^2}dy = \boldsymbol{I}^2$なので、左辺を式変形することで$\boldsymbol{I}^2$を求めます。

$\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$を極座標に変数変換すると$\displaystyle\iint_{r=0,\theta=0}^{r=\infty,\theta=2\pi} e^{-r^2} \times \left|det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\right| drd\theta$

$$= \iint_{r=0,\theta=0}^{r=\infty,\theta=2\pi} e^{-r^2}rdrd\theta = 2\pi\int_{r=0}^{r=\infty} e^{-r^2}rdr = 2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\infty} = \pi\text{よって}\boldsymbol{I} = \sqrt{\pi}$$

$$\boldsymbol{J} = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty}\{Arctanx - Arctan(-x)\} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = \pi$$

以上より求める積分の値は$\boldsymbol{IJ} = \pi\sqrt{\pi}$

[comment]重積分と変数変換を利用する問題ですね。I の積分は確率統計でみる関数の積分になります。重積分

の計算については計算のポイントだけ。

1.基本的には各変数について、ばらばらにして積分できます。(いくつかの変数の間に関係式があるときは後に積分する変数を定数とみなして先に積分する変数が存在する区間を求め、その範囲で定積分する)

2.変数変換をかますときには、ヤコビアン $\boldsymbol{J}$(ヤコビ行列: Jacobian matrix)を考えないといけません。たとえば

$(x,y)\to(r,\theta)\{(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)\}$ なら $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$ で、$|det\boldsymbol{J}|=r$ より $dxdy=rdrd\theta$

$$(x,y,z)\to(r,\theta,z)\{(x,y,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\} は \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} で、|det\boldsymbol{J}|$$

$$=r より dxdydz=rdrd\theta dz$$

$$(x,y,z)\to(r,\theta,\varphi)\{(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)\} は \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix} で、|det\boldsymbol{J}|=r^2\sin\theta より dxdydz=r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

また、広義積分についてこの解答例では、極限を考える方法と普通に不定積分に代入した(様な計算)方法のどちらかで答えを導いていますが本当はきちんと極限とらなきゃだめです。解答では面倒なので省略しているだけです。(5)でしっかりした極限をとった広義積分の解答を示すのでそちらを参考にしてください。

(4)

$$\int_D (x^4+y^4)dxdy\ \left((x,y);x^2+y^2\le a^2\right)=\iint_{r=0,\theta=0}^{r=a,\theta=2\pi} r^4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)rdrd\theta$$

$$=\frac{a^6}{6}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)d\theta \ ここで、\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\cos^4\theta\,d\theta=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\sin^4\theta\,d\theta$$

$$=4\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta \ より、\frac{a^6}{6}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)d\theta=\frac{4a^6}{3}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta$$

ウォリスの公式により、$\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$ なので、求める値は $\frac{a^6}{4}$

[comment]もちろん変数変換をせず $\int_{y=-a}^{y=a}\int_{x=-\sqrt{a^2-y^2}}^{x=\sqrt{a^2-y^2}}(x^4+y^4)dxdy$

を計算しても同じ答えにたどり着きます。ウォリスの公式は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\,(n: 偶数)\\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1\,(n: 奇数)\end{cases}$$ です。導出は左辺を $\boldsymbol{I}_n$ とすれば

漸化式 $\boldsymbol{I}_n=\frac{n-1}{n}\boldsymbol{I}_{n-2}$ が得られるので、$\boldsymbol{I}_0=\frac{\pi}{2},\boldsymbol{I}_1=1$ と合わせて上のような解が得られます。

(5)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{dx}{\sin x}=\log\left(-\tan\frac{x}{2}\right)(-\pi<x<0)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{dx}{\sin x}==\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{dx}{\sin x}+\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{\sin x}+\cdots+\int_{k\pi}^{x}\frac{dx}{\sin x}(0<k\pi<x<(k+1)\pi,k\in\mathbb{Z})$$

$$=\lim_{n\to+0}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{-n}\frac{dx}{\sin x}+\int_{n}^{\pi-n}\frac{dx}{\sin x}+\cdots+\int_{k\pi+n}^{x}\frac{dx}{\sin x}\right)$$

$$=\lim_{n\to+0}\left(\log\tan\frac{n}{2}-\log\tan\frac{n}{2}+\log\tan\frac{n}{2}-\cdots-\log\tan\frac{n}{2}+\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right)=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

この議論は$\left((k-1)\pi<x<k\pi<0,k\in\mathbb{Z}\right)$でも成立するので、以上より

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{dx}{\sin x}=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|(x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}),x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$$ のときは広義積分は発散する。

[comment]だいぶわかりにくい議論になって申し訳ないです。ただ、広義積分の話は極限をとって計算する、ということを覚えておいてください。あと、この結果は公式っぽい感じで覚えておくと便利かもしれません。

3.

問題文より$f(x,y,z)$はC^1級関数なので全微分可能で$(x,y,z)=(a,b,c)$の近傍で、$df(x,y,z)=f_x(a,b,c)dx+f_y(a,b,c)dy+f_z(a,b,c)dz$が成立。つまり

$$f(x,y,z)-f(a,b,c)=f_x(a,b,c)(x-a)+f_y(a,b,c)(y-b)+f_z(a,b,c)(z-c)\Leftrightarrow f(x,y,z)$$

$=f_x(a,b,c)(x-a)+f_y(a,b,c)(y-b)+f_z(a,b,c)(z-c)$今回$f(x,y,z)$

$=0$ を考えているので$f(x,y,z)=0$ が(x,y,z)

$=(a,b,c)$の近傍で作る曲面は平面$f_x(a,b,c)(x-a)+f_y(a,b,c)(y-b)+f_z(a,b,c)(z-c)$

$=0$ で近似可能である。

[comment]雑でごめんなさい。ちょっと頭が働かなくなってきたのでこれで許して orz

本当は陰関数定理を使って示したりするのですけどこれでも多分問題ないはずです。多分。

4.

(1)

一様収束の定義：任意の$\varepsilon>0$ に対し、自然数Nが存在して$k\geq N$、$x\in\boldsymbol{D}$なるすべてのk,xに対し

関数列$f_k(x)$が、$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon$となること。

Proof:

$f_k(x)$の連続性よりある$\delta>0$が存在し、$|x-a|<\delta$となるすべてのx(但し$a,x\in\boldsymbol{D}$)に対して$|f_k(x)-f_k(a)|<\varepsilon$

また、$f_k(x)$は$f(x)$に一様収束するので任意の$\varepsilon>0$ に対し、自然数Nが存在して

$k\geq N$、$x\in\boldsymbol{D}$なるすべてのk,xに対し関数列$f_k(x)$が、$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon$となる

以上より、$|f(x)-f(a)|=\left|\left(f(x)-f_k(x)\right)+\left(f_k(x)-f_k(a)\right)+\left(f_k(a)\right)-f(a)\right|\leq|f_k(x)-f(x)|+|f_k(x)-f_k(a)|+|f_k(a)-f(a)|<3\varepsilon$よって ε‐δ 論法により$f(x)$は連続である。Q.E.D.

[comment]これは定義を覚えてください。ちなみに、手書きで書き加えた「一様収束」の条件がないと

$f_k(x)=x^k$(これは各kでどう見ても連続な関数)を考えた時、$f(x)=\begin{cases}0(|x|<1)\\1(x=1)\end{cases}$で、$x=1$の付近で不連続な関数

になってしまう例が作れてしまいます。

(2)

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-b)^{2k}}{2k(2k-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$ とおく。$\left(a_n=\frac{(x-b)^{2n}}{2n(2n-1)}\right)$ダランベールの判定法より $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=(x-b)^2<1$

が満たされれば級数は収束するので、$x-b$の収束半径は 1 である。

また、$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-b)^{2k-1}}{(2k-1)}, f''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(x-b)^{2k}=\frac{1}{1-(x-b)^2}$(但し$|x-b|<1$)なので、$\int_b^x f''(x)dx$

$$=\int_b^x\frac{dx}{1-(x-b)^2}\Leftrightarrow f'(x)-f'(b)=f'(x)=\mathrm{Arctanh}(x-b)=\frac{1}{2}\log\frac{1+(x-b)}{1-(x-b)}$$

$$\int_b^x f'(x)dx=\int_b^x\mathrm{Arctanh}(x-b)dx\Leftrightarrow f(x)-f(b)=f(x)=(x-b)\mathrm{Arctanh}(x-b)+\frac{1}{2}\log\{1-(x-b)^2\}$$

$f'(x)=\mathrm{Arctanh}(x-b)=\frac{1}{2}\log\frac{1+(x-b)}{1-(x-b)}=-i\mathrm{Arctan}i(x-b)$を利用してやれば$f(x)$は Arctan を用いて

$$f(x)=-i(x-b)\mathrm{Arctan}i(x-b)+\frac{1}{2}\log\{1-(x-b)^2\}$$ とかける。

[comment]級数の収束については色々ありますが、とりあえず簡単にまとめておきます。

1. 正項級数：全部の項が正の級数。ダランベールの判定法・コーシーの判定法で収束 or 発散を判定できれば Lucky

ダランベールの判定法: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$があるとき、$r<1$ なら収束。$1<r$なら発散。極限なくても$N\leq n$となるnで常に$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq r<1$ なら収束。

コーシーの判定法: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r$ があるとき $0\leq r<1$ なら収束。$1<r$なら発散。極限なくても$N\leq n$となるnで常に $0\leq\sqrt[n]{a_n}<1$ なら収束。

ただ、判定できないこともあるので、その場合は以下の、一般に正項級数$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$が収束する必要十分条件

$$\begin{cases} f(x)\text{は広義単調減少} \\ \lim_{x\to\infty}f(x)=0 \\ \int_1^{\infty}f(x)dx\text{が有限の値に収束すること}\end{cases}$$ を用いて収束性を判定してください。

2.交項級数:正項と負項が交互に現れる級数。次の 2 条件を満たしているものは収束する。

(1)$|a_n|\geq|a_{n+1}|$

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

また、収束半径は「級数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$が、$|x|<r$で収束し$r<|x|$で発散するときの正の実数$r$」のことです。

最後の$f(x)$は Arctan を用いて表現するっていうのは若干無茶苦茶な要求だと思うのですが…。一応出てきそうな類似の関係式を書いておきます。

$e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$\cosh ix=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cos x, \cos ix=\cosh x$

$\sinh ix=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}=i\sin x, \sin ix=i\sinh x$

$\tanh ix=\frac{\sinh ix}{\cosh ix}=i\tan x, \tan ix=i\tanh x$

$\mathrm{Arcsinh}ix=i\mathrm{Arcsin}x, \mathrm{Arcsin}ix=i\mathrm{Arcsinh}x=i\log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

$\mathrm{Arctanh}ix=i\mathrm{Arctan}x, \mathrm{Arctan}ix=i\mathrm{Arcctan}x=i\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$

[追記]

どうやら最後の問題は問題文のミスらしく、本当は

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}(x-b)^{2k}}{2k(2k-1)}$ らしいです。なので解答も正項級数の収束条件でなく交項級数の収束条件

(1)$|a_n| \geq |a_{n+1}|$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

の 2 条件より$(x-b)^2 < 1$　よって$x-b$の収束半径は 1

$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}(x-b)^{2k-1}}{(2k-1)}, f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k+1}(x-b)^{2k} = \frac{1}{1+(x-b)^2}$ (但し$|x-b| < 1$)なので、

$\int_b^x f''(x)dx = f'(x) - f(b), \int_b^x f''(x)dx = \int_b^x \frac{dx}{1+(x-b)^2} = [\mathrm{Arctan}(x-b)]_b^x = \mathrm{Arctan}(x-b)$

また、$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}(x-b)^{2k-1}}{(2k-1)}$ に$x=b$を代入しても値は明らかに$f'(b)=0$ なので

$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}(x-b)^{2k-1}}{(2k-1)} = \mathrm{Arctan}(x-b)$

同様に

$$\int_b^x f'(x)dx = f(x) - f(b) = f(x)\left(\because f(b) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}(b-b)^{2k}}{2k(2k-1)} = 0\right)$$

$$\int_b^x f'(x)dx = \int_b^x \mathrm{Arctan}(x-b)\,dx = \left[(x-b)\,\mathrm{Arctan}(x-b) - \frac{1}{2}\log\{1+(x-b)^2\}\right]_b^x$$

$$= (x-b)\,\mathrm{Arctan}(x-b) - \frac{1}{2}\log\{1+(x-b)^2\}$$

以上より

$$f(x) = (x-b)\,\mathrm{Arctan}(x-b) - \frac{1}{2}\log\{1+(x-b)^2\}$$

一応この解答例元の word(.docx ファイル)が手元にあるので、シケ対の方でこの中途半端なシケプリを増補改訂してくださる方いらっしゃいましたら somebody-knows@hotmail.co.jp までメールをください。元データをお送りします。あと、明らかな間違いだろ、って思った方、クラスや知り合いのシケ対やできる人に聞いたほうが早いと思いますが、一応上のアドレスに連絡くだされば、(時間がある場合ですが)お返事すると思います。(たぶん)もし時間があれば、2010 年の宮岡さんの過去問解答例も手直しして up するつもりなのですがいつになることやら…。(メールいただければ手書きのクッソ汚い間違い有の解答例はお渡しできます)