数学ＩＡ (上村) シケプリ：後期過去問編

製作：岡根

2007 年 1 月 19 日

問１:証明問題

2005 年度問 1

次の各命題は正しいか．正しい場合には証明し，偽である場合には反例を挙げよ．

(1)　f を $\mathbf{R}$ 上の C^1 級関数で $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ とするとき，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)dx = 0$ である．

(2)　f を $\mathbf{R^2}$ 上における（Jordan の意味で）零集合 D 上の有界な関数とするとき，$\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = 0$ である．

2004 年度問 1

２重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$（リーマン積分，$D$ は $\mathbf{R}^2$ における有界集合で f は D で定義された有界な関数とする）について次の問に答えよ．

(1)　２重積分の定義を述べよ．

(2)　２重積分が存在するための f と D の十分条件を (１つ) 述べよ (証明は不要).

2003 年度問 1(教科書演習問題 90)

$f(x)$ を区間 [0,1] において有界で積分可能な関数で $f(x) > 0$ であるとする．
更に，$\log f(x)$ も区間 [0,1] において有界で積分可能とする．このとき，

$$\log\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \geq \int_0^1 \log f(x)dx$$

となることを証明せよ．

ヒント：積分の定義と相加相乗平均

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

を利用せよ．相加相乗平均は証明せずに用いてよい．

2002 年度問 1

有界閉区間 [a,b] で定義された関数 $f(x)$ について，次の命題は正しいか誤りかを判定し，
正しいなら証明し誤りならば判例を挙げよ．

(1)　$f(x)$ が [a,b] で有界で積分可能であれば，$f(x)$ は連続である．

(2)　$f(x)$ が [a,b] で連続であれば，$f(x)$ のグラフ $A = \big\{(x, f(x)) \bigm| a \leq x \leq b\big\}$ はジョルダンの意味で零集合である．

2001 年度問 1

$a < b$ とし，f を区間 [a,b] 上の連続関数とするとき，次を証明せよ．
ただし，f の [a,b] での最大値と最小値が存在することは証明なしで用いてよい．

(1)　$\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\zeta)$ となる $\zeta(a \leq \zeta \leq b)$ が存在する．

(2)　$\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ は $a < x < b$ なる任意の x において微分可能である．

2000 年度問 1

$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right)dx = f(0)$ について，次の命題は正しいか誤りかを判定し，正しければ証明し誤りならば反例を挙げよ．

(1)　$f(x)$ が区間 [0,1] において連続ならば，上の式が成立する．

(2)　$f(x)$ が区間 [0,1] において積分可能ならば，上の式が成立する．

1992 年度問 2

平面内の有界集合 D に対し積分 $\iint_D 1\,dxdy$ が存在するならば D の境界は零集合である．これを証明せよ．

演習問題：証明問題編

問 29(2003/10/15)

(1)　$f(x)$ を区間 $[0,1]$ で積分可能な関数とするとき，極限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ が存在することを示せ．

(2)　次の極限の値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$$

問 31(2003/10/15)(教科書演習問題 84)

$x\geq 0$ で定義されている関数 $f(x)$ に対し

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt & (x>0)\\ f(x) & (x=0)\end{cases}$$

とするとき，次の命題を示せ．

$f(x)$ が単調増加連続関数 $\Rightarrow$ $F(x)$ も単調増加連続関数

問 35(2003/10/29)

区間 $[a,b]$ 上有界な関数 $f(x)$ に対し，次の命題を示せ．

$f(x)$ が積分可能 $\Rightarrow$ $|f(x)|$ も積分可能

($\sup|f|-\inf|f|$ と $\sup f-\inf f$ の大小を比較してみよ．)

問 36(2003/10/29)

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$ とし，さらに $f(x)$ が次のように定義されたとき，その命題は正しいか誤りかを判定し，正しければ証明し誤りなら判例を挙げよ．

(1)　$f(0)=0$，区間 $[0,1]$ 上の関数 $\Rightarrow$ $f(x)$ は積分可能

(2)　$f(x)$ が区間 $(0,1]$ 上の関数　$\Rightarrow$ $f(x)$ は一様連続

(3)　$f(x)$ が区間 $[1,\infty)$ の関数　$\Rightarrow$ $f(x)$ は一様連続

問 40(2003/11/12)

$f(x)$ が区間 $(a,b]$ で連続な関数とするとき，次の命題を示せ．

$\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ が収束 $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ も収束

問 42(2003/11/26)

(1)　部分積分により $0<a<b$ のとき $\left|\displaystyle\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx\right|\leq\frac{2}{a}$ であることを示せ．

(2)　Cauchy の収束判定法により $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ が収束することを示せ．

問 43(2003/11/26)(教科書演習問題 105)

$[0,1]\times[0,1]$ 上で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y\text{ は有理数})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

は積分可能であるかどうかを吟味せよ．

2005 年度問 1

(1)：正しい

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)dx &= \lim_{a\to\infty, b\to-\infty}\int_b^a f'(x)dx \\ &= \lim_{a\to\infty, b\to-\infty}[f(x)]_b^a \\ &= \lim_{a\to\infty} f(a) - \lim_{b\to-\infty} f(b) = 0 \\ &(\because \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0)\end{aligned}$$

(2)：正しい

$f(x,y)$ は D 上有界，零集合を除いて連続，D の境界が零集合という 3 条件を満たしているので積分可能. [*1][*2]

D は零集合．よって $^\forall\varepsilon > 0$ に対し D 全体を覆うことのできる有限個（N 個とする）の開長方形 $R_1, \dots R_N$ で $\sum_{k=1}^{N}\mu(R_k) < \varepsilon$ となるものが存在する. [*3]

また f は有界であるので $|f(x,y)| \leq {}^\exists M$.

積分時の分割 Δ に R_k の分線[*4]を全て含むものを考えて

$$\begin{aligned}\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| &= \left|\sum_{i,j} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\mu(K_{ij})\right| \\ &= \left|\sum_{K_{ij}\subset R_1\cup\ldots\cup R_n} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\mu(K_{ij})\right| \\ &\leq \sum_{K_{ij}\subset R_1\cup\ldots\cup R_n} |f(\xi_{ij},\eta_{ij})|\mu(K_{ij}) \\ &\leq \sum_{K_{ij}\subset R_1\cup\ldots\cup R_n} M\mu(K_{ij}) = M\varepsilon\end{aligned}$$

よって ε を $\dfrac{\varepsilon}{M}$ と取りなおし

$^\forall\varepsilon > 0$ に対して $\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| < \varepsilon$ とできる.

$$\therefore \quad \iint_D f(x,y)dxdy = 0$$

2004 年度問 1

(1)　D を含む長方形 $K = [a,b]\times[c,d]$ を考え K 上の関数 $\tilde{f}(x,y)$ を

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\in K\backslash D\end{cases}$$ と定義する. [*5]

分割 Δ を

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_j < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$

と $x_1, \ldots x_{i-1}, y_1, \ldots, y_{m-1}$ を取ることで定め，

$|\Delta|$ を $|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1}\}$ とする.

$K_{ij} = [x_i, x_{i-1}]\times[y_j, y_{j-1}]$ として，K_{ij} から任意の点 $(\xi_i, \eta_j)\in K_{ij}$ を取り，そのとき

$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i,j}\tilde{f}(x,y)\mu(K_{ij})$

が Δ と (ξ_i,η_j) のとり方によらず存在するなら

その値を $\iint_D f(x,y)dxdy$ と定義する.

(2)　D の境界は零集合かつ f の不連続点が零集合

(定理 7.3　有界関数 f が，f が零集合を除いて連続で，かつ D の境界は零集合ならば f は D 上積分可能　より．)

もしくはその特殊例として

・D の境界は零集合で f は D 上連続

・D が $[a,b]\times[c,d]$ で表され f は D 上連続　等.

2003 年度問 1

分割 $|\Delta|$ は区間 $[0,1]$ を $x_i = \dfrac{i}{n}$ で分割するものとする. $(i = 1, \ldots, n)$

$[0,1]$ で $f(x) > 0$ なので，相加相乗平均より

$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \geq \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)}$

両辺は正なので対数を取って

$\log\left(\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\right)$

$\geq \dfrac{1}{n}\log(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$

(左辺)$= \log\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$

(右辺)$= \sum_{i=1}^{n}(\log f(x_i))(x_i - x_{i-1})$

すなわち

$\log\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n}(\log f(x_i))(x_i - x_{i-1})$

ここで $n\to\infty$ すなわち $|\Delta|\to 0$ と極限を取ることで

$\log\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \geq \int_0^1 \log f(x)dx$

2002 年度問 1

(1)：誤り

反例は $f(x) = \begin{cases} f(x) = 1 & (x = a) \\ f(x) = 0 & (a < x \leq b)\end{cases}$

このとき $0 \leq \sum_{k=1} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq (x_1 - x_0)$ [*6]

$\therefore \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = 0$

[*1] (定理 7.3)　これがそのまま 2004 年度問 1(2) の答えになる.

[*2] こうして分割が任意でいい事を断っておかないと以下の積分がうまくいかない

[*3] $\mu(K)$ は K の面積を表す

[*4] 辺のこと．この授業で長方形といったら辺が軸に平行なものを指す.

[*5] $K\backslash D$ とは D を除く K のこと

[*6] 和 $= x_1 - x_0$ となるのは $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1$ である ξ_1 が x_0 のとき

$f(x)$ は有界で積分可能で $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ となるが，$f(x)$ は連続でない．

(2):正しい

$[a,b]$ を N 等分する．（一つの幅は $\dfrac{a-b}{N}$）
$f(x)$ は有界閉区間で連続であるので一様連続．
よって $\forall\varepsilon$，$\alpha,\beta \in [a,b]$ に対して
$|\alpha-\beta| < \delta \Rightarrow |f(\alpha)-f(\beta)| < \dfrac{\varepsilon}{4(a-b)}$ となる δ が存在．

よって N を十分大きくとり $\dfrac{a-b}{N} < \delta$ とでき，そのとき各区間の中で (最大値-最小値)< $\dfrac{\varepsilon}{4(a-b)}$．

よってグラフ A は縦 $\dfrac{\varepsilon}{4(a-b)}$，横 $\dfrac{2(a-b)}{N}$ [*7]の各区間上の合計 N 個の開長方形で覆うことができ，その面積は $\dfrac{\varepsilon}{4(a-b)} \times \dfrac{2(a-b)}{N} \times N = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

よって A は (ジョルダンの意味で) 零集合．

2001 年度問 1

(1)　f の $[a,b]$ での最大値，最小値を M, m とする．
$m \leq f(x) \leq M$ を $[a,b]$ で積分して
$m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
よって $m \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M$

$f(x)$ は $[a,b]$ で連続だから
中間値の定理より任意の $y' \in [m,M]$ に対し
$f(x') = y'$ となる $x \in [a,b]$ が存在する

$\therefore\quad \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(\zeta)$ となる $\zeta(a \leq \zeta \leq b)$ が存在．

(2)　$g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ とする．
$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$ である．

f は $[a,b]$ 上で連続関数なので，$a < x < b$ である x に対し十分小さい h を持ってくれば f は $[x,x+h]$ 上で連続関数．
よって (1) を適用し
$\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt = f(^{\exists}\xi) \qquad (x \leq \xi \leq x+h)$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \lim_{\xi\to x} f(\xi)\\ &= f(x)\ (\because f(x)\text{ は連続})\end{aligned}$$

[*7] 横を 2 倍するのは長方形が「開」長方形であるので境界を含まないからである

2000 年度問 1

(1)：正しい

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\frac{x}{n})dx &= n\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt \quad (t = \frac{x}{n}\text{ と置換})\\ &= \frac{1}{\frac{1}{n}-0}\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt\end{aligned}$$

平均値の定理より，$\dfrac{1}{\frac{1}{n}-0}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt = f(\xi)$ となる
$\xi\ (0 \leq \xi \leq \dfrac{1}{n})$ が存在する．
$n \to +\infty$ で $\xi \to +0$ であるので

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(\frac{x}{n})dx &= \lim_{\xi\to+0} f(\xi) = f(0)\\ &= f(0) \quad (\because f(x)\text{ は }[0,1]\text{ で連続})\end{aligned}$$

(2)：誤り

反例は $f(x) = \begin{cases} f(x) = 1 & (x = 0) \\ f(x) = 0 & (0 < x \leq 1) \end{cases}$

$0 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq (x_1 - x_0)$
$\therefore \displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = 0$
$f(x)$ は $[0,1]$ において積分可能である．($\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$)
しかし，同様に計算すると $f(\dfrac{x}{n})$ の積分は n によらず $\displaystyle\int_0^1 f(\frac{x}{n})dx = 0$.
よって $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(\frac{x}{n})dx = 0 \neq f(0)$

1992 年度問 2

f が積分可能であることは $^{\forall}\varepsilon > 0$ に対し，$|\Delta| \to 0$ で
$S_\Delta - s_\Delta = \displaystyle\sum_{i,j}(\sup_{\xi_i,\eta_j\in K_{ij}} f(\xi_i,\eta_j) - \inf_{\xi_i,\eta_j\in K_{ij}} f(\xi_i,\eta_j))\mu(K_{ij}) < \varepsilon$
となることと同値である．

関数 f は $f(x,y) = \begin{cases} f(x) = 1 & (x,y) \in D \\ f(x) = 0 & (x,y) \in E\backslash D \end{cases}$ なので
$\left(\displaystyle\max_{\xi_i,\eta_j\in K_{ij}} f(\xi_i,\eta_j) - \min_{\xi_i,\eta_j\in K_{ij}} f(\xi_i,\eta_j)\right)$
は K_{ij} が D に入る点と入らない点の両方を持つ場合に限り 1，それ以外で 0 である．

そこでそのような K_{ij} を $R_1, R_2, \ldots R_N$ とすれば最初の式は $S_\Delta - s_\Delta = \displaystyle\sum_{k=1}^N \mu(R_k) < \varepsilon$ となる．

D の境界はすべて $R_1, R_2, \ldots R_N$ に含まれている．よってその中心を中心に $\sqrt{2}$[*8]倍拡大し，辺を除いた開長方形

[*8] 別に定数倍なら何でもよい

$R'_1, R'_2, \dots R'_N$ は D の境界全体を覆い [*9]，その面積の和は $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu(R'_k) < 2\varepsilon$ よりいくらでも小さくできる．

$\therefore$　D の境界は零集合．

問 29(2003/10/15)

(1)　定積分の定義において分割 Δ が等分 $(x_k - x_{k-1} = \dfrac{1}{n}, \xi_k = \dfrac{k-1}{n})$ の場合を考える．

$f(x)$ は $[0,1]$ で積分可能なので
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(\xi_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)$
の $|\Delta| \to 0$ での極限値が存在する．

この場合 $|\Delta| \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$ であるから
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)$ が存在．
それは定積分の定義より $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

(2)　$\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1}$
$= \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} + \dfrac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \dfrac{1}{1+\frac{n-1}{n}}\right)$
$= \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k-1}{n}}\right)$
$f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ は $[0,1]$ 上で有界で連続なので積分可能．
(1) より
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \log 2$

問 31(2003/10/15)（教科書演習問題 84）

$x > 0$ のとき

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{x}f(x) - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{x^2}\int_0^x f(x)\,dt - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{x^2}\int_0^x \{f(x) - f(t)\}\,dt
\end{aligned}$$

$f(x)$ が単調増加関数であることより
$0 \le t < x$ で $f(t) < f(x) \Rightarrow F'(x) > 0$，つまり $F(x)$ は $x > 0$ で（微分可能なので）連続かつ単調増加である．

$x = 0$ のとき $F(x)$ は連続である．
$\because$　$\displaystyle\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x-0}\left(\int_0^x f(t)dt - \int_0^0 f(x)dx\right)$
$= \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x f(t)dt_{(x=0)} = f(x)_{(x=0)} = f(0) = F(0)$ [*10]

$x = 0$ でも連続であるから，$F(x)$ は $x \ge 0$ で連続かつ単調増加．

問 35(2003/10/29)

$f(x)$ が積分可能であることと，$^\forall\varepsilon > 0$ に対し十分小さい分割（$|\Delta| <^\exists \delta$）をもって来れば
$S_\Delta - s_\Delta = \displaystyle\sum_k(\sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x) - \inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x))(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$
となることは同値である．

ここで $\sup|f(x)| - \inf|f(x)| < \sup f(x) - \inf f(x)$ より [*11]
$f(x)$ が積分可能であるとき，$\forall\varepsilon > 0$ に対して
$|\Delta| < \delta \Rightarrow \displaystyle\sum_k(\sup|f(x)| - \inf|f(x)|)(x_k - x_{k-1})$
$< \displaystyle\sum_k(\sup f(x) - \inf f(x))(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$
よって $|f(x)|$ は積分可能．

問 36(2003/10/29)

(1)　不連続点がただ 1 つだけであるから積分可能．

(2)　一様連続ではない．反例として
$x_n = \dfrac{1}{2n\pi}, y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ がある．

これは $|x_n - y_n| \le x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ と $|x_n - y_n| \to 0$ でも $\left|\sin\dfrac{1}{x_n} - \sin\dfrac{1}{y_n}\right| = 1$ と $|f(x_n) - f(y_n)|$ は小さくならず．
一様連続の定義 $|x - y| <^\exists\delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| <^\forall\varepsilon$ を満たさない．

(3)　一様連続である．$x, y \ge 1$ とすると

$$\begin{aligned}
\left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}\right| &= \left|\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} \frac{d}{dt}\sin t\,dt\right| \\
&= \left|\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} \cos t\,dt\right| \\
&\le \left|\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} |\cos t|\,dt\right| \\
&\le \left|\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} dt\right| \\
&\le \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| \\
&= \frac{|x - y|}{|xy|} \\
&\le |x - y| \qquad (\because x, y \ge 1)
\end{aligned}$$

$\therefore$　$|x - y| <^\exists\delta(\equiv\varepsilon) \Rightarrow \left|\sin\dfrac{1}{x} - \sin\dfrac{1}{y}\right| <^\forall\varepsilon$
ゆえに $\sin\dfrac{1}{x}$　$(1 \le x < \infty)$ は一様連続である．

---

*9 分割の長方形は「閉」だが，零集合の定義に使う長方形は「閉」なので．つまり D の境界が R_i の辺上にある場合，それを開長方形で覆いたければより大きくしなければならない．

*10 今の導出で x の意味が変わっていることに注意．

*11 $\sup f(x) = a$, $\inf f(x) = b$ として a, b を正や負で場合分けすればよい．

問 40(2003/11/12)

コーシーの判定法より $\lim_{t\to a+0} g(t)$ が存在 $\Leftrightarrow$
$^\forall\varepsilon > 0$ に対し $a < t_1, t_2 < a + ^\exists\delta \Rightarrow |g(t_1) - g(t_2)| < \varepsilon$
である．

$g(t) = \int_t^b f(x)dx$ とする．
$\int_a^b |f(x)|dx$ が収束（絶対収束）するとき
$^\forall\varepsilon > 0$ に対し，$a < t_1, t_2 < a + ^\exists\delta$

$$\Rightarrow \Big| \int_{t_1}^b |f(x)|dx - \int_{t_2}^b |f(x)|dx \Big| < \varepsilon$$

これを $\Big| \int_{t_1}^b f(x)dx - \int_{t_2}^b f(x)dx \Big| \le \Big| \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \Big|$
$\le \int_{t_1}^{t_2} |f(x)|dx = \Big| \int_{t_1}^b |f(x)|dx - \int_{t_2}^b |f(x)|dx \Big|$
より $|f(x)|$ を $f(x)$ で置き換え，$\int_a^b f(x)dx$ は収束．

問 42(2003/11/26)

$$(1)\quad \int_a^b \frac{\sin x}{x}dx = -\int_a^b \frac{(\cos x)'}{x}dx$$
$$= -\Big[\frac{\cos x}{x}\Big]_a^b - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}dx$$
$$= \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}dx$$
$$\therefore\quad \left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right| \le \left|\frac{\cos a}{a}\right| + \left|\frac{\cos b}{b}\right| + \int_a^b \frac{dx}{x^2}$$
$$\le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2}{a}$$

(2)　$0 < L_1 < L_2$ に対し (1) より
$$\left|\int_{L_1}^{L_2} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{2}{L_1}$$
であるから $^\forall\varepsilon > 0$ に対し $\frac{2}{L} < \varepsilon$ となるように L をとると
$L < L_1 < L_2$ なる L_1，L_2 に対し
$$\left|\int_{L_1}^{L_2} \frac{\sin x}{x}dx\right| < \frac{2}{L} < \varepsilon$$
$\therefore$　Cauchy の判定法により $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束する．

問 43(2003/11/26)(教科書演習問題 105)

どんな分割 Δ に対しても $K_{ij} = [x_i, x_{i-1}] \times [y_j, y_{j-1}]$ の中に x, y が共に有理数である点とそうでない点が存在する．

点 $(\xi_i, \eta_j) \in K_{ij}$ の ξ_i, η_j を有理数に取れば
$$\sum_{i,j} f(x,y)\mu(K_{ij}) = 1$$
点 $(\xi_i, \eta_j) \in K_{ij}$ の ξ_i, η_j の片方を無理数に取れば
$$\sum_{i,j} f(x,y)\mu(K_{ij}) = 0$$

$\therefore$　$|\Delta| \to 0$ での極限値が存在しないので積分不可能．

問２:積分とパラメータ

2005 年度問 2

実数 α に対し $I_\alpha = \displaystyle\int_0^1 dx \int_0^x \left(\frac{1-y}{1-x}\right)^\alpha e^y\,dy$ とする.

(1)　I_α が存在するための α の条件を求めよ.

(2)　α が (1) の条件をみたすとき，I_α の値を求めよ.

2004 年度問 2

実数 α に対し $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\infty x^\alpha \log\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$ とする.

(1)　$I_{-\frac{1}{2}}$ の値を計算せよ.

(2)　I_α が存在するための α の条件を求めよ.

2003 年度問 2

実数 α に対し $I_\alpha = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{(1+x)^\alpha}\,dx$ とする.

(1)　I_2 の値を求めよ.

(2)　積分 I_α が存在するための α の条件を求めよ.

2002 年度問 2

実数 α に対し $I_\alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx$ とする.

(1)　I_α が存在するための α の条件を求めよ.

(2)　$I_{\frac{1}{2}} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\theta)\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin 2\theta)\,d\theta$ であることを示し，$I_{\frac{1}{2}}$ の値を求めよ.

2001 年度問 2

実数 α に対し $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^\alpha}\,dx$ とする.

(1)　I_α が存在するための α の条件を求めよ.

(2)　$I_\alpha > 0$ であるための α の条件を求めよ.

2000 年度問 2

(1)　次の積分のうち収束するものを選び，その値を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx \qquad \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

(2)　次の積分が収束するための実数 α の条件を求めよ，

また，積分の値をベータ関数で表せ.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha}$$

1992 年度問 4

$[0,\infty)$ 上の連続関数 f に対し関数 $I_\alpha f$ を

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt$$

で定義する（ただし，$\alpha > 0$ であり $\Gamma(\alpha)$ は $Gamma$ 関数を表す).

このとき，任意の $\alpha, \beta > 0$ に対し $I_\alpha(I_\beta f) = I_{\alpha+\beta} f$ が成立することを証明せよ.

ヒント：任意の $\alpha, \beta > 0$ に対し

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

が成立することを思い出せ.

演習問題：積分とパラメータ編

問 38(2003/11/12)

実数 α に対し $I_\alpha = \displaystyle\int_1^2 (x^2-1)^\alpha\,dx$ とするとき

(1)　I_α が収束するための α の条件を求めよ.

(2)　$I_{-\frac{1}{2}}$ の値を求めよ.

問 41(2003/11/26)

実数 $\alpha > 0$ に対し $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\infty x^\alpha \tan^{-1} x\,dx$ とするとき

(1)　I_α が収束するための α の条件を求めよ.

(2)　$I_{-\frac{3}{2}}$ の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ であることを用いてもよい.

予備知識

以下の問題ではランダウの記号 $O(\ )$ を使うことになります.

ランダウの記号には $O(\ )$ と $o(\ )$ の 2 種類がありますが，ここで使うのは O の方です.

定義：2 つの関数 $f(x), g(x)$ に対し，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $x \to a$ で有界になるとき（有限値に収束するとき）

$f(x) = O(g(x))$ または，$f(x) = O(g(x))\ (x \to a)$ と表す.

以下のように $\log x$ の極限での増減を x のべき乗の増減で近似 (？) できます.

$\forall\varepsilon > 0$ に対して $\log x = O\left(\dfrac{1}{x^\varepsilon}\right)\ (x \to 0)$

$\forall\varepsilon > 0$ に対して $\log x = O(x^\varepsilon)\ (x \to \infty)$

$\log(x+1) = O(x)\ (x \to 0)$

$\log x = O(x-1)\ (x \to 1)$

これらを使う場合はロピタルの定理（$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するなら $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$）を使い

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-\varepsilon}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\log x)'}{(x^{-\varepsilon})'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{-\varepsilon x^{\varepsilon}} = 0$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\log x}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x\to \infty}\frac{(\log x)'}{(x^{\varepsilon})'} = \lim_{x\to \infty}\frac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\log(x+1))'}{(x)'} = \lim_{x\to \infty}\frac{1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\log x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$$

と示してから使ってください.

また解答の見通しが立っている場合には ε には最初から小さい値を入れてもいいでしょう.

広義積分の収束条件として

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ や $\displaystyle\int_c^a f(x)dx$ の $f(x)$ が $x \to a$ で有界でなくても

$\mu < 1$ かつ $f(x) = O\left(\dfrac{1}{(x-a)^\mu}\right)\ (x \to a) \Rightarrow$ 積分は収束　(μ-テスト)

$\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ の $f(x)$ が $x \to \infty$ で有界でなくても

$\lambda > 1$ かつ $f(x) = O\left(\dfrac{1}{x^\lambda}\right)\ (x \to \infty) \Rightarrow$ 積分は収束　(λ-テスト)

があり，問 2 の中心です.

$f(x) = O(g(x))\ (x \to a)$ の時には

$f(x) = O(-g(x))\ (x \to a)$，$f(x)p(x) = O(g(x)p(x))\ (x \to a)$,

$p(x) = O(q(x))\ (x \to a)$ に対し $f(x)p(x) = O(g(x)q(x))\ (x \to a)$,

が定義より成立します.

以下の解答は定義に従って書いているのでこれらは使っていませんが，使っても差し支えないと思われます.

2005 年度問 2

(1)　$I_\alpha=\iint_D\left(\dfrac{1-y}{1-x}\right)^\alpha e^y\,dxdy$ であり
$D=\left\{(x,y)\;\middle|\;x,y\geq 0,y\leq x\leq 1\right\}$ である．
$x\to 1$ のときに関数が有界でなくなるので
$D_k=\left\{(x,y)\;\middle|\;x,y\geq 0,y\leq x\leq k\right\}$ 上での積分で $k\to 1$ の極限を考える．[*1]

(i)　$\alpha=1$ の場合
積分順序交換をして

$$\int_0^k dy\int_y^k\frac{1-y}{1-x}e^y\,dx$$
$$=\int_0^k dy\left[-(1-y)e^y\log(1-x)\right]_y^k$$
$$=\int_0^k\left\{-(1-y)e^y\log(1-k)+(1-y)e^y\log(1-y)\right\}dy$$

第一項に関して，$\displaystyle\int_0^k-(1-y)e^y\,dy$ は被積分関数が積分区間で有界なので，この値は有限な値になる．
よって $\log(1-k)\displaystyle\int_0^k-(1-y)e^y\,dy$ は $k\to 1$ で発散．

第二項に関して，$\displaystyle\int_0^1(1-y)e^y\log(1-y)\,dy$ は $y\to 1$ で広義積分だが
ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{y\to 1}\frac{\log(1-y)}{(1-y)^{-1}}=\lim_{y\to 1}-(1-y)=0$
よって $\displaystyle\lim_{y\to 1}(1-y)e^y\log(1-y)=0$
よって $(1-y)e^y\log(1-y)=O(\dfrac{1}{(1-y)^0})\quad(y\to 1)$
$0<1$ なので $\displaystyle\int_0^1(1-y)e^y\log(1-y)\,dy$ は収束する．

ゆえに，積分全体は収束しない．[*2]

(ii)　$\alpha\neq 1$ の場合
積分順序交換をして

$$\int_0^k dy\left[-\frac{(1-y)^\alpha e^y(1-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_y^k$$
$$=\int_0^k dy\,\frac{e^y}{\alpha-1}\left(\frac{(1-y)^\alpha}{(1-k)^{\alpha-1}}-(1-y)\right)$$
$$=\frac{1}{(\alpha-1)(1-k)^{\alpha-1}}\int_0^k e^y(1-y)^\alpha\,dy$$
$$-\frac{1}{\alpha-1}\int_0^k(1-y)e^y\,dy$$

ここで $\displaystyle\int_0^1 e^y(1-y)^\alpha\,dy$，$\displaystyle\int_0^1(1-y)e^y\,dy$ は共に被積分関数が積分区間で有界なので，値は有限な値になる．
よって全体の収束，発散は分母の $(1-k)^{\alpha-1}$ に依り，
$\alpha>1$ で発散，$\alpha<1$ で収束．

$\therefore\quad I_\alpha$ が存在 $\Leftrightarrow\ \alpha<1$ [*3]

(2)　積分順序交換をして

$$I_\alpha=\int_0^1 dy\int_y^1\left(\frac{1-y}{1-x}\right)^\alpha e^y\,dx$$
$$=\int_0^1 dy\left[-\frac{(1-y)^\alpha\,e^y(1-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_y^1$$
$$=\int_0^1 dy\,\frac{e^y(1-y)}{1-\alpha}$$

ここで $\displaystyle\int_0^1 e^y(1-y)\,dy=[e^y(1-y)]_0^1+\int_0^1 e^y\,dy$
$=-1+(e-1)=e-2$

$\therefore\quad\alpha<1$ のとき $I_\alpha=\dfrac{e-2}{1-\alpha}$

2004 年度問 2

(1)　
$$I_{-\frac{1}{2}}=\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)dt$$
$$=\int_\infty^0 t\log(1+t^2)\left(-2\frac{1}{t^3}\right)dt\quad(t=\frac{1}{\sqrt{x}}\text{ と置換})$$
$$=2\int_0^\infty\frac{1}{t^2}\log(1+t^2)\,dt$$

$$\int\frac{1}{t^2}\log(1+t^2)\,dt=\left(-\frac{1}{t}\right)\log\left(1+t^2\right)-\int\left(-\frac{1}{t}\right)\frac{2t}{1+t^2}\,dt$$
$$=-\frac{\log(1+t^2)}{t}+2\tan^{-1}t$$

$\dfrac{\left(log(1+t^2)\right)'}{(t)'}=\dfrac{2t}{1+t^2}$ なのでロピタルの定理より

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t^2)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{1+t^2}=0$$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log(1+t^2)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{1+t^2}=0$$

$$\therefore I_{-\frac{1}{2}}=2\left[-\frac{\log(1+t^2)}{t}+2\tan^{-1}t\right]_0^\infty=2\pi$$

(2)　$t=\dfrac{1}{x}$ と置換し，$I_\alpha=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$ と書き直す．
$t\to 0$ と $t\to\infty$ のとき広義積分になるので

$I_\alpha=\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}\,dt+\int_1^\infty\frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$ と分けて調べる．

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+t}=1$ より
$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}t^{\alpha+1}=1$
すなわち $\dfrac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}=O\left(\dfrac{1}{t^{\alpha+1}}\right)\ (t\to 0)$
$\alpha<0$ のとき $\alpha+1<1$ より $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$ は収束．

[*1] x か y の片方を先に計算する累次積分の方法は使えない．その方法が使える条件は $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ が積分可能であると分かっていることだからである．そもそもこの問題では y で先に積分することは $x=1$ のときは関数の分母が 0 より無理．x で積分して出てくる発散した値を y で積分するのも無理．

[*2] 第一項が発散してることが分かっているが第二項を調べたのは，第一項の発散は正の発散なので，負値の関数を積分している第二項が発散すると積分全体は収束することもありうるからである．

[*3] 以上の過程を踏まず，いきなり x を積分区間 [0,1] で積分すると答えには $1<\alpha$ も含まれてしまう．しかし正答はこれだと思う．

$\alpha=0$ のとき

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1$ より $\displaystyle\frac{\log(1+t)}{t}$ には区間 $(0,1]$ で最小値 $m>0$ が存在する.

よって $\log(1+t)\geq mt\quad(0<t\leq 1)$ が成立するので

$$\int_0^1\frac{\log(1+t)}{t^2}\,dt\geq\int_0^1\frac{m}{t}\,dt=m\big[\log t\big]_0^1$$

ゆえに積分は発散するので積分全体も発散.

$\alpha>0$ のときは $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}\,dt\geq\int_0^1\frac{\log(1+t)}{t^2}dt$

ゆえに上同様に積分全体は発散. [*4]

$^\forall\varepsilon>0$ に対し，ロピタルの定理より

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log(1+t)}{t^\varepsilon}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\varepsilon t^{\varepsilon-1}+\varepsilon t^\varepsilon}=0$$ なので

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}t^{\alpha+2-\varepsilon}=0$$

すなわち $\displaystyle\frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}=O\left(\frac{1}{t^{\alpha+2-\varepsilon}}\right)\quad(t\to\infty)$

$\alpha>-1$ のとき $\varepsilon=\dfrac{\alpha+1}{2}$ として $\alpha+2-\varepsilon=\dfrac{\alpha+3}{2}>1$

より $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$ は収束.

$\alpha=-1$ のとき

$$\int_1^\infty\frac{\log(1+t)}{t}\,dt\geq\int_1^\infty\frac{\log(1+t)}{1+t}\,dt=\frac{1}{2}\big[(\log(1+t))^2\big]_1^\infty$$

ゆえに積分は発散するので積分全体も発散.

$\alpha<-1$ のときは $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log(1+t)}{t^{\alpha+2}}\,dt\geq\int_1^\infty\frac{\log(1+t)}{t}\,dt$

ゆえに上同様積分全体は発散.

$\therefore\quad I_\alpha$ が存在 $\Leftrightarrow$ $-1<\alpha<0$

2003 年度問 2

(1) $\displaystyle I_2=\int_1^\infty\frac{\log x}{(1+x)^2}dx$

$$\begin{aligned}\int\frac{\log x}{(1+x)^2}\,dx&=\left(-\frac{1}{1+x}\right)\log x\,dx-\int\left(-\frac{1}{1+x}\right)\frac{1}{x}\,dx\\&=-\frac{\log x}{1+x}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx\\&=-\frac{\log x}{1+x}+\log\left|\frac{x}{x+1}\right|\end{aligned}$$

ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{1+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$

よって $\displaystyle I_2=\left[-\frac{\log x}{1+x}+\log\left(\frac{x}{1+x}\right)\right]_1^\infty=-\log\frac{1}{2}=\log 2$

(2) $x\to\infty$ のとき広義積分になる.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{(1+x)^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)}=1$$

$\forall\varepsilon>0$ に対し，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\varepsilon}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon}=0$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{(1+x)^\alpha}x^{\alpha-\varepsilon}=0$

すなわち $\displaystyle\frac{\log x}{(1+x)^\alpha}=O\left(\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}\right)=0\quad(x\to\infty)$

$\alpha>1$ のとき $\varepsilon=\dfrac{\alpha-1}{2}$ として

$\alpha-\varepsilon=\dfrac{\alpha+1}{2}>1$ より $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{(1+x)^\alpha}\,dx$ は収束.

$\alpha=1$ のとき

$$\int_1^\infty\frac{\log x}{(1+x)}\,dx\geq\int_1^\infty\frac{\log x}{2x}\,dx=\frac{1}{4}\big[(\log x)^2\big]_1^\infty$$

ゆえに積分は発散.

$\alpha<1$ のときは $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{(1+x)^\alpha}\,dx\geq\int_1^\infty\frac{\log x}{1+x}\,dx$

ゆえに上同様積分は発散.

$\therefore\quad I_\alpha$ が収束 $\Leftrightarrow$ $\alpha>1$

2002 年度問 2

(1) $x\to 0,\ x\to 1$ で広義積分になるので

$\displaystyle I_\alpha=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx$ と分けて調べる.

$^\forall\varepsilon>0$ に対して，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-\varepsilon}}=\lim_{x\to 0}-\frac{x^\varepsilon}{\varepsilon}=0$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha x^{-\varepsilon}}=0$

すなわち $\displaystyle\frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}=O\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right)\quad(x\to 0)$

例えば $\varepsilon=\dfrac{1}{2}<1$ とすることで $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx$ は収束.

ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}=\lim_{x\to 1}-\frac{1}{x}=-1$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^{\alpha-1}\log x}{(1-x)^\alpha(1+x)^\alpha}=-\frac{1}{2^\alpha}$

すなわち $\displaystyle\frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}=O\left(\frac{1}{(1-x)^{\alpha-1}}\right)\quad(x\to 1)$

$\alpha<2$ のとき $\alpha-1<1$ より $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx$ は収束.

$\alpha=2$ のとき

ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{-\log x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$ なので

$\dfrac{-\log x}{1-x}$ には区間 $[\frac{1}{2},1)$ で最小値 $m>0$ が存在する.

よって $-\log x\geq m(1-x)\quad\left(\dfrac{1}{2}\leq x\leq 1\right)$ が成立するので

$$-\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\log x}{(1-x^2)^2}\,dx\geq\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{m(1-x)}{(1-x)^2 2^2}\,dx=\frac{m}{4}\big[-\log(1-x)\big]_{\frac{1}{2}}^1$$

ゆえにこの積分は発散するので積分全体も発散. [*5]

$\alpha>2$ のときは $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\log x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx\geq\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\log x}{(1-x^2)^2}\,dx$

ゆえに上同様に積分全体は発散.

$\therefore\quad I_\alpha$ が存在 $\Leftrightarrow$ $\alpha<2$

(2) $x=\sin\theta$ と置換し

[*4] 不等式は $0<t\leq 1$ に依存している．以下でも同じことに注意.

[*5] 最初の積分で部分積分しても発散することは示せる.

$I_{\frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin\theta)}{(1-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}\cos\theta\,d\theta$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\theta)\,d\theta$
$\theta = 2\varphi$ と置換し
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin 2\varphi)2\,d\varphi$
$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\log 2 + \log(\sin\theta) + \log(\cos\theta))\,d\theta$　(θ に戻した)

ここで $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos\theta)d\theta$ について $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$ と置換し
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos\theta)d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin\phi)(-d\phi) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\theta)d\theta$
$\therefore\quad I_{\frac{1}{2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2\,d\theta + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\theta)\,d\theta = \frac{\pi\log 2}{2} + 2I_{\frac{1}{2}}$

$\therefore\quad I_{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi\log 2}{2}$

2001 年度問 2

(1)　$x \to 0$, $x \to \infty$ で広義積分になるので
$I_\alpha = \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^\alpha}\,dx + \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^\alpha}\,dx$ と分けて調べる.

$^\forall\varepsilon > 0$ に対して，ロピタルの定理より
$\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-\varepsilon}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^\varepsilon}{-\varepsilon} = 0$
よって $\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{(1+x^\alpha)x^{-\varepsilon}} = 0$
すなわち $\frac{\log x}{1+x^\alpha} = O\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right)$　$(x \to 0)$
例えば $\varepsilon = \frac{1}{2} < 1$ と定めることで $\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^\alpha}\,dx$ は収束.

$^\forall\varepsilon > 0$ に対して，ロピタルの定理より
$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\varepsilon} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0$
よって $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{1+x^\alpha}x^{\alpha-\varepsilon} = 0$
すなわち $\frac{\log x}{1+x^\alpha} = O\left(\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}\right)$　$(x \to \infty)$
$\alpha > 1$ のとき $\varepsilon = \frac{\alpha-1}{2}$ として $\alpha - \varepsilon = \frac{\alpha+1}{2} > 1$
より $\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^\alpha}\,dx$ は収束.

$\alpha = 1$ のとき $\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x}\,dx \geq \int_1^\infty \frac{\log x}{2x}\,dx = \frac{1}{4}\left[(\log x)^2\right]_1^\infty$
ゆえにこの積分は発散するので積分全体も発散.
$\alpha < 1$ のときは $\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^\alpha}\,dx \geq \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x}\,dx$
ゆえに上同様にこの積分は発散するので積分全体も発散.

$\therefore\quad I_\alpha$ が存在 $\Leftrightarrow \alpha > 1$

(2)　$I_\alpha = \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^\alpha}\,dx + \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^\alpha}\,dx$
これの第一項を $x = \frac{1}{t}$ と置換し
$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^\alpha}\,dx = \int_\infty^1 \frac{\log\frac{1}{t}}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^\alpha}\left(-\frac{1}{t^2}\,dt\right) = -\int_1^\infty \frac{t^{\alpha-2}\log t}{1+t^\alpha}\,dt$

よって $I_\alpha = \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^\alpha}(1-x^{\alpha-2})\,dx$

$x = 1$ では被積分関数 $= 0$
$1 < x$ では $\begin{cases} 1 < \alpha < 2 & \Leftrightarrow \text{被積分関数} > 0 \\ 2 \geq \alpha & \Leftrightarrow \text{被積分関数} \leq 0 \end{cases}$

$\therefore\quad I_\alpha > 0 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 2$

2000 年度問 2

(1)　$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^\infty$　(発散)
$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$
よって $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$ が収束し，その値は $\frac{1}{2}$

(2)　$x \to \infty$ のとき広義積分になる.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2\alpha}}{(1+x^2)^\alpha} = 1$
すなわち $\frac{1}{(1+x^2)^\alpha} = O\left(x^{2\alpha}\right)$　$(x \to \infty)$
$\alpha > \frac{1}{2}$ のとき $2\alpha > 1$ より $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^\alpha}\,dx$ は収束.

$\alpha = \frac{1}{2}$ のとき $t = \sqrt{x^2+1} + x$ と置換して
$x = \frac{t^2-1}{2t}$, $\sqrt{1+x^2} = \frac{t^2+1}{2t}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2+1}{2t^2}$ より
$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_1^\infty tdt = \frac{1}{2}\left[t^2\right]_1^\infty$
ゆえに積分は発散.
$\alpha < \frac{1}{2}$ のときは $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha} \geq \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$
ゆえに上同様積分は発散.

$\therefore\quad \alpha > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ 積分が収束.

ベータ関数 $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$
を $x = \sin^2\theta$ で置換し
$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,d\theta$

$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha}$ を $x = \tan\theta$ で置換し
$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\frac{1}{\cos^2\theta})^\alpha}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2\alpha-2}\,d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2}\right)$

1992 年度問 4

ごめんなさい．解けません．
ただ「思い出せ」の前に習っていないので
範囲外の筈です.

問 38(2003/11/21)

(1)$x \to 1$ のとき広義積分となる.

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)^\alpha}{(x-1)^\alpha} = 2^\alpha$$

すなわち $(x^2-1)^\alpha = O\left(\dfrac{1}{(x-1)^{-\alpha}}\right) \quad (x \to 1)$

$\alpha > -1$ のとき $-\alpha < 1$ より $\displaystyle\int_1^2 (x^2-1)^\alpha\,dx$ は収束.

$\alpha = -1$ のとき

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \left[\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]_1^2$$

ゆえに積分は発散.

$\alpha < -1$ のときは $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x^2-1)^\alpha}\,dx \geq \int_1^2 \frac{1}{x^2-1}\,dx$

ゆえに上と同様積分は発散.

$$\therefore \quad I_\alpha \text{ が収束} \Leftrightarrow \alpha > -1$$

(2) $t = \sqrt{x^2-1} + x$ と置換して

$x = \dfrac{t^2+1}{2t}$, $\sqrt{x^2-1} = \dfrac{t^2-1}{2t}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^2-1}{2t^2}$ より

$$I_{-\frac{1}{2}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int_1^{2+\sqrt{3}} \frac{dt}{t} = \log(2+\sqrt{3})$$

問 41(2003/11/26)

(1) 関数は $x \to 0,\ x \to \infty$ で広義積分となるので

$I_\alpha = \displaystyle\int_0^1 x^\alpha \tan^{-1}x\,dx + \int_1^\infty x^\alpha \tan^{-1}x\,dx$ と分けて調べる.

ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2} = 1$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^\alpha \tan^{-1}x)x^{-1-\alpha} = 1$

すなわち $x^\alpha \tan^{-1}x = O\left(\dfrac{1}{x^{-1-\alpha}}\right) \quad (x \to 0)$

$\alpha > -2$ のとき $-1-\alpha < 1$ より $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha \tan^{-1}x\,dx$ は収束.

$\alpha = -2$ のとき

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x} = 1$ より関数 $\dfrac{\tan^{-1}x}{x}$ には区間 $(0,1]$ で最小値 $m > 0$ が存在する.

よって $\tan^{-1}x \geq mx \quad (0 < x \leq 1)$ が成立するので

$$\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx \geq \int_0^1 \frac{m}{x}\,dx = m\bigl[\log(x)\bigr]_0^1$$

ゆえにこの積分は発散するので積分全体も発散.

$\alpha < -2$ のときは $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \tan^{-1}x\,dx \geq \int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$

ゆえに上と同様この積分は発散するので積分全体でも発散.

$1 \leq x$ のとき $\dfrac{\pi}{4} \leq \tan^{-1}x \leq \dfrac{\pi}{2}$ より

$x^\alpha \tan^{-1}x = O\left(\dfrac{1}{x^{-\alpha}}\right) \quad (x \to \infty)$

$\alpha < -1$ のとき $-\alpha > 1$ より $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha \tan^{-1}x\,dx$ は収束.

$\alpha \geq -1$ のとき

$$\int_1^\infty x^\alpha \tan^{-1}x\,dx \geq \frac{\pi}{4(\alpha+1)}\bigl[x^{\alpha+1}\bigr]_1^\infty$$

ゆえに積分は発散するので積分全体でも発散.

$$\therefore \quad I_\alpha \text{ が収束} \Leftrightarrow -2 < \alpha < -1$$

(2) $\displaystyle I_{-\frac{3}{2}} = \int_0^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

$$= \left[-2x^{-\frac{1}{2}}\tan^{-1}x\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

第一項について, $\dfrac{(\tan^{-1}x)'}{(x^{\frac{1}{2}})'} = \dfrac{2x}{1+x^2}$ なので

ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\tan^{-1}x}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to \infty}\frac{2x}{1+x^2} = 0$$

よって $\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\tan^{-1}x\right]_0^\infty = 0$

第二項は $t = \sqrt{x}$ と置換すれば $4\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4}$ となる.

$$\therefore \quad I_{-\frac{3}{2}} = \sqrt{2}\,\pi$$

問３，問４：重積分

2005 年度問 3

$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 1 \leq x \leq 2, 1 \leq xy \leq 2x\right\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D x^3 y\, dxdy$$

2005 年度問 4

次の各積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$ ただし，$D = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\right\}$

(2) $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z}}$ ただし，$D = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; 0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)\right\}$

2004 年度問 3

λ を正定数とし，$x \geq 0$ における連続関数 $f(x)$ に対し

$$F_\lambda = \int_0^x (x-y)^\lambda f(y)\, dy \qquad (x \geq 0)$$

とする．このとき $\displaystyle\int_0^x F_\lambda(t)\, dt$ は $F_{\lambda+1}(x)$ の定数倍であることを示しその定数 (λ に依る) を求めよ．

2004 年度問 4

$D = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; 0 \leq z \leq 1-\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_D z\sqrt{1-x^2-y^2+z^2}\, dxdydz$$

2003 年度問 3

平面 $x+y+z=1$ と 3 つの座標面とによって囲まれた領域を D とするとき，

積分 $\displaystyle\iiint_D y\, dxdydz$ の値を求めよ．

2003 年度問 4

D を中心原点，半径 1 の円とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

2002 年度問 3

$D = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\right\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_D x^2 z\, dxdydz$$

2002 年度問 4（教科書演習問題 115 改）

$D = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \geq 1\right\}$ とするとき，次の積分が存在するための実数 β の条件を求め，

そのときの積分の値を求めよ．

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\beta}$$

2001 年度問 3

$x, y, z \geq 0, x+y+z \leq 1$ で定まる領域を D とするとき次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$$

2001 年度問 4

f を区間 $[0, 1]$ 上の C^1 級関数とするとき，$\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1} f'(x^2+y^2)\, dxdy = \pi$

であるためには $f(1)-f(0)=1$ が必要十分であることを証明せよ．

2000 年度問 3

次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\, dy$$

2000 年度問 4

$D = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, x,y,z \geq 0, x+y+\sqrt{z} \leq 1\right\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_D z\, dxdydz$$

2000 年度問 5

a,b,c を正定数とするとき次の関係式が成り立つことを示し，その値を求めよ．

$$\iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1} (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz = abc \iiint_{u^2+v^2+w^2\leq 1} (a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)\, dudvdw$$

1992 年度問 1

n を自然数とするとき，領域 $x^2+y^2+z^{2n}<1$ の体積を求めよ．

1992 年度問 3

積分 $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}(2+x^2+y^2)}$ の値を求めよ．

演習問題：積分，重積分編

問 32(2003/10/15)(教科書演習問題 83-(3) 改)

次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

問 33(2003/10/29)

正数 a,b が $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(a+bx^4)^{\frac{1}{2}}} = 1$ を満たすとき

$$\int_0^1 \frac{dx}{(a+bx^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2a}\left\{1+\frac{1}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

であることを示せ．

問 34(2003/10/29)(教科書演習問題 85-(2))

$\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{\left(e^{t+x}\right)}\, dt\right)$ を計算せよ．

問 37(2003/11/12)

$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$ の値を求めよ．

問 44(2003/11/26)(教科書演習問題 102-(5) 改)

$D = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y, y^2-x^2 \leq 1\right\}$ のとき

$\displaystyle\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2}\, dxdy$ の値を求めよ．

問 45(2003/12/10)(教科書演習問題 104)

区間 $[0,\infty)$ 上の関数 φ，ψ に対し

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_0^x \varphi(t)\psi(x-t)dt$$

により，区間 $[0,\infty)$ 上の関数 $\varphi * \psi$ を定義する．f，g，h が区間 $[0,\infty)$ 上の連続関数なら

$$(f*g)*h = f*(g*h)$$

が成り立つことを証明せよ．

問 46(2003/12/10)

$0 \leq x, y, z \leq 1$, $y+z \leq x$, $y \leq x^2$ で定まる領域を D とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_D z\,dxdydz$$

問 47(2003/12/10)

以下で定まる立体の体積を求めよ．

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+z \leq 1, \quad x, y, z \geq 0$$

問 49(2004/01/14)

(1)　$f(x)$ が $\mathbf{R}$ 上の連続関数で $a(x)$, $b(x)$ が $\mathbf{R}$ 上の微分可能な関数ならば

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

が成り立つことを示せ．

(2)　$x>0$ に対し

$$f(x) = \int_x^{x+1}\left\{\int_x^y e^{z^2}\,dz\right\}dy$$

とするとき $f''(x)$ を積分を含まない形で表せ．

問 51(2004/01/14)(教科書演習問題 108)

実数 a, b が $a^2+b^2=1$ をみたすとき，連続関数 $f(x)$ に対し

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(ax+by)\,dxdy = 2\int_{-1}^{1} f(u)\sqrt{1-u^2}\,du$$

が成り立つことを示せ．

($u = ax+by$, $v = -bx+ay$ として変数変換してみよ．)

問 52(2004/01/14)

$D = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\right\}$ のとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_D x^2 z\,dxdydz$$

問 45'(2005/12/14)

曲線 $y=x^3$ と直線 $x+y=2$ と直線 $x=-1$ とで囲まれた領域（境界も含む）を D とするとき，積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ の値を求めよ．

問 52'(2006/01/11)(教科書演習問題 107-(5))

$D = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \leq 4, x \geq 0\right\}$ とするとき次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_D xe^{-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz$$

教科書演習問題 103-(1)

以下で定まる立体の体積を求めよ．

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq 1, x, y, z \geq 0$$

2005 年度問 3

$s=x\,,t=xy$ と変数変換する.
積分範囲は $1\le s\le 2\,,1\le t\le 2s$ に変わり,
$x=s\,,\,y=\dfrac{t}{s}$ より Jacobian は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{t}{s^2} & \dfrac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{1}{s}$$

$$\iint_D x^3y\,dxdy = \int_1^2 ds\int_1^{2s} s^2t\left(\frac{1}{s}\right)dt$$
$$=\int_1^2 ds\,\left[\frac{st^2}{2}\right]_1^{2s}$$
$$=\int_1^2 ds\,\left(2s^3-\frac{1}{2}s\right)=\left[\frac{1}{2}s^4-\frac{1}{4}s^2\right]_1^2=\underline{-\frac{27}{4}}$$

2005 年度問 4

(1) 極座標変換し,
$x=r\sin\theta\cos\varphi\,,\,y=r\sin\theta\sin\varphi\,,\,z=r\cos\theta.$
積分範囲は $0\le r\le 1\,,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\,,0\le\varphi\le 2\pi$ に変わり
Jacobian は $r^2\sin\theta.$

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}\,dr$$
$$=\big[-\cos\theta\big]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\big[\varphi\big]_0^{2\pi}\cdot\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}\,dr=2\pi\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}\,dr$$

$t=\sqrt{1+r^2}+r$ と置換して
$r=\dfrac{t^2-1}{2t}\,,\,\sqrt{1+r^2}=\dfrac{t^2+1}{2t}\,,\,\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{t^2+1}{2t^2}$ より

$$2\pi\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}\,dr=2\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{(t^2-1)^2}{4t^3}\,dt$$
$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{t^2}{2}-2\log t-\frac{1}{2t^2}\right]_1^{1+\sqrt{2}}=\underline{\pi(\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2}))}$$

(2) $$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z}}$$
$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_0^{1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}}\frac{dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z}}$$
$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy\,\left[2\sqrt{1+x^2+y^2+z}\right]_0^{1-(x^2+y^2)}$$
$$=2\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy\,(\sqrt{2}-\sqrt{1+x^2+y^2})$$

極座標変換して $x=r\cos\theta\,,\,y=r\sin\theta\,.$
積分範囲は $0\le r\le 1\,,0\le\theta\le 2\pi$, Jacobian は $r.$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\,\int_0^1(\sqrt{2}-\sqrt{1+r^2})r\,dr$$
$$=2\cdot\big[\theta\big]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2}r^2-\frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=2\cdot 2\pi\cdot\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-(-\frac{1}{3})\right\}=\underline{\frac{2\pi}{3}(2-\sqrt{2})}$$

2004 年度問 3

$F_\lambda(x)=\displaystyle\int_0^x(x-y)^\lambda f(y)\,dy$ より

$$\begin{aligned}\int_0^x F_\lambda(t)dt &= \int_0^x dt\int_0^t(t-y)^\lambda f(t)\,dy\lambda \\ &= \int_0^x dy\int_y^x(t-y)^\lambda f(t)\,dt \quad (\text{積分順序交換}) \\ &= \int_0^x dy\left[\frac{(t-y)^{\lambda+1}}{\lambda+1}f(t)\right]_y^x \\ &= \int_0^x\frac{1}{\lambda+1}(x-y)^{\lambda+1}f(x)\,dy=\underline{\frac{1}{\lambda+1}F_{\lambda+1}(x)}\end{aligned}$$

2004 年度問 4

$$\iiint_D z\sqrt{1-x^2-y^2+z^2}\,dxdydz$$
$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy\,\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}}z\sqrt{1-x^2-y^2+z^2}\,dz$$
$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy\,\left[\frac{1}{3}(1-x^2-y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=\frac{1}{3}\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy\big\{(2-2\sqrt{x^2+y^2})^{\frac{3}{2}}-(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\big\}$$

極座標変換して $x=r\cos\theta\,,\,y=r\sin\theta\,.$
積分範囲は $0\le r\le 1\,,0\le\theta\le 2\pi$, Jacobian は $r.$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1dr\big\{r(2-2r)^{\frac{3}{2}}-r(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\big\}$$

ここで $\displaystyle\int_0^1 r(1-r)^{\frac{3}{2}}\,dr=\int_0^1\left((1-r)^{\frac{3}{2}}-(1-r)^{\frac{5}{2}}\right)dr$

$$=\left[-\frac{2}{5}(1-r)^{\frac{5}{2}}+\frac{7}{2}(1-r)^{\frac{7}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{5}-\frac{2}{7}=\frac{4}{35}$$
$$\int_0^1-r(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\,dr=\left[\frac{1}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=-\frac{1}{5}$$
$$\therefore\quad \text{与式}=\frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}\frac{4}{35}-\frac{1}{5}\right)=\underline{\frac{2(8\sqrt{2}-7)\pi}{105}}$$

2003 年度問 3

$$\iiint_D y\,dxdydz$$
$$=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}y\,dz^{*1}$$
$$=\int_0^1dx\int_0^{1-x}y(1-x-y)\,dy$$
$$=\int_0^1dx\,\left[\frac{(1-x)}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{1-x}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{6}(1-x)^3\,dx$$
$$=\frac{1}{6}\left[-\frac{1}{4}(1-x)^4\right]_0^1=\underline{\frac{1}{24}}$$

*1 以下重積分は z,y,x の順に計算しているが別にどの順番でもよい.

2003 年度問 4

極座標変換して $x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta\,.$
積分範囲は $0 \le r \le 1\,,\ 0 \le \theta \le 2\pi$，Jacobian は r.

$$\iint \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r\,dr}{\sqrt{1+r^2}}$$
$$= 2\pi\left[(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \underline{2\sqrt{2}\pi - 2\pi}$$

2002 年度問 3

$$\iiint_D x^2 z\,dxdydz = \int_0^1 dz \iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} x^2 z\,dxdy$$

$\displaystyle\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} x^2 z\,dxdy$ に対し，
極座標変換して $x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta\,.$
積分範囲は $0 \le r \le z\,,\ 0 \le \theta \le 2\pi$，Jacobian は r.

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} x^2 z\,dxdy$$
$$= z\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (r\cos\theta)^2 r\,dr$$
$$= z\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta \int_0^z r^3\,dr$$
$$= z\cdot\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}sin2\theta\right]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{4}\right]_0^z = \frac{\pi}{4}z^5$$
$$\therefore\quad \text{与式} = \frac{\pi}{4}\int_0^1 z^5\,dz = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{6} = \underline{\frac{\pi}{24}}$$

2002 年度問 4

広義積分であるので $1 \le x^2+y^2+z^2 \le R^2$ として $R \to \infty$ の極限を考える．極座標変換し，
$x = r\sin\theta\cos\varphi\,,\ y = r\sin\theta\sin\varphi\,,\ z = r\cos\theta.$
積分範囲は $1 \le r \le R\,,\ 0 \le \theta \le \pi\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ に変わり
Jacobian は $r^2\sin\theta$.

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\beta}$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_1^R r^{2-2\beta}\,dr$$
$$= [\varphi]_0^{2\pi}\cdot[-\cos\theta]_0^{\pi}\cdot\int_1^R r^{2-2\beta} = 4\pi\int_1^R r^{2-2\beta}\,dr$$

(i)　$2-2\beta = -1$ のとき
$\displaystyle\int_1^R r^{2-2\beta}\,dr = \int_1^R \frac{1}{r}\,dr = \log R$
これは $R\to\infty$ で発散.

(ii)　$2-2\beta \ne -1$ のとき
$\displaystyle\int_1^R r^{2-2\beta}\,dr = \left[\frac{1}{3-2\beta}r^{3-2\beta}\right]_1^R = \frac{1}{3-2\beta}(R^{3-2\beta}-1)$
これは $3-2\beta > 0$ で発散．$3-2\beta < 0$ で収束.

$$\therefore\quad \text{積分の値が存在} \Leftrightarrow \underline{\beta > \frac{3}{2}},\ \text{その値は}\ \underline{\frac{4\pi}{2\beta-3}}$$

2001 年度問 3

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3}$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[-\frac{1}{2}(x+y+z+1)^{-2}\right]_0^{1-x-y}$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}(x+y+1)^{-2}\right) dy$$
$$= \int_0^1 dx \left[-\frac{1}{8}y - \frac{1}{2}(x+y+1)^{-1}\right]_0^{1-x}$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{8}(x-1) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x+1)^{-1}\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{16}(x-1)^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\log(x+1)\right]_0^1 = \underline{\frac{\log 2}{2} - \frac{5}{16}}$$

2001 年度問 4

極座標変換して $x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta\,.$
積分範囲は $0 \le r \le 1\,,\ 0 \le \theta \le 2\pi$，Jacobian は r.

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} f'(x^2+y^2)\,dxdy$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r f'(r^2)\,dr$$
$$= [\theta]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{2}f(r^2)\right]_0^1 = \pi\big(f(1)-f(0)\big)$$
$$\therefore \iint_{x^2+y^2\le 1} f'(x^2+y^2)\,dxdy = \pi \Leftrightarrow f(1)-f(0) = \pi$$

2000 年度問 3

積分順序交換して
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\,dy$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^y \frac{\sin y}{y}\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \left(y\cdot\frac{\sin y}{y}\right)$$
$$= [-\cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{1}$$

2000 年度問 4

$$\iiint_D z\,dxdydz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{(1-x-y)^2} z\,dz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{1}{2}(1-x-y)^4\right)$$
$$= \int_0^1 dx \left[-\frac{1}{10}(1-x-y)^5\right]_0^{1-x}$$
$$= \int_0^1 dx \left(\frac{1}{10}(1-x)^5\right)$$

$$= \left[-\frac{1}{60}(1-x)^6 \right]_0^1 = \underline{\frac{1}{60}}$$

2000 年度問 5

左辺について，$x = au$, $y = bv$, $z = cw$ と変数変換し，積分範囲は $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ に変わり，Jacobian は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

$$\therefore \iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1} (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$$
$$= abc \iiint_{u^2+v^2+w^2\leq 1} (a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)\,dudvdw$$

極座標変換し，

$u = r\sin\theta\cos\varphi$, $v = r\sin\theta\sin\varphi$, $w = r\cos\theta$.
積分範囲は $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ に変わり
Jacobian は $r^2\sin\theta$.

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2\leq 1} u^2\,dudvdw$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\,d\theta \int_0^1 r^4\,dr$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos 2\varphi + 1)\,d\varphi \int_{-1}^1 (1-t^2)\,dt \int_0^1 r^4\,dr$$
($t = \cos\theta$と置換)
$$= \left[\frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^1 \cdot \left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1 = \frac{4\pi}{15}$$

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2\leq 1} v^2\,dudvdw$$
$$= \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\,d\theta \int_0^1 r^4\,dr$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)\,d\varphi \int_{-1}^1 (1-t^2)\,dt \int_0^1 r^4\,dr$$
($t = \cos\theta$と置換)
$$= \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^1 \cdot \left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1 = \frac{4\pi}{15}$$

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2\leq 1} w^2\,dudvdw$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos^2\theta\sin\theta\,d\theta \int_0^1 r^4\,dr$$
($t = \cos\theta$と置換)
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 t^2\,dt \int_0^1 r^4\,dr = \frac{4\pi}{15}$$

$\therefore$ 値は $\dfrac{4\pi abd}{15}(a^2+b^2+c^2)$

1992 年度問 1

$x^2 + y^2 + z^{2n} \leq 1 - \varepsilon$ として $\varepsilon \to +0$ の極限を考える．
体積は $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^{2n}<1-\varepsilon} 1\,dxdydz$

$$= \int_{-\sqrt[2n]{1-\varepsilon}}^{\sqrt[2n]{1-\varepsilon}} dz \iint_{x^2+y^2<1-z^{2n}-\varepsilon} 1\,dxdy$$

$\displaystyle\iint_{x^2+y^2<1-z^{2n}-\varepsilon} 1\,dxdy$ は半径 $\sqrt{1-z^{2n}-\varepsilon}$ の円の面積．

$$= 2\int_0^{\sqrt[2n]{1-\varepsilon}} (1 - z^{2n} - \varepsilon)\pi\,dz$$
$$= 2\pi \int \left[(1-\varepsilon)z - \frac{1}{2n+1}z^{2n+1}\right]_0^{\sqrt[2n]{1-\varepsilon}}$$
$$= 2\pi\left(\sqrt[2n]{1-\varepsilon}\,\frac{2n+(2n+2)\varepsilon}{2n+1}\right)$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi\sqrt[2n]{1-\varepsilon}\,\frac{2n+(2n+2)\varepsilon}{2n+1} = \underline{\frac{4\pi n}{2n+1}}$$

1992 年度問 3

広義積分であるので $x^2 + y^2 \leq R$ として $R \to \infty$ の極限を考える．極座標変換して $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.
積分範囲は $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$，Jacobian は r.

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}(2+x^2+y^2)}$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r\,dr}{r(2+r^2)}$$
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}\,R} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{1+r'^2}\,dr' \quad (r' = \frac{r}{\sqrt{2}}\text{と置換})$$
$$= \sqrt{2}\,\pi\left[\tan^{-1}r'\right]_0^{\sqrt{2}\,R} = \sqrt{2}\pi\tan^{-1}(\sqrt{2}\,R)$$
$$\lim_{R\to\infty} \sqrt{2}\pi\tan^{-1}(\sqrt{2}\,R) = \underline{\frac{\sqrt{2}\pi^2}{2}}$$

問 32(2003/10/15)(教科書演習問題 83-(3) 改)

(1) $t = \cos\theta$ と置換して
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2} = \left[\tan^{-1}t\right]_{-1}^1 = \underline{\frac{\pi}{2}}$$

(2) $t = \pi - x$ と置換して
$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}(-1)\,dt$$
$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}$$
$$\therefore \quad \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \underline{\frac{\pi^2}{4}}$$

問 33(2003/10/29)

$$\int_0^1 \frac{dx}{(a+bx^4)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{(a+bx^4) - bx^4}{(a+bx^4)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{dx}{(a+bx^4)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{bx^4}{(a+bx^4)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\int_0^1 \left(-\frac{1}{2(a+bx^4)^{\frac{1}{2}}}\right)' x\,dx$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{a}\left[\frac{x}{2(a+bx^4)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dx}{2(a+bx^4)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{a}\frac{1}{2(a+b)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a}\left(1+\frac{1}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

問 34(2003/10/29)(教科書演習問題 85-(2))

(解法 1)　$s = e^{t+x}$ で置換し，$\dfrac{ds}{dt} = e^{t+x} = s$ より
$$\int_0^x e^{e^{t+x}}\,dt = \int_{e^x}^{e^{2x}} \frac{e^s}{s}\,ds$$
$$\frac{d}{dx}\left(\int_{e^x}^{e^{2x}} \frac{e^s}{s}\,ds\right) = \frac{e^{e^{2x}}}{e^{2x}}\left(2e^{2x}\right) - \frac{e^{e^x}}{e^x}\left(e^x\right)$$
$$= \underline{2e^{e^{2x}} - e^{e^x}}$$

(解法 2)　$f(u,v) = \displaystyle\int_0^u e^{e^{t+v}}\,dt$ と 2 変数関数と考え，
$u = x\,,\, v = x$ とした上で x で微分する．
$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^u e^{e^{t+v}}\,dt\right)$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}\right)\int_0^u e^{e^{t+v}}\,dt$$
$$= 1\cdot e^{e^{u+x}} + 1\cdot\int_0^u e^{e^{t+v}} e^{t+v}\,dt$$
$$= e^{e^{u+x}} + \left[e^{e^{t+v}}\right]_0^u$$
$$= e^{e^{u+x}} + e^{e^{u+v}} - e^{e^v} = \underline{2e^{e^{2x}} - e^{e^x}}$$

問 37(2003/11/12)

(解法 1)　$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$
$$= \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta \quad (x = \sin\theta\text{と置換})$$
$$= [\theta - \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{1+\frac{\pi}{2}}$$

(解法 2)　$t = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ と置換．
$x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}\,,\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{4t}{(t^2+1)^2}$ より
$$\int_1^\infty \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$$
$$= \int_1^\infty 2t\left(-\frac{1}{t^2+1}\right)'\,dt$$
$$= -\left[\frac{2t}{t^2+1}\right]_1^\infty + 2\int_1^\infty \frac{dt}{t^2+1}$$
$$= 1 + 2\left[\tan^{-1}t\right]_1^\infty = \underline{1+\frac{\pi}{2}}$$

問 44(2003/11/26)(教科書演習問題 102-(5) 改)

$$\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2}\,dxdy$$
$$= \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{x}{1+x^2+y^2}\,dy$$
$$= \int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\frac{1}{1+t^2}(\sqrt{1+x^2})\,dt \quad (y = t\sqrt{1+x^2})$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)dx\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$
$$= \left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 \cdot \left[\tan^{-1}t\right]_0^1 = \underline{\frac{\pi}{4}(\sqrt{2}-1)}$$

問 45(2003/12/10)(教科書演習問題 104)

定義より $x \geq 0$ に対し
$$\Big((f*g)*h\Big)(x)$$
$$= \int_0^x (f*g)(t)\,h(x-t)\,dt$$
$$= \int_0^x \left(\int_0^t f(s)\,g(t-s)\,ds\right)h(x-t)\,dt$$
$$= \int_0^x \left(\int_s^x f(s)\,g(t-s)\,h(x-t)\,dt\right)ds \quad (\text{順序交換})$$
$$= \int_0^x f(s)\left(\int_s^x g(t-s)\,h(x-t)\,dt\right)ds$$
$$= \int_0^x f(s)\left(\int_0^{x-s} g(\xi)\,h(x-s-\xi)\,d\xi\right)ds \quad (\xi = t-s)$$
$$= \int_0^x f(s)\,(g*h)(x-s)\,ds$$
$$= \Big(f*(g*h)\Big)(x)$$

問 46(2003/12/10)

$$\iiint_D z\,dxdydz$$
$$= \int_0^1 dx\int_0^{x^2} dy\int_0^{x-y} z\,dz$$
$$= \int_0^1 dx\int_0^{x^2} dy\left(\frac{1}{2}(x-y)^2\right)$$
$$= \int_0^1 dx\left[-\frac{1}{6}(x-y)^3\right]_0^{x^2}$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^1 dx\left(-(x-x^2)^3 + x^3\right)$$
$$= \frac{1}{6}\left[x^6 - 3x^5 + 3x^4\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{7} - \frac{3}{6} + \frac{3}{5}\right) = \underline{\frac{17}{420}}$$

問 47(2003/12/10)

体積は $\displaystyle\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+z\leq 1} 1\,dxdydz$
$$= \int_0^1 dx\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy\int_0^{1-\sqrt{x}-\sqrt{y}} 1\,dz$$
$$= \int_0^1 dx\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy\,(1-\sqrt{x}-\sqrt{y})$$
$$= \int_0^1 dx\left[(1-\sqrt{x})y - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{(1-\sqrt{x})^2}$$
$$= \int_0^1 dx\left(\frac{1}{3}(1-\sqrt{x})^3\right)$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (1-t)^3(2t)\,dt \quad (\sqrt{x} = t\text{ と置換})$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left((1-t)^3 - (1-t)^4\right)\,dt$$
$$= \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{4}(1-t)^4 + \frac{1}{5}(1-t)^5\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \underline{\frac{1}{30}}$$

問 49(2004/01/14)

(1) $\displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = \int_0^{b(x)} f(t)\,dt - \int_0^{a(x)} f(t)\,dt$

ここで合成関数の微分公式より

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{b(x)} f(t)\,dt\right) = f\big(b(x)\big)b'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{a(x)} f(t)\,dt\right) = f\big(a(x)\big)a'(x)$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

(2) $\displaystyle f(x) = \int_x^{x+1}\left\{\int_x^y e^{z^2}\,dz\right\}dy$

$$= \int_x^{x+1} dz \int_z^{x+1} e^{z^2}\,dy \quad \text{(順序交換)}$$

$$= \int_x^{x+1} dz\,\left((x+1-z)e^{z^2}\right)$$

$$= (x+1)\int_x^{x+1} e^{z^2}\,dz - \int_x^{x+1} ze^{z^2}\,dz$$

$$f'(x) = \int_x^{x+1} e^{z^2}\,dz + (x+1)\left(e^{(x+1)^2} - e^{x^2}\right)$$

$$-\left((x+1)e^{(x+1)^2} - xe^{x^2}\right) = \int_x^{x+1} e^{z^2}\,dz - e^{x^2}$$

$$f''(x) = (x+1)e^{(x+1)^2} - xe^{x^2} - 2xe^{x^2}$$

$$= \underline{e^{(x+1)^2} - (2x+1)e^{x^2}}$$

問 51(2004/01/14)(教科書演習問題 108)

$u = ax+by,\ v = -bx+ay$ と変数変換する.

$a^2+b^2=1$ より $x = au-bv$, $y = bu+av$, $x^2+y^2 = u^2+v^2$

Jacobian は $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2+b^2 = 1$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by)\,dxdy = \iint_{u^2+v^2\le 1} f(u)\,dudv$$

$$= \int_{-1}^1 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u)\,dv = 2\int_{-1}^1 f(u)\sqrt{1-u^2}\,du$$

問 52(2004/01/14)

$$\iiint_D x^2 z\,dxdydz$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 x^2 z\,dz$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy\,\left[\frac{1}{2}x^2z^2\right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^1$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 1} x^2\left(1-(x^2+y^2)\right)\,dxdy$$

極座標変換して $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

積分範囲は $0\le r\le 1$, $0\le\theta\le 2\pi$, Jacobian は r.

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^1(1-r^2)r^3\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\int_0^1(r^3-r^5)\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\theta\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{6}r^6\right]_0^1 = \underline{\frac{\pi}{24}}$$

問 45'(2005/12/14)

積分範囲は $D = \big\{(x,y)\ \big|\ -1\le x\le 1\,,\ x^3\le y\le 2-x\big\}$ より,

$$\iint_D xy\,dxdy$$

$$= \int_{-1}^1 dx\int_{x^3}^{2-x} xy\,dy$$

$$= \int_{-1}^1 dx\,\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{x^3}^{2-x}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (x(2-x)^2 - x^7)\,dx$$

$$= \int_0^1 -4x^2\,dx = \underline{-\frac{4}{3}}$$

問 52'(2006/01/11)(教科書演習問題 107-(5))

$D = \big\{(x,y,z)\ \big|\ x^2+y^2+z^2\le 4, x\ge 0\big\}$ とするとき次の積分の値を求めよ.

$$\iiint_D xe^{-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 4} dxdy\int_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} xe^{-x^2-y^2-z^2}\,dx$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 4} dxdy\,\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2-y^2-z^2}\right]_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$$

$$-\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 4}(e^{-4} - e^{-(x^2+y^2)})\,dxdy$$

極座標変換して $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

積分範囲は $0\le r\le 2$, $0\le\theta\le 2\pi$, Jacobian は r.

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 (e^{-4} - e^{-r^2})r\,dr$$

$$= -\pi\int_0^2 (re^{-4} - re^{-r^2})\,dr$$

$$= -\pi\left[\frac{1}{2}r^2e^{-4} + \frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^2 = \underline{\frac{\pi}{2}(1-5e^{-4})}$$

教科書演習問題 103-(1)

$$\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le 1} 1\,dxdydz$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy\int_0^{(1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} 1\,dz$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy\,(1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$$

$$= \int_0^1 dx\,\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{4}{3}(1-\sqrt{x})y^{\frac{3}{2}} + (1-\sqrt{x})y\right]_0^{(1-\sqrt{x})^2}$$

$$= \int_0^1 dx\,\left(\frac{1}{6}(1-\sqrt{x})^4\right)$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 2t(1-t)^4\,dt \quad (\sqrt{x} = t \text{ と置換})$$

$$= frac13\left[-\frac{1}{5}(1-t)^5 + \frac{1}{6}(1-t)^6\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{90}}$$

問５：級数

2005 年度問 5

べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)(x+1)^n$ が収束するための実数 x の条件を求めよ．

2004 年度問 5

べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2^n+n)(x-1)^n$ が収束するための実数 x の条件を求めよ．

2003 年度問 5(教科書演習問題 134 改)

べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-2)^n$ が収束するような実数 x の上限を求めよ．

2002 年度問 5

べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-1)^n$ が収束するための実数 x の条件を求めよ．

2001 年度問 5(教科書演習問題 133 改)

べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}(x-3)^n$ が収束するための実数 x の条件を求めよ．

1992 年度問 5(教科書演習問題 133)

べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}(x-1)^n$ が収束する x の範囲を求めよ．

演習問題：級数編

(教科書演習問題 135)

$n=0,1,2\ldots$ に対し

$$g_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!(n+k)!}$$

と定義する．次の問に答えよ．

(1)　$g_n(x)$ は全ての実数 x に対して収束することを示せ．

(2)　$g_n(x)$ が微分可能であることを簡潔に示し，$g'_n(x)$ を $g_{n+1}(x)$ で表せ．

補足：テイラー展開 (前期)

級数の問題ですから使うことになる **かもしれない** ので書いておきます．[*1]

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots && (-\infty<x<\infty)\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots && (-\infty<x<\infty)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots && (-\infty<x<\infty)\\
\log(1+x) &= x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+\cdots && (-1<x\le 1)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}+\cdots && (-1<x<1:\forall\alpha)\\
& && (-\infty<x<\infty:\alpha\text{ は自然数})
\end{aligned}
$$

[*1] 5 つ目は，さらに $x=1$ は $\alpha>-1$ なら可，$x=-1$ は $\alpha>0$ なら可ですが，そこまではいくらなんでも出ないでしょう．

2005年度問5

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2} \leq 1+\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{(n-1)\cdot n} = 1+\sum_{n=2}^{k}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$= 1+\left(1-\frac{1}{k}\right) \leq 2$$
よって $^\forall n$ に対し $1 \leq \left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) \leq 2$[*2]

以下 $b_n = \left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)(x+1)^n$ とすると

$x \leq -2, 0 \leq x$ の場合
$|b_n| \geq 1\cdot 1^n = 1$ より $\lim_{n\to\infty} b_n$ は0に収束しない．ゆえに級数は発散．

$-2<x<0$ の場合
$S_n = |b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|$，$r=x+1$ として，$|r|<1$ より
$S_n < 2|r|+2|r|^2+\cdots 2|r|^n < 2\dfrac{|r|}{1-|r|}$
よって単調増加数列 S_n は上に有界であるので収束する．
したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は絶対収束する．ゆえに級数は収束．

∴　べき級数が収束 ⇔ $-2<x<0$

2004年度問5

$a_n = (2^n+n)$ として
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n}{2^{n+1}+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n}{2^n}}{2+\frac{n+1}{2^n}} = \frac{1}{2}$$
$\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$ では $|x-1|<\frac{1}{2}$．ゆえに級数は収束．
$x<\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}<x$ では $|x-1|>\frac{1}{2}$．ゆえに級数は発散．

$x=\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}$ の場合
$b_n = (2^n+n)(x-1)^n$ とすると，この場合 $b_n = \pm\left(1+\dfrac{n}{2^n}\right)$
$\lim_{n\to\infty} b_n = \pm 1$ と，0に収束しない．ゆえに級数は発散．

∴　級数が収束 ⇔ $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$

2003年度問5

$a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ として
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4$$
$-2<x<6$ では $|x-2|<4$．ゆえに級数は収束．
$x<-2, 6<x$ では $|x-2|>4$．ゆえに級数は発散．

∴　べき級数が収束する x の上限は6

[*2] 前期を思い出しましょう．

2002年度問5

$a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ として
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n+1^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$ [*3]
$1-e<x<1+e$ では $|x-1|<e$．ゆえに級数は収束．
$x<1-e, 1+e<x$ では $|x-1|>e$．ゆえに級数は発散．

$x = 1\pm e$ の場合
$b_n = \dfrac{n^n}{n!}(x-1)$ とすると，この場合 $|b_{n+1}| = \dfrac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}|b_n|$
ここで
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}$$
$$= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}$$
$$= 1+\sum_{k=1}^{n}(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!}$$ [*4]
より $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ は n に対する単調増加数列．[*5][*6]

よって $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ より
$|b_{n+1}| \geq |b_n|$ となり，$|b_n| \geq |b_1| = e$ となる．
よって $\lim_{n\to\infty} b_n$ は0に収束しない．ゆえに級数は発散．

∴　べき級数が収束 ⇔ $1-e<x<1+e$

2001年度問5

$a_n = \dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$ として
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1} = 2$$
$1<x<5$ では $|x-3|<2$．ゆえに級数は収束．
$x<1, 5<x$ では $|x-3|>2$ より級数は発散．

$x=1,5$ の場合
$b_n = \dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}(x-3)^n$ とすると
この場合 $b_n = \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} > 1$
よって $\lim_{n\to\infty} b_n$ は0に収束しない．ゆえに級数は発散．

∴　べき級数が収束 ⇔ $1<x<5$

[*3] e の定義は $(1+\frac{1}{n})^n$ での $n\to\infty$ の極限です．
[*4] ここで $k! \geq 2^{k-1}$ を使うことで $(1+\frac{1}{n})^n \leq 1+\sum_{k=1}\frac{1}{2^{k-1}} = 3$ より上に有界であることが示される．それと以下に示されている単調増加性より極限値 e の存在が証明される．
[*5] 前期の授業で習いました．
[*6] 各 k に対して，n が大きくなれば $\sum$ の中身が大きくなる．さらに n が大きくなれば $\sum$ で足す項の数が増える．

1992 年度問 5

（2001 年度と同様にして）
べき級数が収束 $\Leftrightarrow$ $-1 < x < 3$

教科書演習問題 135

(1) $a_k = (-1)^k \dfrac{x^k}{k!(n+k)!}$ として

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{x}{(k+1)(n+k+1)}$$

よって ${}^{\forall}x$ に対して $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0$ より級数は収束.

(2) $g_n'(x) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g_n'(x+h) - g_n'(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x+h)^k - x^k}{k!(n+k)!}$$

分子の $(x+h)^k - x^k = khx^{k-1} + \dfrac{k(k-1)}{2}h^2x^{k-2} + \dots$
は $h \to 0$ で khx^{k-1} のみが残り[*7]

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k-1}hk}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k-1}k}{k!(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)(-1)^{k-1}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!\big((k-1)+(n+1)\big)!}$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!(k+n+1)!} = -g_{n+1}(x)$$

[*7] h が 2 乗以上のものは無視できるということですが…厳密さに欠けますね．おまけなので大目に見てください.