2011 年度数学2期末試験解答例

[1] 計算は略しますが、固有値は 6,-2,-3 の 3 つ。それぞれに対応する固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

これらを長さ 1 に直して横に書き並べた行列 $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ は直交行列になっている(証明は読者の練習問題とする。)

これを用いて対角化を行うと、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}$となる。∎

[2] ⑴ 若干感覚的ですが、W_1は$(px+q)(x^2+2x+4)$という線形結合で表せる多項式の集合なので 2 次元でしょう。ということは線形独立な要素を 2 つ見つければ OK です。

$\langle x^3+2x^2+4x, x^2+2x+4\rangle$が一例として挙げられます。

⑵ 同様に$p(x^3+x^2+2x)+q$という形で表せるので 2 次元だと予想できます。解答例としては$\langle x^3+x^2+2x, 1\rangle$が適当かと。

⑶ $\mathrm{W}_1\cap\mathrm{W}_2$の任意の要素は$(px+q)(x^2+2x+4)=p'(x^3+x^2+2x)+q'$という形で表せるので、これを$x$の恒等式とみなして係数比較してやると$p=p'=-q, q'=-4p$というふうに文字消去ができ、結局基底は$\langle x^3+x^2+2x-4\rangle$となります。

⑷ 公式より、$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)=3$ ∎

[3] 行列Aの転置行列をA^{T}、エルミート内積を$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$と表すことにする。

$A=-A^T$が成り立つとき、

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&=(A\boldsymbol{x})^T\overline{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{x}^TA^T\overline{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{x}^T\overline{A^T\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{x}^T(\overline{-A\boldsymbol{y}})\\&=-(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

が一般に成り立つ。($\because A$が実行列なので$A=\bar{A}$)

ここで、Aの固有値をα, 固有ベクトルを$\boldsymbol{v}$とすると、$A\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{v}$である。($\alpha\in\mathbb{C}$)

また先ほどの式より$(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=-(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x})$が成り立つが、両辺をそれぞれ変形していくと

$$(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$$

$$-(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x})=-(\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{x})=-\bar{\alpha}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$$

となるので、$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$より、$\alpha=-\bar{\alpha}$となる。

したがって、$\alpha \in \mathbb{C}$に注意して、αの実部は 0 であることが示せた。∎
（補足：通常のユークリッド内積でなくエルミート内積を持ち出したのは、固有ベクトルが複素ベクトルになることを考慮してのことです。）

［4］ マルコフ過程は出題しないそうなので略。

作成者：T.Togo

For Dear Lovers & Tears & Yφu（今まで愛してくれた全ての貴方に）