2009年度数学2期末試験解答例

[1]

拡大係数行列を使うなりなんなりして頑張ると、$(x,y,z,w)=(-\frac{k}{5},-\frac{2k}{5},-\frac{3k}{5},-\frac{4k}{5})$が導ける。これらが整数となる条件は$k$が5の倍数であることであり、この時の解は上のとおり。

[2]

⑴ 4変数1次同次多項式を$f_{(x,y,z,w)}=px+qy+rz+sw(p,q,r,s\in\mathbb{R})$とおく。$(x,y,z,w)=(a,0,0,0)$を代入すると条件より任意の$a$に対し$pa=sa$が成り立つ。

$$\therefore p=s$$

同様にして$p=q=r=s$が示せるので、$f_{(x,y,z,w)}=p(x+y+z+w)$
よって、これを線形空間とみなした時の基底は$\langle x+y+z+w\rangle$
⑵ $f_{(x,y,z,w)}=p_1x^2+p_2y^2+p_3z^2+p_4w^2+p_5xy+p_6yz+p_7zw+p_8wx+p_9xz+p_{10}yw$
とおいて、$(x,y,z,w)=(a,0,0,0),(a,a,0,0),(a,0,a,0)$などを代入していくと$p_1=p_2=p_3=p_4,p_5=p_6=p_7=p_8,p_9=p_{10}$が示せる。
$f_{(x,y,z,w)}=p(x^2+y^2+z^2+w^2)+q(xy+yz+zw+wx)+r(xz+yw)$とすると条件が成り立つ。よって十分。したがって、基底の例としては$\langle x^2+y^2+z^2+w^2,xy+yz+zw+wx,xz+yw\rangle$が挙げられ、次元は3。
⑶2次の場合を参考に、1,2,4項で1要素をなすものに場合分けすればいいような気がします。ヒントはnが奇数の場合4項1組にしかならないという意味…かな？一応下のような答えが出たので参考程度に。

$$\begin{cases} n\text{が奇数} & :\frac{1}{4}\times\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} \\ n\text{が偶数かつ4で割り切れない} & :\frac{1}{4}\times\left(\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}+\frac{(n+2)}{2}\right) \\ n\text{が4の倍数} & :\frac{1}{4}\times\left(\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}+\frac{n}{2}+3\right) \end{cases}$$

解けたって方はこれに一致してもしなくてもご一報いただけるとわりと助かります。

[3]

マルコフ過程は出題範囲外なので略。

[4]

(1)略。「二葉双曲面」でググればいいと思います。そこ、投げやりとか言わない。

(2)3 次元曲面に接するのは平面だから 2 次元と考えるにせよ 3 変数で直交という縛りがあるから自由度は 2 と考えるにせよあるいはもっと機械的にやるにせよ、とにかく$\begin{pmatrix}-a\\-b\\c\end{pmatrix}$と直交する線形独立な 2 ベクトルを見つけてください。解答例としては$\left\langle\begin{pmatrix}b\\-a\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\0\\a\end{pmatrix}\right\rangle$など。

(3)授業でやりましたが、計量とは内積を一般化したものだと思っておけばいいです。性質は以下の 3 つ。

1.) 多重線形性$(multi\ linearity)$: 各成分に関して線形性が成り立つ

2.) 対称性$(symmetry)$: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$

3.) 正値性$(positivity)$: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geq 0$(等号成立条件は$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$)

今回は 3 つめの「正値性」がネックになってくるので、$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$のように自身とローレンツ内積をとって答えが負になるベクトルを反例として一つ挙げれば証明終了です。

(4)多重線形性、対称性に関しては一般の$\mathbb{R}^3$において容易に示せるのでここでは省略してT_pHにおける正値性のみ証明します。

(解)

任意の$\boldsymbol{v}\in T_pH$について$\boldsymbol{v}=p\begin{pmatrix}b\\-a\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}c\\0\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}pb+qc\\-pa\\qa\end{pmatrix}$ $(p,q\in\mathbb{R})$と表せる。

ここで、$a^2+b^2-c^2=-1$に注意して、

$$L(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=(pb+qc)^2+(-pa)^2-(qa)^2=2pqbc+p^2(b^2+a^2)+q^2(c^2-a^2)$$

$$=2pqbc+\frac{p^2}{a^2+1}\{(b^2+a^2)+a^2(c^2-1)\}+\frac{q^2}{a^2+1}\{(c^2-a^2)+a^2(b^2+1)\}$$

$$=\frac{1}{a^2+1}\{(pb+qc)^2+a^2(pc+qb)^2\}\geq 0$$

よって、正値性が示せたので、Lが線形空間T_pHの計量であることが示せた。∎

作成者：T.Togo

For Dear Lovers & Tears & Yϕu（今まで愛してくれた全ての貴方に）