電磁気学シケプリ

2012年度理Ⅰ14組

作成 ： やすひろ

このシケプリについて

このシケプリは 2012 年度に作成しました。
基本的には 2008 年度～2011 年度の過去問の解説ですが、大問ごとにちょっとしたまとめをつけています。

このシケプリは相当時間かけて作ったんで
　　　　せっかくやしこのシケプリが後輩たちの役に立てばなぁ～
とか
　　　　今後の後輩たちがこのシケプリを使ってくれれば嬉しいなぁ～
とか
いろいろ思ってます。

以降は作った時に分かった間違い以外は編集加えてないんでミスとかあるかもしれません。
シケプリ作成者の変なテンションについていけないかもしれません。

でもまあ少しは役に立てると信じて

— 目次 —

数学的基本事項の確認

以降過去問をベースに授業でやったことをおさらいしていきますが、ここではひとまず電磁気から離れて(いきなりかい！)数学的基本事項を確認しときます。

１.微分演算子

$$\text{ベクトル演算子 ナブラ：}\boldsymbol{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

あるスカラー関数 T に対して、勾配(gradient)が定義できる。

$$\mathrm{gradT} \equiv \boldsymbol{\nabla}\mathrm{T} = \left(\frac{\partial T}{\partial x},\frac{\partial T}{\partial y},\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

あるベクトル関数$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$に対して、わきだし(divergence)と回転(rotation)が定義できる。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x},\frac{\partial A_y}{\partial y},\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = (\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})$$

$$\text{スカラー演算子 ラプラシアン：}\Delta\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ここで、∇とΔと関係を見てみると、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathrm{T} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial x},\frac{\partial T}{\partial y},\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \Delta\mathrm{T}$$

$$\therefore \Delta = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{2}}$$

そこでいくつかの公式を見てみましょう！

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\mathrm{T} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})$$

たまに使うんで覚えといてください。

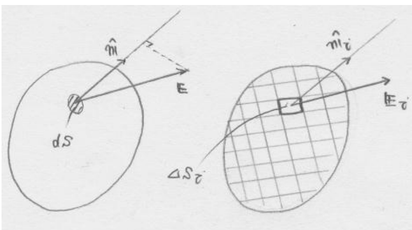
２.ベクトルの積分

面 S を貫くベクトル場$\boldsymbol{E}$の面積積分(フラックス)は以下のように定義される。

$\boldsymbol{S}$を面 S に垂直なベクトルとしたとき

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n})dS = \int_S E_n\, dS = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} E_{n_i}\,\Delta S_i$$

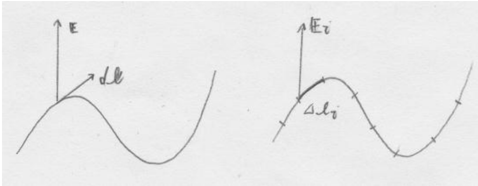
($\boldsymbol{n}$: Sに垂直な単位ベクトル, E_n: $\boldsymbol{E}$の$\boldsymbol{n}$方向成分)



経路 C に沿ったベクトル場$\boldsymbol{E}$の線積分は以下のように定義される。
$\boldsymbol{l}$を経路の方向を表すベクトルとしたとき

$$\int_{\text{経路 C}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E_i}\cdot \Delta\boldsymbol{l_i} = \int_C E_l\, dl = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} E_{l_i}\,\Delta l_i$$

$\left(E_l{:}\ \boldsymbol{E}\text{の}\boldsymbol{l}\text{方向成分}\right)$



３．定理

定理１

$$f(\boldsymbol{r}_B) - f(\boldsymbol{r}_A) = \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \nabla f\cdot d\boldsymbol{l}$$

定理２　ガウスの定理

$$\int_{\text{閉曲面}S} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\text{閉曲面}S\text{の内部}} \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV$$

定理３　ストークスの定理

$$\oint_{\text{ループ}C} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\text{ループ}C\text{の内部}} (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}$$

ひとまずこんなもんで！
てか大学入ってからどの教科も数学っぽくなって嫌ですよね～ほんと
そのうちチャイ語でも数式が出てくるんちゃうかってひやひやしてましたよ～

数学好きの方には申し訳ないですけどね
数学ばっかはほんとにつらい！！
何がつらいって Word で数式打ち込むのはほんと苦行！！

ではでは本格的に問題を解いてみましょう！！

まずは 2008 年度の問題に挑戦！！

2008年度

では頑張っていきましょう！！
問題にたどり着くまでに長々と前置きしてますが大事なことなんでぜひ読んでください！！
マックスウェル方程式は特にね

［第1問］

マックスウェル方程式に関する設問　毎年出題されています。

ここは取りたい！(特にレポート提出完了してない人！！)

まずマックスウェル方程式とは何か？

マックスウェルはそれまでに明らかになっていた電磁気に関する物理法則を4つの式にまとめました。

＊ 静電磁気学のマックスウェル方程式 ＊

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=0 \qquad (2)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad (3)$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\boldsymbol{j} \qquad (4)$$

ρ: 電荷密度(単位体積当たりの電荷), ε_0: 真空の誘電率, μ_0: 真空の透磁率,

$\boldsymbol{j}$: 電流密度(単位面積を通過する電流)

それでは上式の物理的意味を考えていきましょう。

(1)両辺の体積積分をとると

$$\int_{\text{閉曲面 S の内部}}\nabla\cdot\boldsymbol{E}dV=\int_{\text{閉曲面 S の内部}}\frac{\rho}{\varepsilon_0}dV$$

またガウスの定理より

$$\int_{\text{閉曲面 S}}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{\text{閉曲面 S の内部}}\nabla\cdot\boldsymbol{E}dV$$

よってこれら２式から

$$\int_{\text{閉曲面 S}}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\text{閉曲面 S の内部}}\rho dV$$

これはまさしく

任意の閉曲面Sを外向きに出る電場Eのフラックスの和は

閉曲面S内の電荷の総和を真空の誘電率ε_0で割ったものに等しい

という**ガウスの法則**です。

(2)両辺の面積積分をとると

$$\int_{\text{ループ C の内部}}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{\text{ループ C の内部}}\mathbf{0}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

またストークスの定理より

$$\oint_{\text{ループ C}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\text{ループ C の内部}} (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})\cdot d\boldsymbol{S}$$

よってこれら２式から

$$\oint_{\text{ループ C}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

したがって

$$\oint_{\text{ループ C}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\text{経路 A→B→A}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\text{経路 A→B}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} - \int_{\text{別経路 A→B}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

つまり、**電場の線積分は経路によらない**ということです。

(3)これは少し概念的に考えましょう。

$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ というのはつまり**Bのわきだしがない**ということ

これはつまり**B**を生み出す**磁荷がない**ということ(**E**にとっての ρ がないということ)

さらに磁力線を考えれば、**ループになっている**か**∞から来て∞へと出ていく**かのどちらか

(4)両辺の面積積分をとると

$$\int_{\text{ループ C の内部}} (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\text{ループ C の内部}} \mu_0\mathbf{j}\cdot d\boldsymbol{S}$$

またストークスの定理より

$$\oint_{\text{ループ C}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\text{ループ C の内部}} (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S}$$

よってこれら２式から

$$\oint_{\text{ループ C}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0\int_{\text{ループ C の内部}} \mathbf{j}\cdot d\boldsymbol{S}$$

これはまさしく

ある閉じたループをなす磁場**B**の線積分は

そのループを貫く全電流にμ_0をかけたものに等しい

という**アンペールの法則**です。

＊ 一般のマックスウェル方程式 ＊

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} \qquad (4)$$

では、時間に依存する一般の場合のマックスウェル方程式はどんな物理的意味を持っているか？

(1)は先程と同様ガウスの法則です。

(2)両辺の面積積分をとると

$$\int_{\text{ループ C の内部}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{ループ C の内部}} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$$

またストークスの定理より

$$\oint_{\text{ループ}C} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\text{ループ C の内部}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

よってこれら２式から

$$\oint_{\text{ループ}C} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{ループ C の内部}} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$$

つまり、誘導起電力をV_{emf},磁束をΦとすると

$$V_{emf} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi$$

これはまさしく

あるループを貫く磁束のフラックスの変化によって誘導起電力が生じる

という**ファラデーの電磁誘導の法則**です。

(3)は先程と同様「磁荷がない」ということです。

(4)両辺の$\boldsymbol{\nabla}$をとると

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) = \mu_0 (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E})$$

公式より

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

マックスウェル方程式より

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

以上３式から

$$\mu_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\therefore \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho$$

これはいわゆる**電荷保存則**です。もちろんこの式のままで電荷保存則なんですが、

分かりやすくするためには、両辺の体積積分をとると

$$\int_{閉曲面\mathrm{S}の内部} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}dV = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{閉曲面\mathrm{S}の内部} \rho dV$$

ガウスの定理より

$$\int_{閉曲面\mathrm{S}の内部} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}dV = \int_{閉曲面\mathrm{S}} \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}$$

これら２式から

$$\int_{閉曲面\mathrm{S}} \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{閉曲面\mathrm{S}の内部} \rho dV$$

$\boldsymbol{j}$は電流密度(単位面積を通過する電流)で、ρは電荷密度(単位体積当たりの電荷)なので

電荷の時間変化は、流れる電流の大きさに等しい

という**電荷保存則**になってますよね。

というかむしろこの電荷保存則から静電磁気学におけるマックスウェル方程式がおかしいと考えられました。

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\boldsymbol{j}$$

の両辺に$\boldsymbol{\nabla}$をとると

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0$$

が常に成立することになるわけですが、んなこたぁないはず！！　逆に電荷保存則から

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}) = -\varepsilon_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}$$

$$\therefore \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}\right) = 0$$

つまり$\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}$のタームが必要であろうとマックスウェルさんは思ったわけです。

＊ 真空中($\rho = 0, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$)でののマックスウェル方程式 ＊

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 0 \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} \qquad (4)$$

ある法則が導かれれば、その最も簡単なケースを考えるというのが常套手段です。
そこで真空中のマックスウェル方程式について考察しましょう。
今回は(4)式に着目します。

両辺を時間微分して、整理し、(2)式、公式、(1)式の順に適用すると

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}=\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times(-\boldsymbol{\nabla}\times\mathrm{E})=-\{\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E})-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E}\}=\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{E}$$

$$\therefore\left(\boldsymbol{\nabla}^2-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$$

(1)式、(2)式を使って同じような作業をしてやると

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$$

も得られます。ここでもし電場や磁場が波であるとして、x成分についての波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f(x,t)=0$$

の$f(x,t)$に適当な波の式、たとえば$f(x,t)=\mathrm{A}\sin\left\{\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}$を代入してみると

$$-\mathrm{A}\frac{\omega^2}{v^2}\sin\left\{\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}+\mu_0\varepsilon_0 A\omega^2\sin\left\{\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}=0$$

整理すると

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

と矛盾なくことが進んだわけです。しかもμ_0,ε_0は定数で計算すると$v\cong 3\times 10^8\cong c$(光速)

以上から

- 真空中には電磁波が存在する
- その速さはほぼ光速と一致する

$\Rightarrow$ 光は電磁波、電磁波は光

という結論が導かれるわけです。以下、電磁波の特徴について考えます。

実際に$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E_0}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$を代入すると

$$\omega=ck\left(k=|\boldsymbol{k}|=\frac{2\pi}{\lambda},\hat{\boldsymbol{k}}\text{: 波の進む方向 とする}\right)$$

が得られる。この関係式を分散関係式という。

詳しくはよくわかりません。遠慮なくググってください！！

次に証明は省略しますが、

$$\boldsymbol{B}\perp\hat{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{E}\perp\hat{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{E}$$

で、電磁波は横波、偏光性があるなども分かります。

とまぁながながとやってきましたけど、最低限証明はできなくても**どの式が何を意味しているのか**を覚えてください！！

もちろん証明も出るんで、証明できるに越したことはありません。

では、お手元にある実際の問題を見てみましょう！

＜解答＞

1)もう余裕ですよね

(1)ガウスの法則　(2)ファラデーの電磁誘導の法則　(3)磁荷はない　(4)アンペールの法則です。

2)要するに、一般のマックスウェル方程式の形にしてあれを説明しましょう！

(4)式の右辺に$+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}$という項を付加する必要があった。

また、付加した結果、電荷保存則が説明できるようになった。

さらには、真空中には光とほぼ同じ速さを持つ電磁波が存在し、光の正体が電磁波であることも分かった。

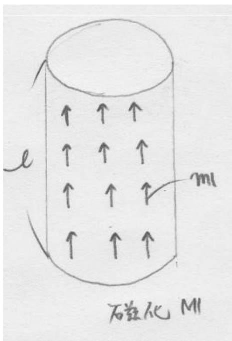
[第２問]

磁性体に関する設問　ちらほら出てますんで頑張りましょう！！

とりあえず問題を解くことを目標に行きましょう！

磁性体：単位体積あたりの磁化$\mathbf{M}$をもつもの

さらに公式



$$\mathbf{M} = \mathrm{N}\mathbf{m} \quad \left(\mathbf{M}\text{: 磁化}, \mathrm{N}\text{: 双極子の密度}, \mathbf{m}\text{: 磁気双極子}\right)$$

磁気双極子はＮ極Ｓ極の小さな棒みたいなもんだと思ってください。

しかしこのままでは磁場を求めることはできない･･･

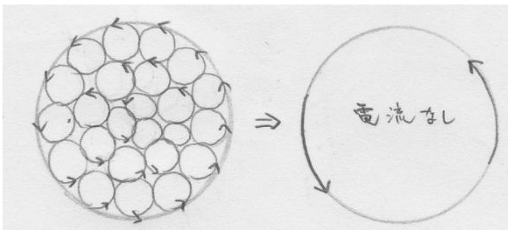
そこでこの磁化の元となっているのは電流だと想定します。

すると磁気双極子１本１本の周りに電流 が流れているべき！

その様子を上から見たのが右下の図

でもなんか円柱の内側の電流は打ち消しあいそうな気がしますよね～

よってその横の図のように書き換えられます。



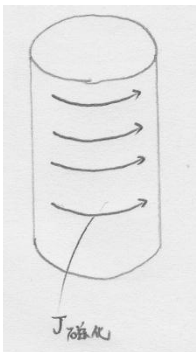
これを立体的に見たのが下の図！！

そこで側面を流れる電流を磁化電流といい、

その単位長さあたりの大きさ$J_{\text{磁化}}$,全電流Ｉは

$$J_{\text{磁化}} = M, \qquad \mathrm{I} = \ J_{\text{磁化}}l$$

$$\begin{pmatrix} Ml = Nml = N\cdot i \times (\text{電流}i\text{が作るループの面積})\cdot l \\ = i \times \text{磁気双極子の数} = \text{全電流} = J_{\text{磁化}}l \end{pmatrix}$$



というわけで仮想的な電流が想定できましたんで

問題に取り掛かりましょう！！

< 解答 >
磁化電流を考える。磁化電流の面電流密度をJ, 単位体積当たりの磁化を$\boldsymbol{M}$とすると

$$J = M = nm$$

$d \ll a$ なので、側面を流れる電流は１本の円形電流とみなせる。その電流の大きさをI とすると

$$I = J \cdot d = nmd$$

よって、その中心に発生する磁場の大きさは

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} = \frac{\mu_0 nmd}{2a}$$

※円形電流の作る磁場

ビオサバールの法則を考えます。ビオサバールの法則とは

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\boldsymbol{l} \times \widehat{\boldsymbol{R}}}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{j} \times \widehat{\boldsymbol{R}}}{R^2} dV$$

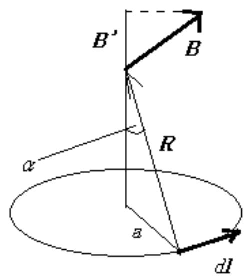
というものです。

証明はめんどくさいんで省略

ノートにはあった気がします。

実はアンペールの法則もここから導けますが、これも省略

これを円形電流の中心軸上に適用すると



$$d\boldsymbol{B}' = d\boldsymbol{B} \sin\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{R^2} \sin\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{a}{R^3} dl$$

$$\therefore \boldsymbol{B}' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{a}{R^3} 2\pi a = \frac{\mu_0}{2a} I sin^3 \alpha$$

さらに円のまさに中心に適用すると

$$\boldsymbol{B}' = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

大学受験の時に出てきた公式ですね。

上の設問では最後にこの公式を用いたわけです。

[第３問]

アンペールの法則に関する設問

アンペールの法則は出ますぜ～

まずアンペールの法則を思い出しましょう！

式で書くと

$$\oint_{ループ\ \mathrm{C}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_{ループ\ \mathrm{C}\ の内部} \mathbf{j}\cdot d\boldsymbol{S}$$

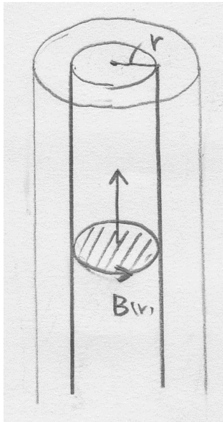
要するに

　　　　　　ある磁場のループがあって、その磁場にループの長さをかけたものは、
　　　　　　そのループを貫く全電流(フラックス)のμ_0倍である

ということです。

まあ解いてみた方が早いんでさっそく

〈解答〉



$r \le a$のとき　アンペールの法則より

$$B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0\left(I\cdot\frac{\pi r^2}{\pi a^2}\right)$$

$$\therefore B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

$r > a$のとき　アンペールの法則より

$$B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\therefore B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

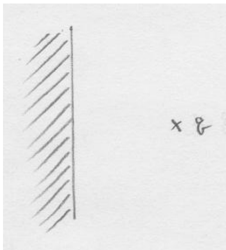
よって、

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}(r \le a) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}(r > a) \end{cases}$$　向きはどちらも中心軸の周りを電流に対して右ねじの方向

[第４問]

　鏡像法に関する設問

　これもほんま大事なとこなんででまっせ〜



まず、導体板と電荷があるという状況を想定します。

このとき導体外部の電場や電位はどうなっているのか？

さ〜どう解く！？

この時に使うのが鏡像法！！

まあ簡単に言えば鏡の位置に異符号の電荷を置けばいいわけです。

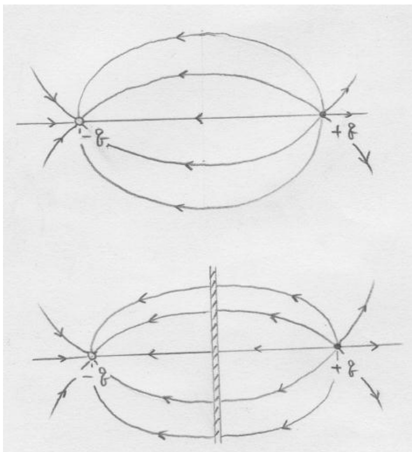
(ほんとはそんなに単純ではないですけどね　cf. ノート例題 $2-18$)

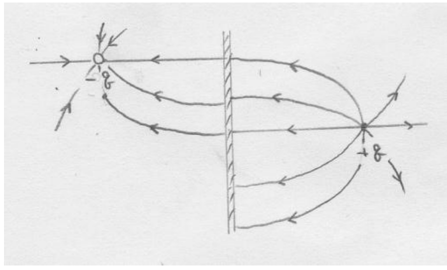
まず一番上のを見てください。まぁ普通に２つの電荷です。

この中央(φ = 一定)に無限に薄い導体板を挿入します。

しかし、導体内では$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$, φ = 一定

しかも導体板は無限に薄いので実は何の影響も及ぼしません。





じゃあ今度はさらに左側にあった電荷を動かしてみましょう！
この時思い出すべきなのが静電遮蔽！！
導体の反対側で何が起ころうが何の変化もありません。
ってことは左側がすべて導体だったりしても構わないわけです。
左側がすべて導体？それってもしかして！！
最初の図じゃないか！！？
というわけです。つまり単純に２つの電荷が対称に置いてある状況を想定して解いて、そのあとに右側の部分について考察すればいいんですね。
ここで重要なのは

導体面が等ポテンシャルになっている

ことです。
そうじゃないと導体挿入すると影響及ぼしちゃいます。
つまり鏡像法とは

導体面が等ポテンシャルとなるような電荷分布を作り出して、導体をないものとして解く

ということ、具体的には

導体面に対して対称な位置に対称な電荷(鏡像電荷)を置いて解く

ということです。
もちろんこの鏡像法の正しさは解の一意性からも議論できます。
ある電荷分布に対して、その電場や電位といった解は、一意的に定まります。
ってことは右側の状況(電荷があって、中央部は等ポテンシャル面)が変わらないような別の状況を作り出し、それで求まった答えがまさに解である。

では実際にこの問題に適用してみましょう

あっ！ちなみにガウスの法則も使います。ガウスの法則は式で書くと

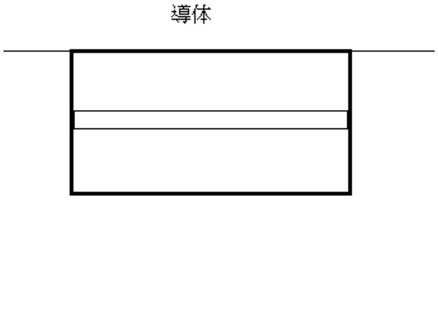
$$\int_{\text{閉曲面 S}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\text{閉曲面 S の内部}} \rho dV$$

要するに

任意の閉曲面 S を外向きに出る電場 E のフラックスの和は
閉曲面 S 内の電荷の総和を真空の誘電率ε_0で割ったものに等しい

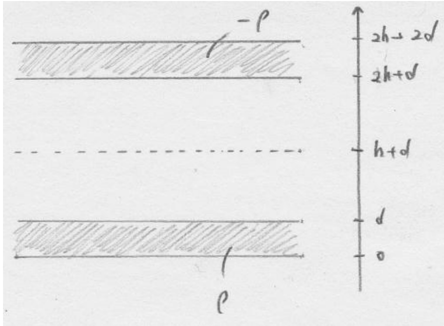
ということです。

<解答>



1)右図のような閉曲面を考える。
「導体内では電場は 0」を保つためには、
　閉曲面内で電荷の総和が 0 でなければならない。
　よって、　　　$\sigma = -\rho d$

2)右図のような鏡像電荷を考える。



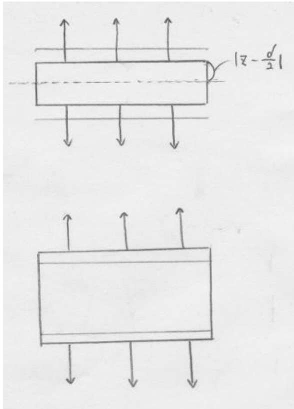
まず電荷密度ρの平板による電場について考える。

$z<0$ のとき

電場の大きさを$E_1(\mathrm{z})$とすると,ガウスの法則より

$$2L^2E_1(\mathrm{z})=\frac{\rho\cdot L^2d}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E_1(\mathrm{z})=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$



$0\le z<d$ のとき

電場の大きさを$E_2(\mathrm{z})$とすると,ガウスの法則より

$$2L^2E_2(\mathrm{z})=\frac{\rho\cdot 2\left|z-\frac{d}{2}\right|L^2}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E_2(\mathrm{z})=\frac{\rho\left|z-\frac{d}{2}\right|}{\varepsilon_0}$$

$d\le z<h+d$のとき

電場の大きさを$E_3(z)$とすると

$$E_3(z)=E_1(\mathrm{z})=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

鏡像電荷による電場はこれらに対する対称性を考えればよい。

よって、あとは向きも考慮して両電荷による電場を足し合わせればよいので

$z<0$ のとき

$$E(z)=-E_1(\mathrm{z})+E_1(\mathrm{z})=0$$

$0\le z<\frac{d}{2}$のとき

$$E(z)=-E_2(\mathrm{z})+E_1(\mathrm{z})=\frac{\rho z}{\varepsilon_0}$$

$\frac{d}{2}\le z<d$ のとき

$$E(z)=E_2(\mathrm{z})+E_1(\mathrm{z})=\frac{\rho z}{\varepsilon_0}$$

$d\le z<h+d$のとき

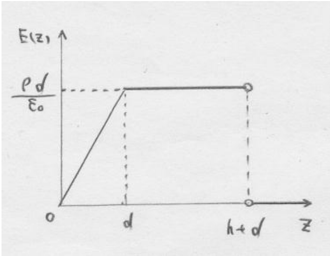
$$E(z)=E_1(\mathrm{z})+E_1(\mathrm{z})=\frac{\rho d}{\varepsilon_0}$$

$h+d<z$ のとき　導体内部では

$$E(z)=0$$

よって、

$$
E(z)=\begin{cases}0\ (z<0, h+d<z)\\ \frac{\rho z}{\varepsilon_0}\ (0\le z<d)\\ \frac{\rho d}{\varepsilon_0}\ (d\le z<h+d)\end{cases}
$$



3)電位の求め方について少し復習

ポテンシャルってのは単位電荷を基準点からそこまで運ぶのに必要な仕事なんで

$$
\varphi(\boldsymbol{r})=-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}\quad \text{あるいは}\quad \varphi(x)=-\int_{x_0}^{x}Edx
$$

です。では解きましょう！基準点は$z=0$

$z<0$ のとき

$$
V(z)=-\int_0^z E(z)\,dz=\text{一定}=V(0)=0
$$

$0\le z<d$ のとき

$$
V(z)=-\int_0^z E(z)\,dz=V(z)=-\int_0^z\frac{\rho z}{\varepsilon_0}dz=-\frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0}
$$

$d\le z<h+d$のとき

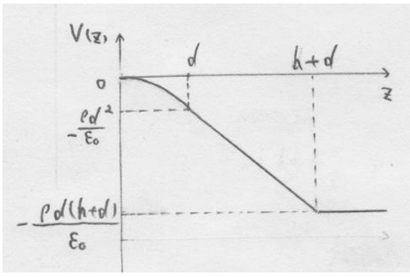
$$
V(z)=-\int_d^z E(z)\,dz\ +V(d)=-\int_d^z\frac{\rho d}{\varepsilon_0}dz\ +\left(-\frac{\rho d^2}{2\varepsilon_0}\right)=\frac{\rho d^2}{2\varepsilon_0}-\frac{\rho dz}{\varepsilon_0}=\frac{\rho d(d-2z)}{2\varepsilon_0}
$$

$h+d\le z$ のとき

$$
V(z)=-\int_{h+d}^z E(z)\,dz\ +V(h+d)=V(h+d)=-\frac{\rho d(2h+d)}{2\varepsilon_0}
$$

よって、

$$
V(z)=\begin{cases}0\ (z<0)\\ -\frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0}\ (0\le z<d)\\ \frac{\rho d(d-2z)}{2\varepsilon_0}\ (d\le z<h+d)\\ -\frac{\rho d(2h+d)}{2\varepsilon_0}\ (h+d\le z)\end{cases}
$$



4)静電エネルギーの求め方はいろいろあります。そこは後で復習するとして、ここでは

$$
U=\int\frac{\varepsilon_0}{2}|\boldsymbol{E}|^2dV
$$

を使います。

鏡像電荷とともに作り出した電場を考え、d を境に二つの区間に分けて積分します。

$$
U=\int\frac{\varepsilon_0}{2}|\boldsymbol{E}|^2dV=\int\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\rho d}{\varepsilon_0}\right)^2dV\ +\int\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\rho z}{\varepsilon_0}\right)^2L^2dz=\frac{\rho^2L^2d^2h}{2\varepsilon_0}+\frac{\rho^2L^2d^3}{6\varepsilon_0}=\frac{\rho^2L^2d^2(3h+d)}{6\varepsilon_0}
$$

5)あとは微分しましょう。

$$F = |-\frac{\partial U}{\partial d}| = \frac{\rho^2 L^2 d(2h+d)}{2\varepsilon_0}$$

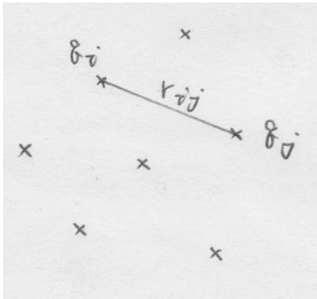
※静電エネルギーU

そもそも静電エネルギーとは何か？

静電エネルギーとは

無限遠から少しずつ電荷を持ってきて電荷分布を作るのに要する仕事

のことです。つまり



全電荷の相互エネルギーの和

ということになります。これを式で表すと

$$U = \sum_{(i,j)\text{の組}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{\text{全空間}} \frac{\rho(\boldsymbol{r_1})\rho(\boldsymbol{r_2})}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} dV_1 dV_2$$

ここで

$$\varphi(\boldsymbol{r}_1) = \int_{\text{全空間}} \frac{\rho(\boldsymbol{r_2})}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r}_2|} dV_2$$

と書けるので

$$U = \frac{1}{2}\int_{\text{全空間}} \rho(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r})dV$$

さらに$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ より

$$\rho(\boldsymbol{r}) = -\varepsilon_0 \boldsymbol{\nabla}^2\varphi(\boldsymbol{r})$$

であるから

$$U = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{全空間}} \varphi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}^2\varphi(\boldsymbol{r})dV$$

ここで

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi) = \boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi + \varphi\boldsymbol{\nabla}^2\varphi$$

なので

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\left\{\int_{\text{全空間}} \boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r})dV - \int_{\text{全空間}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\{\varphi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r})\}dV\right\}$$

いま

$$\int_{\text{全空間}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\{\varphi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r})\}dV = \lim_{R\to\infty}\int_{\text{半径 R の球面}} \varphi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

$$\left(\varphi(\boldsymbol{r})\sim\frac{1}{R}\ ,\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r})\sim\frac{1}{R^2}\ ,S\sim R^2\ \text{なので}\int_{\text{半径 R の球面}} \varphi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}\sim\frac{1}{R}\right)$$

また、$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$より

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{全空間} \nabla\varphi(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\varphi(\boldsymbol{r})dV = \int_{全空間}\frac{\varepsilon_0}{2}|\boldsymbol{E}|^2$$

とまぁこんな感じなんでざっと追っておいてください

ふ～やっと一年分終了！！
長いね～～～
でもまぁ毎年同じような範囲から出題されてるんで、次の年からは前置きを減らしていきます。

ってかマックスウェル方程式の説明が長すぎたんですよね…
でもまぁ大切なとこなんで勘弁してください。
そういやマックスウェルさんってかなり若いうちからその才能を発揮していたらしいです
ちなみに何歳の時にマックスウェル方程式完成させたか知ってますか？
32 歳とか 33 歳とかの時らしいです。
若いですよね～
いまの時代、そんな若さでそんな偉業をやってのける人はそうそういませんよ！

皆さんはどんな 30 代を迎えるんですかね？

研究の真っ最中でしょうか？
世紀の大発見をしているんでしょうか？
それともどこかの会社で活躍しているんでしょうか？

結婚してるんでしょうか？独り身でしょうか？

皆さんはどんな 30 代を迎えたいですか？

まぁまだ二十歳にすらなってないですけどね～～～～～

次は 2009 年度でっせ～　いっちょやってやりやしょう！！

2009 年度

手書きにすりゃよかったと今更ながらに後悔しているやすひろです…
シケ対とかもう嫌ですよねほんと…
でもまあ今日は補講日で学校休みやったからゆっくり寝られたんで機嫌は悪くないです！！

[第１問]

マックスウェル方程式に関する設問

またですね　しかし！この年は証明させられてる…

もう前置き十分 2008 年度のでやったんで早速

1)(1)式の両辺の体積積分をとると

$$\int_{\text{閉曲面 S の内部}} \nabla \cdot \boldsymbol{E} dV = \int_{\text{閉曲面 S の内部}} \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

またガウスの定理より

$$\int_{\text{閉曲面 S}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\text{閉曲面 S の内部}} \nabla \cdot \boldsymbol{E} dV$$

よってこれら２式から

$$\int_{\text{閉曲面 S}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\text{閉曲面 S の内部}} \rho dV$$

よってガウスの法則が導かれた。これを点電荷 Q に対して適用すると

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

点電荷Qと距離rにあるもう一つの点電荷qを考えると、その２つの電荷間に働く力の大きさFは

$$F = qE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r^2}$$

よってクーロンの法則が導かれた。

2)(4)式において、$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = 0$ とし、両辺の面積積分をとると

$$\int_{\text{ループ C の内部}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\text{ループ C の内部}} \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{S}$$

またストークスの定理より

$$\oint_{\text{ループ C}} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\text{ループ C の内部}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

よってこれら２式から

$$\oint_{\text{ループ C}} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_{\text{ループ C の内部}} \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{S}$$

よって、アンペールの法則が導かれた。

3)(4)式の両辺で$\boldsymbol{\nabla}$をとると

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})=\mu_0(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j})+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E})$$

公式より

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})=\mathbf{0}$$

マックスウェル方程式より

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

以上３式から

$$\mu_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0$$

$$\therefore\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=-\frac{\partial}{\partial t}\rho$$

ここで終わってもいいと思いますが、一応両辺の体積積分をとると

$$\int_{\text{閉曲面 S の内部}}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}dV=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{閉曲面 S の内部}}\rho dV$$

ガウスの定理より

$$\int_{\text{閉曲面 S の内部}}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}dV=\int_{\text{閉曲面 S}}\boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}$$

これら２式から

$$\int_{\text{閉曲面 S}}\boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{閉曲面 S の内部}}\rho dV$$

よって、電荷保存則が導かれた。

4)真空中には光とほぼ同じ速さを持つ電磁波が存在し、光の正体が電磁波であることが説明できる。

[第２問]

アンペールの法則、磁性体に関する設問

まぁいけるっしょ！

この設問も前置きなしで早速！

1)円柱の軸から距離rの位置の磁場について考える。

$0<r<a$のとき　円柱内部には電流が流れていないので、アンペールの法則より

$$2\pi r\cdot B=0\qquad\qquad\therefore B=0$$

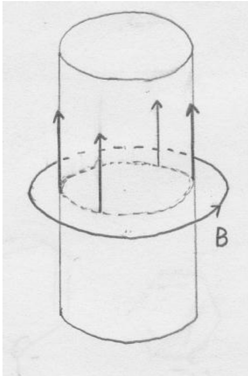
$r > a$のとき　アンペールの法則より

$$2\pi r \cdot B = \mu_0 I \qquad \therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

よって、

$$B = \begin{cases} 0 \ (0 < r < a) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \ (r > a) \end{cases}$$

向きは中心軸の周りを電流に対して右ねじの向き

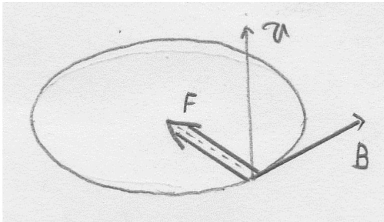


2)高校時代の知識をフルに活用しましょう！フレミング右手？左手？

求める力の大きさをFとすると

$$F = qvB = qv \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi b} = \frac{\mu_0 I q v}{2\pi b}$$

向きは中心方向



3)磁化電流を考える。磁化電流の面電流密度をJとすると

$$J = M$$

よって、単位長さの電流がJのソレノイドコイルとみなすと

$$B = \mu_0 J = \mu_0 M$$

実はリアルにフレミングの法則をいまだに使えないのは内緒…

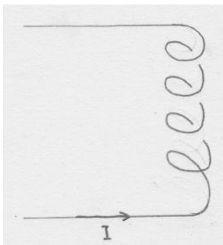
※ソレノイドコイル

単位長さあたりの巻き数がnのコイルがあり、そこに電流Iが流れているとき

発生する磁場の大きさををBとすると

$$B = \mu_0 n I$$

これを示します。



まず、マックスウェル方程式$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$より

$\boldsymbol{B}$の放射状成＝0

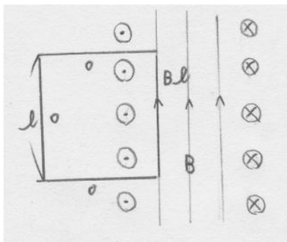
次に電流がコイル全体としては上昇していることから、

磁場が発生すると考えられるが、これはごく小さいので

$\boldsymbol{B}$の環状状成$\cong 0$

ソレノイドコイルの断面を考える。このとき図のようなループをとり、

そこでアンペールの法則を適用すると



$$Bl + 0 + 0 + 0 = \mu_0 I n l$$

$$\therefore B = \mu_0 n I$$

今回の問題では　$nI = J$　としていますが、

Jは単位長さあたりの電流を表していて、コイルではIが単位長さあたりにnあると考えれば納得いきますよね。

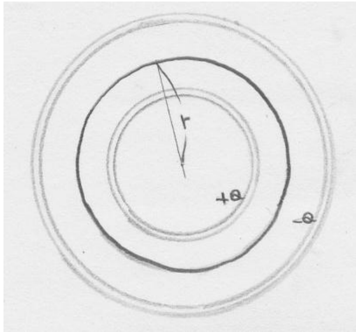
[第３問]

コンデンサーに関する設問

ってかレポートに同じ問題ありましたよね？ね？もちろん覚えてますよね？ね？

＜解答＞

1)半径rの球面を考える。その球面の中に含まれる電荷は



$$\begin{cases} 0\ (0 < r < a) \\ Q\ (a < r < b) \\ 0 \quad\quad (r > b) \end{cases}$$

よって、ガウスの法則より

$0 < r < a$ のとき

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = 0 \quad \therefore E(r) = 0$$

$a < r < b$ のとき

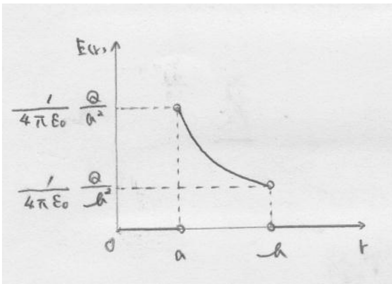
$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \therefore E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

$r > b$ のとき

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = 0 \quad \therefore E(r) = 0$$

よって

$$E(r) = \begin{cases} 0 \quad (0 < r < a) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\ (a < r < b) \\ 0 \quad\quad (r > b) \end{cases}$$



2)$r \geq b$ のとき

$$\varphi(r) = 一定 = \varphi(\infty) = 0$$

$a \leq r \leq b$のとき

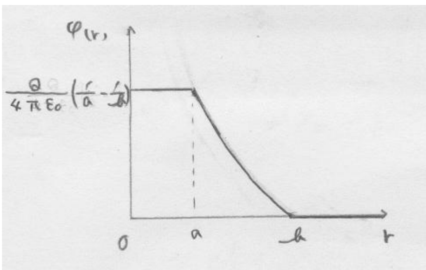
$$\varphi(r) = -\int_\infty^r E(r)dr = \varphi(b) - \int_b^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

$0 \leq r \leq a$のとき

$$\varphi(r) = 一定 = \varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

よって

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\ (0 \leq r \leq a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b}\right)\ (a \leq r \leq b) \\ 0 \quad\quad\quad\quad (r \geq b) \end{cases}$$



3)2 つの球殻の電位差をVとすると 2) より

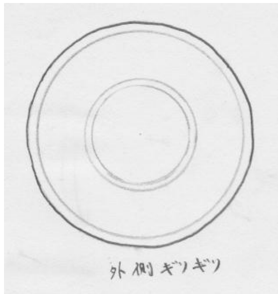
$$V=\varphi(a)-\varphi(b)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)-0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

よってコンデンサーの電気容量Cは

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

4)コンデンサーに蓄えられる静電エネルギーUは

$U=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$



5)導体内では$E=0$ なのでガウスの法則より

右図の球面の中では電荷＝0 でなければならない。

つまり外側球殻の内側には$+Q$,外側には$-q$の電荷が分布する。

すると

$$U'=U+\left(\text{外側の電荷}q\text{によるエネルギー}U_q\right)$$

となる。ここで、Uには 2 つの球殻の相互作用によるエネルギーが含まれているので

定義に戻ればU_qとは

内側球殻をないものとして、無限遠にある小さな電荷q_iを少しずつ持ってきて

半径bの球殻を形作るのに必要な仕事

となります。半径bの球殻に電荷q'が分布しているときを考えると、$r=b$において電場E'は

$$4\pi b^2\cdot E'=\frac{q'}{\varepsilon_0}\qquad\therefore E'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{b^2}$$

よって電位φ'は

$$\varphi'=-\int_\infty^b\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{b^2}db=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{b}$$

したがって

$$U_q=\int_0^q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{b}dq'=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{b}$$

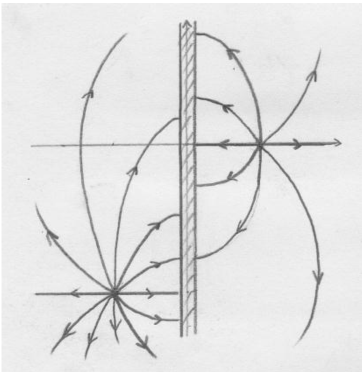
$$\therefore U'=U+U_q=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{b}$$

[第４問]
　鏡像法に関する設問
　この前の説明ちゃんと理解してるかな？

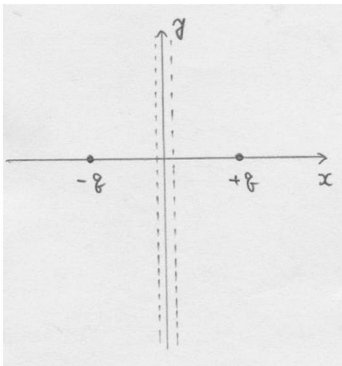
この問題で大事なのは$+Q$は関係ない！ってことです
導体を挟んだ反対側がどうなろうと影響を及ぼしません！！
実際導体をないものとし、$(-a,0,0)$に鏡像電荷$-q$をおき、$+Q$を取り除けば、
右半分の状況はもともとの問題設定と変わらないので、解の一意性からも正しさが
理解できると思います。大事なのは
　　　　　　電荷を置くのではなくて右半分の状況を変えないような電荷分布を付加する
ということです。

< 解答 >

1)



2)$(-a,0,0)$に鏡像電荷$-q$をおく。
　すると、求める力はこの鏡像電荷による力だとみなせるので
　求める力の大きさをFとすると



$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2a)^2}=\frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}$$

3)導体表面の電場$E(y,z)$は

$$E(y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left\{\sqrt{a^2+y^2+z^2}\right\}^2}\cdot\frac{-a}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}}\times 2$$

$$=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{(a^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore\sigma(y,z)=\varepsilon_0E(y,z)=-\frac{qa}{2\pi(a^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

はい！！これにて２年目終了！！
前置き少ないけど別に手抜きになったわけじゃないですからね〜〜〜
単に毎年同じような問題が出てるだけです(ここ重要)
特にマックスウェル方程式とかね〜
そういやマックスウェルさんってマックスウェル方程式以外にどんな偉業を成したか知ってますか？
たとえば！夏学期に学んだ(？？)熱力学
クラウジウスさんは熱力学第二法則を提唱しましたが
「ちょっと待った〜〜！！」
といったのがマックスウェルさん
いわゆる「マックスウェルの悪魔」というやつです。
もちろん詳しい説明は省きます。
そんなのめんどくさくてやってられません。
要は、電磁気学で大偉業を成し遂げたマックスウェルさんがなんと熱力学にも登場！
しかも彼は 14 歳の時には詩で才能を発揮したとか…
いや〜〜生命科学の時も言いましたが、昔の偉人はすごいですね。
狭い分野にはとらわれず広く研究を進めてる！！
何が言いたいかというと、電磁気なんていう目の前の狭い分野にとらわれず、先に広く広がる春休みを思い浮かべましょう！！
ホラ。ヤルキガデテキタデショ。

次は2010年度に挑戦！！

2010 年度

いや～！昨日クラスの一部の人に
「今日中に仕上げて明日アップする！」
って言ってもうたのに結局寝ちゃいました
（てへっ
そんな2月の1日目･･･　　他の教科･･･（涙

[第１問]

マックスウェル方程式に関する設問
もう解説よくないですか？

＜解答＞

1)(1)式の両辺の体積積分をとると

$$\int_{\text{閉曲面 S の内部}} \nabla\cdot\boldsymbol{E}dV = \int_{\text{閉曲面 S の内部}} \frac{\rho}{\varepsilon_0}dV$$

またガウスの定理より

$$\int_{\text{閉曲面 S}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\text{閉曲面 S の内部}} \nabla\cdot\boldsymbol{E}dV$$

よってこれら２式から

$$\int_{\text{閉曲面 S}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\text{閉曲面 S の内部}} \rho dV$$

よってガウスの法則が導かれた。

2)電場の線積分は経路によらない

3)磁荷は存在しない

4)両辺の面積積分をとると

$$\int_{\text{ループ C の内部}} (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\text{ループ C の内部}} \mu_0\mathbf{j}\cdot d\boldsymbol{S}$$

またストークスの定理より

$$\oint_{\text{ループ C}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\text{ループ C の内部}} (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S}$$

よってこれら２式から

$$\oint_{\text{ループ C}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0\int_{\text{ループ C の内部}} \mathbf{j}\cdot d\boldsymbol{S}$$

よってアンペールの法則が導かれた。

5)4 番目の式を

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}$$

6)(1)式より、電荷によって電場が生み出されること、(4)式より、その時間変化が磁場を生み出すこと、(2)式より磁場の時間変化も電場を生み出すことがわかる。つまり、相互に作用しあう場という目には見えない存在が理解される。これが電磁場であり、特に真空中の電磁場では、光速と等しい電磁波が生み出されることも(4)式よりわかる。

そして電場、磁場、電磁波は互いにその向きが直交している。

んな感じでいいんでしょうか？この問題に関してはどう書いていいのか分かんなかったです･･･

[第２問]

コンデンサーに関する設問

一年前とかなり似てますね　もう解説よくないですか？

＜解答＞

1)半径rの球面を考える。その球面の中に含まれる電荷は

$$\begin{cases} 0\ (0<r<a) \\ Q_1\ (a<r<b) \\ Q_1+Q_2\ \ (r>b) \end{cases}$$

よって、ガウスの法則より

$0<r<a$ のとき

$$E(r)\cdot 4\pi r^2=0 \quad \therefore E(r)=0$$

$a<r<b$ のとき

$$E(r)\cdot 4\pi r^2=\frac{Q_1}{\varepsilon_0} \quad \therefore E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}$$

$r>b$ のとき

$$E(r)\cdot 4\pi r^2=\frac{Q_1+Q_2}{\varepsilon_0} \quad \therefore E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1+Q_2}{r^2}$$

よって

$$E(r)=\begin{cases} 0\ \ (0<r<a) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1}{r^2}\ (a<r<b) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1+Q_2}{r^2}\ (r>b) \end{cases}$$

2) 1) より

$$\varphi(b)=-\int_\infty^b E(r)dr=-\int_\infty^b \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1+Q_2}{r^2}dr=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1+Q_2}{b}$$

$$\varphi(a) = -\int_{\infty}^{a} E(r)dr = \varphi(b) - \int_{b}^{a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{b}\right)$$

3)導体内では$E = 0$なのでガウスの法則より

右図の球面の中では電荷＝0 でなければならない。よって

	内　側	外　側
内　球	0	$+Q_1$
外　球	$-Q_1$	$+Q_1+Q_2$

4)内球、外球がコンデンサーを形成していると考えると、

そのコンデンサーが蓄える静電エネルギーU_Cは

$$U_C = \frac{1}{2}Q_1\{\varphi(a) - \varphi(b)\} = \frac{{Q_1}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

外球外側の電荷$Q_1 + Q_2$による静電エネルギーU_Qは

$$U_Q = \int_{0}^{Q_1+Q_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{b}dq = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{(Q_1 + Q_2)^2}{b}$$

(一年前の第３問参照)

よって求める静電エネルギーUは

$$U = U_C + U_Q = \frac{{Q_1}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{(Q_1 + Q_2)^2}{b}$$

たぶんこの方法が一番速いんですが、次の設問でコンデンサーになるって言ってるんで

もしかするとこの解き方は秋山さんの期待した解き方ではないのかもしれません。

だとすると第２回レポートの第２問のように解くことを期待したのかな？

よければ確認しといてください。もちろんめんどくさいので省略！！

5)コンデンサーの電気容量をCとすると

$$C = \frac{Q_1}{\varphi(a) - \varphi(b)} = \frac{Q_1}{\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

よってaはなるべく大きく、bはなるべく小さくとればよい。

つまりa,bの値をなるべく近くとればよい。

6)接地すると、外球の内側に$-Q_1$の電荷が分布する。よって、

$$E(r) = \begin{cases} 0 \quad (0 < r < a) \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2} \ (a < r < b) \\ 0 \ (r > b) \end{cases}$$

となり

$$\varphi(a) = -\int_{\infty}^{a} E(r)\,dr = \varphi(b) - \int_{b}^{a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

よって、静電エネルギーU'は

$$U' = \frac{1}{2}Q_1\{\varphi(a) - \varphi(b)\} = \frac{{Q_1}^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

ミスった～！！
洗濯物洗濯機に入れっ
ぱなしやった～！！

[第３問]

相対性理論への入り口(？)でもある設問

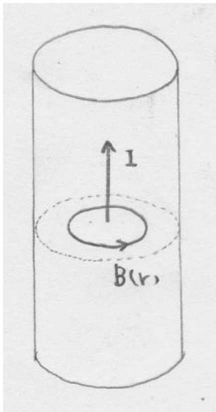
問題を解くことは容易です　なんでもう解説よくないですか？

＜解答＞

1)円柱の移動によって電流が生まれると考えると、

半径rの円ループを貫く電流は

$$\begin{cases} \rho\pi r^2 v\ (0 < r \leq a) \\ \rho\pi a^2 v\ (r > a) \end{cases}$$



よってアンペールの法則より

$0 < r \leq a$ のとき

$$2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 \rho\pi r^2 v \quad \therefore B(r) = \frac{\mu_0 \rho r v}{2}$$

$r > a$ のとき

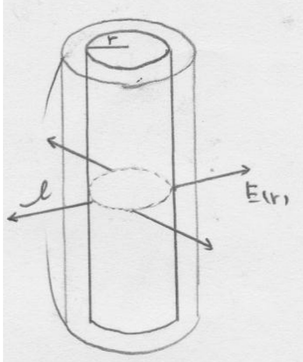
$$2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 \rho\pi a^2 v \quad \therefore B(r) = \frac{\mu_0 \rho a^2 v}{2r}$$

よって

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 \rho r v}{2}\ (0 < r \leq a) \\ \dfrac{\mu_0 \rho a^2 v}{2r}\ (r > a) \end{cases}$$

2)半径rの円柱に含まれる電荷は

$$\begin{cases} \rho\pi r^2 l\ (0 < r \leq a) \\ \rho\pi a^2 l\ (r > a) \end{cases}$$



よってガウスの法則より

$0 < r \leq a$ のとき

$$2\pi r l \cdot E(r) = \frac{\rho\pi r^2 l}{\varepsilon_0} \quad \therefore E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

$r > a$ のとき

$$2\pi r l \cdot E(r) = \frac{\rho\pi a^2 l}{\varepsilon_0} \quad \therefore E(r) = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}$$

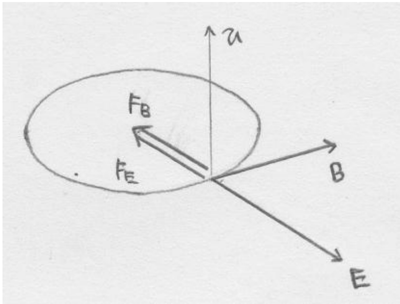
よって

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\ (0 < r \leq a) \\ \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\ (r > a) \end{cases}$$

4)磁場から受ける力の大きさをF_Bとすると

$$F_B = qvB(b) = \frac{\mu_0 \rho q a^2 v^2}{2b}$$

向きは中心方向



5)電場から受ける力の大きさをF_Eとすると

$$F_E = qE(b) = \frac{\rho q a^2}{2\varepsilon_0 b}$$

向きは中心方向

よってその比は

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{\dfrac{\mu_0 \rho q a^2 v^2}{2b}}{\dfrac{\rho q a^2}{2\varepsilon_0 b}} = \mu_0 \varepsilon_0 v^2 \left(= \frac{v^2}{c^2}\right)$$

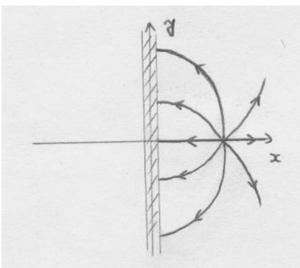
[第４問]

鏡像法に関する設問

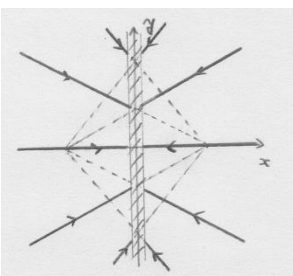
過去二年の鏡像法の中でももっとも易しい　なんでもう解説よくないですか？

<解答>

1)



2)



3)$(-a,0,0)$に鏡像電荷$-q$を置いて考えると求める力の大きさFは

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2a)^2}=\frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}$$

4)導体表面の電場$E(y,z)$は

$$E(y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left\{\sqrt{a^2+y^2+z^2}\right\}^2}\cdot\frac{-a}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}}\times 2$$

$$=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{(a^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore\sigma(y,z)=\varepsilon_0E(y,z)=-\frac{qa}{2\pi(a^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

そろそろクイズいきますか！
せっかくなんで電磁気にちなんだクイズを！！

ある屋台ではくじ引きをやってます！！残りの景品はあと５個！！
１を引けば電池　31 を引けば時計　69 を引けばデジカメ　81 を引けばノートパソコン
93 を引けばなんと電気自動車が当たります！！
このうち当たらないのはどれ？

ある駐車場があります。
空いているのは 1、3、5、7、9 番。
このうち一つには止められません。さてどれ？

時速 300 ㎞で走る新幹線。なんとその上にはおじいちゃんが乗っています！！
しかしおじいちゃんは平気な顔…
なぜ？

続いては最後の年度の問題です！！
気合い入れていくよ〜〜〜！！

2011年度　本試験

振波がつらくなってきたんでひとまずシケプリづくりで気分転換！！
になるか！！
まぁラストー年分です。お互い頑張りましょう！！

[第１問]

マックスウェル方程式に関する設問
もうおなじみ過ぎてあくびが出てきますよね～

＜解答＞

1)(1)式の両辺の体積積分をとると

$$\int_{\text{閉曲面 S の内部}} \nabla \cdot \boldsymbol{E} dV = \int_{\text{閉曲面 S の内部}} \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

またガウスの定理より

$$\int_{\text{閉曲面 S}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\text{閉曲面 S の内部}} \nabla \cdot \boldsymbol{E} dV$$

よってこれら２式から

$$\int_{\text{閉曲面 S}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\text{閉曲面 S の内部}} \rho dV$$

よってガウスの法則が導かれた。これを点電荷 Q に対して適用すると

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

点電荷Qと距離rにあるもう一つの点電荷qを考えると、その２つの電荷間に働く力の大きさFは

$$F = qE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r^2}$$

よってクーロンの法則が導かれた。

2)磁場の時間変化が電場を生み出す。つまりファラデーの電磁誘導の法則を表している。

3)磁荷は存在しない。

4)今までにやったのは**静電磁気学**におけるアンペールの法則
今回は**静磁気学**におけるアンペールの法則、つまり電場は時間に伴い変化します。
両辺の面積積分をとると

$$\int_{\text{ループ C の内部}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\text{ループ C の内部}} \left(\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S}$$

またストークスの定理より

$$\oint_{\text{ループ C}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\text{ループ C の内部}} (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S}$$

よってこれら２式から

$$\oint_{\text{ループ C}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0\int_{\text{ループ C の内部}} \mathbf{j}\cdot d\boldsymbol{S} + \mu_0\varepsilon_0\int_{\text{ループ C の内部}} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

これが静磁気学におけるアンペールの法則となる。

ちょっと説明加えときますね。なんでここにきていつもと違う問題出すのかね～

シケ対泣かせもいいとこです。

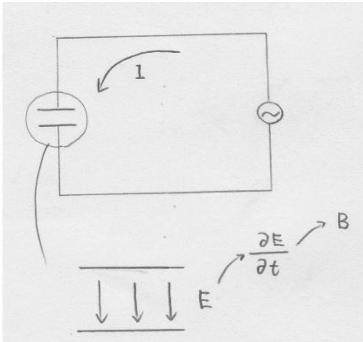
最初にマックスウェル方程式を説明したときに、結構あいまいにぼかして書いちゃったんですけど

マックスウェルさんは電荷保存則から$\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}$のタームが必要だと考えたって話したの覚えてますか？

こんなに頑張ってシケプリ作ってるんですから覚えてますよね～

電荷保存則と言えばコンデンサー！そんなイメージは高校時代からあると思います。

じゃあコンデンサーを考えてみましょう。



右図のような回路に交流電流を流すと、電流は流れ続けます。

すると周りには磁場が生じます。

しかし、当然コンデンサーはつながってないので

電荷は移動せず、電流は流れません。

んじゃあこの部分だけ磁場が途切れてるんでしょうか？

実際に観測すると、磁場が発生しています。

つまり電流が流れている？

しかし電流とは電荷の動きだという定義からそれはあり得ません。

そこで変位電流という考え方を導入します。

コンデンサーに蓄えられている電荷は時間に伴い変化します。

するともちろん両極板間の電場も変化します。

この電場の時間変化が電流のような役割を果たし、磁場を生み出すと考えて

$$\varepsilon_0\int_{\text{ループ C の内部}} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

を変位電流と呼びます。

つまり、電荷保存則はこの２種類の電流の変化も含んでいたということです。

こうして、４番目の式に$\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$の項を付加することにより、

マックスウェル方程式は完成したわけです。

ん～うまく説明できてない気がします。ごめんなさい。

5)(4)式の両辺で$\boldsymbol{\nabla}$をとると

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) = \mu_0(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E})$$

公式より

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{B})=\mathbf{0}$$

マックスウェル方程式より

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

以上３式から

$$\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0$$

$$\therefore\nabla\cdot\boldsymbol{j}=-\frac{\partial}{\partial t}\rho$$

ここで終わってもいいと思いますが、一応両辺の体積積分をとると

$$\int_{\text{閉曲面 S の内部}}\nabla\cdot\boldsymbol{j}dV=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{閉曲面 S の内部}}\rho dV$$

ガウスの定理より

$$\int_{\text{閉曲面 S の内部}}\nabla\cdot\boldsymbol{j}dV=\int_{\text{閉曲面 S}}\boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}$$

これら２式から

$$\int_{\text{閉曲面 S}}\boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{閉曲面 S の内部}}\rho dV$$

よって、電荷保存則が導かれた。

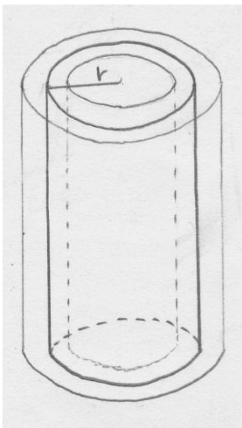
6)マックスウェル方程式からから電場と磁場は相互に作用してお互いを生み出しあいながら空間を進んでいくということが理解される。その動きの波こそが電磁波であり、特に真空中ではその伝わる速さは光とほぼ同じであり、光は電磁波であると考えられる。電磁波は電場、磁場の向きに対して垂直に進む横波である。

こんな感じかな？わかんないな～

[第２問]

コンデンサーに関する設問

ほんと毎年同じような出題形式ですね～



1)図のような半径rの円柱を考えるとその閉曲面に含まれる電荷は

$$\begin{cases}0\ (0<r<a)\\ Q\ (a<r<b)\\ 0\ (r>b)\end{cases}$$

よってガウスの法則より

$0 < r < a$ のとき

$$2\pi rL \cdot E(r) = 0 \quad \therefore E(r) = 0$$

$a < r < b$ のとき

$$2\pi rL \cdot E(r) = Q \quad \therefore E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{rL}$$

$r > b$ のとき

$$2\pi rL \cdot E(r) = 0 \quad \therefore E(r) = 0$$

よって

$$E(r) = \begin{cases} 0\ (0 < r < a) \\ \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{rL}\ (a < r < b) \\ 0\ (r > b) \end{cases}$$

向きは中心軸に垂直で放射状の向き

2)$r > b$ のとき

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} E(r)dr = const = \varphi(\infty) = 0$$

$a < r \leq b$ のとき

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} E(r)dr = \varphi(b) - \int_{b}^{r} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{rL}dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{b}{r}$$

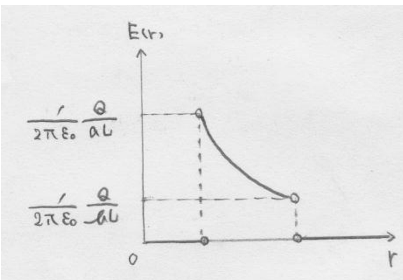
$0 < r \leq a$ のとき

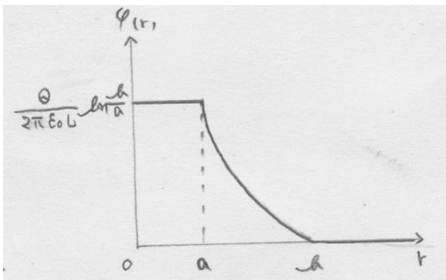
$$\varphi(r) = const = \varphi(a) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{b}{a}$$

よって

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\dfrac{b}{a}\ (0 < r \leq a) \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\dfrac{b}{r}\ (a < r \leq b) \\ 0\ (r > b) \end{cases}$$

3)





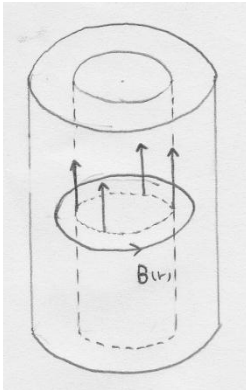
4)コンデンサーの電気容量Cは

$$C = \frac{Q}{\varphi(a) - \varphi(b)} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\dfrac{b}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\dfrac{b}{a}}$$

5)静電エネルギーUは

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2 \cdot \dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\dfrac{b}{a}}} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{b}{a}$$

6)図のような半径rの円ループを考えると、それを貫く電流の大きさは



$$\begin{cases} 0\ (0 < r < a) \\ I\ (a < r < b) \\ 0\ (r > b) \end{cases}$$

よってアンペールの法則より

$0 < r < a$ のとき

$$2\pi r \cdot B(r) = 0 \quad \therefore B(r) = 0$$

$a < r < b$ のとき

$$2\pi r \cdot B(r) = I \quad \therefore B(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

$r > b$ のとき

$$2\pi r \cdot B(r) = 0 \quad \therefore B(r) = 0$$

よって

$$B(r) = \begin{cases} 0\ (0 < r < a) \\ \dfrac{I}{2\pi r}\ (a < r < b) \\ 0\ (r > b) \end{cases}$$

向きは円柱の中心軸の周りを電流に対して右ねじの方向

ミスった！！
洗濯物とりこむの忘れてた～！！
（現在 20:00）

[第３問]

誘電体、磁性体に関する設問

かなり容易ですんで頑張りましょう！

誘電体の説明はまだでしたね。まずはその説明から！

誘電体：単位体積あたりの分極$\boldsymbol{P}$をもつもの

さらに公式

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{N}\boldsymbol{p} \quad \left(\boldsymbol{P}\text{: 分極}, N\text{: 双極子の密度}, \boldsymbol{p}\text{: 電気双極子}\right)$$

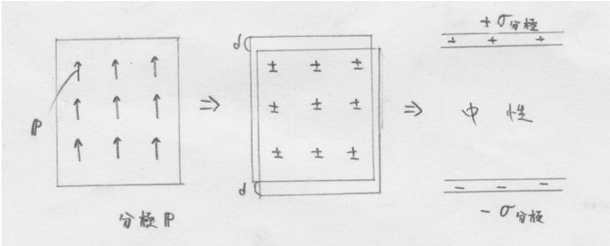
電気双極子は$\pm$の小さな棒みたいなもんだと思ってください。

しかしこのままでは電場を求めることはできない。

そこで双極子がdだけずれて、層ごとにいれこになってると仮定します。

するとその中間では何となく正負の電荷が打ち消しあう気がしますよね。

結果、上下の厚みdだけそれぞれ$+, -$に帯電します。



この時の面電荷$\sigma_{分極}$は

$$\sigma_{分極} = P$$

$$\left(\sigma_{分極} = d \cdot eN = pN = P\right)$$

面電荷さえ分かればもう簡単に問題が解けますよね

< 解答 >

1)板の両端に面電荷$\sigma_{分極}$が分布していると考えると

$$\sigma_{分極} = P$$

　よって求める電場の大きさをEとすると

$$E = \frac{\sigma_{分極}}{\varepsilon_0} = \frac{|\boldsymbol{P}|}{\varepsilon_0}$$

2)磁化電流を考える。磁化電流の面電流密度をJとすると

$$J = M$$

よって、単位長さの電流がJのソレノイドコイルとみなすと

$$B = \mu_0 J = \mu_0 |\boldsymbol{M}|$$

[第４問]

　電気双極子に関する設問

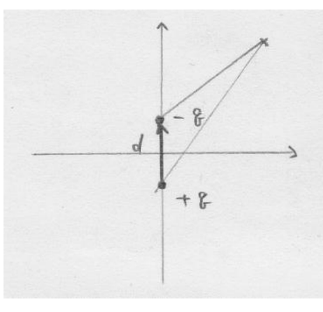
　なんというか数学チックです　まぁ頑張りましょう！！

まず電気双極子とは何か？

電気双極子：$+q, -q$の電荷が微小な距離dだけ離れて存在している状態

ここで原点に置かれた電荷qが作るポテンシャルを$\varphi_0(\boldsymbol{r})$とすると

$$\varphi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$



よって電気双極子が作るポテンシャル$\varphi(\boldsymbol{r})$は

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi_0\left(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{d}}{2}\right) - \varphi_0\left(\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{d}}{2}\right)$$

テイラー展開すると、$d \ll r$ より、dの 2 次以上の項は無視できて

$$\varphi(\boldsymbol{r}) \cong \left(-\frac{\boldsymbol{d}}{2}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi_0(\boldsymbol{r}) - \frac{\boldsymbol{d}}{2}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi_0(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi_0(\boldsymbol{r}) = -\frac{q\boldsymbol{d}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}$$

ここで電気双極子モーメント$\boldsymbol{p}$を

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

と定義すると

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}$$

ちなみに磁気双極子というのもあるんでしっかりノートで復習しといてください。

< 解答 >

1)示しちゃいましたね。もう一度記号をそろえて書くと

原点に置かれた電荷qが作るポテンシャルを$\varphi_0(\boldsymbol{r})$とすると

$$\varphi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

よって 2 つの電荷を$q, -q$,方向ベクトルを$\boldsymbol{z}$とすると電気双極子が作るポテンシャル$\varphi(\boldsymbol{r})$は

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi_0\left(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{z}}{2}\right) - \varphi_0\left(\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{z}}{2}\right)$$

テイラー展開すると、$z \ll r$ のとき、zの 2 次以上の項は無視できて

$$\varphi(\boldsymbol{r}) \cong \left(-\frac{\boldsymbol{z}}{2}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi_0(\boldsymbol{r}) - \frac{\boldsymbol{z}}{2}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi_0(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi_0(\boldsymbol{r}) = -\frac{q\boldsymbol{z}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}$$

ここで電気双極子モーメント$\boldsymbol{p}$は

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{z}$$

$$\therefore \varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}$$

2)
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x}{r^3}$$

なので

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\therefore \varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r} = \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\right)\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(0\cdot x + 0\cdot y + p\cdot z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pz}{r^3}$$

すると

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{pz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^3} = -\frac{pz}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{3}{r^4}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{pz}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{3}{r^4}\right)\frac{x}{r} = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pxz}{r^5}$$

$$E_y = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pyz}{r^5}$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r^3} + z\left(-\frac{3z}{r^5}\right)\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{p}{r^3} + \frac{3pz^2}{r^5}\right)$$

3)一応重要な点を確認しときます。

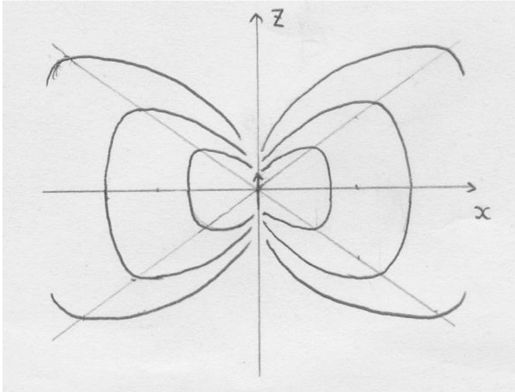
$z = 0$ においては　　$E_x = E_y = 0$

$E_z = 0$ になるのは　　$-\frac{p}{r^3} + \frac{3pz^2}{r^5} = 0$

$$\therefore 3z^2 = r^2$$

$$\therefore z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}r$$

よって右図



終了～～～！！
いやぁ疲れましたな
よくここまでたどり着きました。
皆さんお疲れ様です！！

さぁあとは一年分！！
2011 年度の追試験を残すのみ！！！！

もうシケ対さんも疲れてきたんで目にも止まらぬ速さで解説していきますよ～

さぁ～みんなついてこれるかな？

2011 年度　追試験

2011年度本試験の問題に
全て含まれているために
割愛させていただきます。

おわりに

最後までシケプリにお付き合いいただきありがとうございました。

全て読むのは大変だったと思います。

しかし、きっと最後まで読んでくださった方にはいいことあります。

途中お見苦しい点も多々あったと思います。

なぞなぞなんて興味ないかもしれません。

しかしシケ対さんは良かれと思って取り上げたのだということをご理解ください。

僕の洗濯事情なんて全く興味がないですよね。

しかしあれは事実なんです。嘘ではありません。

このシケプリが皆さんの電磁気学の期末試験での点数向上の一助になれば幸いです。

というわけで、

まあ頑張りましょう！！

ただし、

ぼくの電磁気学の点数は上回らないような勉強をしてくださいね。

夏学期の生命科学では僕の点数を超えるというけしからぬ奴がいましたが
そのようなことはないように！！

では！

完