数理科学 II
（ヴァイス）
ショートテスト

問題 1: 次の微分方程式の解全体を求めよ。

$$y'(t) - \frac{y(t)}{t} = 2\log t$$

（解答）

$y'(t) - \dfrac{y(t)}{t} = 0$ を解くと, $y = Ct$.

定数変化法を用いる. $y = C(t)t$ とおくと,

$y'(t) - \dfrac{y(t)}{t} = \{C'(t)t + C(t)\} - C(t) = C'(t)t = 2\log t$.

$\therefore C(t) = \displaystyle\int \frac{2\log t}{t} dt = (\log t)^2 + C$.

従って解全体は $\underline{y = t(\log t)^2 + Ct}$.

問題 2: 次の初期値問題の大域解が存在するか、あるいは存在しないかについて議論せよ。

$$y'(t) = \arctan t + \sqrt{|y(t)|}\sin t,\ y(0) = 2$$

（解答）

$y'(t) = f(t, y)$ とおく. ある $C \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ に対し, $f(t, x) \leq C(1 + |x|)$ ならば, この初期値問題の大域解が存在する.

$t \geq 0$ に対し, $f(t, x) = \arctan t + \sqrt{|x|}\sin t < \dfrac{\pi}{2} + \sqrt{|x|} \cdot 1$ であるから, $C = 2$ として,

$$C(1 + |x|) - f(t, x) = 2|x| - \sqrt{|x|} + 2 - \frac{\pi}{2} = 2\left(\sqrt{|x|} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15 - 4\pi}{8} > 0$$

$(\because \pi < \dfrac{15}{4} = 3.75)$

が任意の $x \in \mathbb{R}$ について成り立つから, この初期値問題の大域解が存在する. $\square$

問題 3:

$$f(z) = -\max(z, 0)^{\frac{3}{4}}$$

とおいたときに、次の (1)、(2) それぞれが成り立つか、あるいは成り立たないかについて議論せよ。

(1) 関数 f は実数全体上で Lipschitz 連続である。

(2) 初期値問題

$$y'(t) = f(y), y(0) = y^0$$

は各 $y^0 \in \mathbb{R}$ に対して一意的な解 y を持つ。

（解答）

(1) f が実数全体上で Lipschitz 連続 $\Leftrightarrow$ ある $L \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $t \in \mathbb{R}, x, z \in \mathbb{R}$ に対し—$f(t,x) - f(t,z)| \leq L|x-z|$. このとき特に $\left|\dfrac{f(t,x)-f(t,z)}{x-z}\right| < +\infty$ である.

$x < 0 < z$ とすると, $\left|\dfrac{f(t,x)-f(t,z)}{x-z}\right| = \dfrac{1}{z^{\frac{1}{4}}} \to +\infty \ (z \to +0)$ であるから, f は実数全体上で Lipschitz 連続でない. □

(2) $y^0 = 0$ のとき, $y(t) = 0$ は解であるが,

$$y = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ \left\{\dfrac{1}{4}(t-a)\right\}^4 & (t \geq a) \end{cases}$$ も解となり, 一意的ではない. □

問題 4: 微分方程式

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 6 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} y$$

の解の基本系 Y も求めよ。

（解答）

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 6 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ とおく.

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -8 \\ -6 & \lambda-4 & 2 \\ -4 & -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 0 & \lambda-6 \\ -6 & \lambda-4 & 2 \\ -4 & -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ -6 & \lambda-4 & 8 \\ -4 & -2 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$= (\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-6)$. よって A の固有値は $\lambda = -4, 2, 6$.

$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$ とおく.

各 λ_i に対する固有ベクトル v_i を $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる.

故に解の基本形 Y は $Y = (e^{\lambda_1 t}v_1 \ e^{\lambda_2 t}v_2 \ e^{\lambda_3 t}v_3) = \underline{\begin{pmatrix} e^{-4t} & -e^{2t} & e^{6t} \\ e^{-4t} & 4e^{2t} & 0 \\ -3e^{-4t} & e^{2t} & e^{6t} \end{pmatrix}}$.

問題 5: 初期値問題

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y,\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

の解 y を求めよ。解の基本系 Y も求めよ。

（解答１）

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. $\det(\lambda E - A) = (\lambda - 1)^2$.

よって A の固有値は $\lambda = 1$（重根）

$\{v | (E - A)v = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ より $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は λ の 1 次の一般化固有ベクトル.

また, $(E - A)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ より, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は λ の 2 次の一般化固有ベクトル.

故に, $e^{\lambda t} v_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\lambda t}(v_2 + t(A - E)v_2) = \begin{pmatrix} 2te^t \\ e^t \end{pmatrix}$ より,

一般解は $y = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2te^t \\ e^t \end{pmatrix}$ と表される.

$y(0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ より, この初期値問題の解 y は $\underline{y = \begin{pmatrix} e^t + 8te^t \\ 4e^t \end{pmatrix}}$.

また, 解の基本系 Y は $\underline{Y = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}}$.

（解答２）

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ とおく. このとき,

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases}$$

第 2 式より, $y_2 = C_1 e^t$ と解ける. 第 1 式は $y_1' - y_1 = 2C_1 e^t$ となる.

定数変化法により, $y_1(t) = C(t)e^t$ とおくと,

$y_1' - y_1 = C'(t)e^t = 2C_1 e^t$. $\therefore C(t) = \displaystyle\int 2C_1 dt = 2C_1 t + C_2$

故に一般解は $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2C_1 t + C_2)e^t \\ C_1 e^t \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2te^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ となる.

$y(0) = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ より, この初期値問題の解 y は $\underline{y = \begin{pmatrix} e^t + 8te^t \\ 4e^t \end{pmatrix}}$.

また, 解の基本系 Y は $\underline{Y = \begin{pmatrix} 2te^t & e^t \\ e^t & 0 \end{pmatrix}}$.