数学II 2013年度冬学期試験解答

(1)

(i) 任意の $X_1, X_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in R$ に対し、

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) &= A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) - (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)A \\ &= \lambda_1 (AX_1 - X_1 A) + \lambda_2 (AX_2 - X_2 A) \\ &= \lambda_1 f(X_1) + \lambda_2 f(X_2) \end{aligned}$$

が成り立つので、f は線形写像である。

また一般に、n 次正方行列 A, X(それぞれの (i,j) 成分を a_{ij}, x_{ij} とする) について、

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AX) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ji} a_{ij} \\ &= \mathrm{tr}(XA) \end{aligned}$$

となる。

よって、

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(f(X)) &= \mathrm{tr}(AX) - \mathrm{tr}(XA) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、f の像は W に含まれる。

(ii) 任意の $w_1, w_2 \in W, \lambda_1, \lambda_2 \in R$ に対し

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) &= \lambda_1 \mathrm{tr}(w_1) + \lambda_2 \mathrm{tr}(w_2) \\ &= \lambda_1 0 + \lambda_2 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

より $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$ となるので W は V の部分空間である。

また、$w \in W$ ならば

$$\begin{aligned} w &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ &= be_2 + ce_3 + av \end{aligned}$$

と表せるので、W は e_2, e_3, v によって生成される。e_2, e_3, v は1次独立なので、これらは W の基底となる。

(iii)

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

同様に、

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix}$$

$$f(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$

よって、

$$\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 & e_3 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & -c & b & 0 \end{pmatrix}$$

従って求める表現行列は

$$\begin{pmatrix} -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & -c & b & 0 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\mathrm{rk}\begin{pmatrix} -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & -c & b & 0 \end{pmatrix} &= \mathrm{rk}\begin{pmatrix} -b & a-d & 0 & 0 \\ c & 0 & d-a & 0 \\ 0 & -c & b & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rk}\begin{pmatrix} -b & a-d & 0 \\ c & 0 & d-a \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

であるが、この行列の行列式を計算すると 0 になるので階数は 2 以下。

ここで、$a-d=0$ とすると、A がスカラー行列でないことから b または c は 0 でなく、上の行列の 1 列と 2 列または 1 列と 3 列は 1 次独立。よってその階数は 2 である。$a-d \neq 0$ ならば 2 列と 3 列は 1 次独立なので階数は 2。よっていずれの場合も階数は 2。

次元公式より

$$\dim\mathrm{Ker}f = \dim V - \mathrm{rk}f = 4 - 2 = 2$$

であり、$f(X) = O$ を満たす X として A, E_2 があることとこの二つが 1 次独立である（A がスカラー行列でないため）ことから、A, E_2 が求める基底の一つである。

(注)Ker$f$ は、$AX = XA$ を満たす X、すなわち A と可換な X の集合です。上の結果は、A が (スカラー行列でない) 実二次正方行列の場合、それと可換な X は一般に $sA + tE_2$(s, t は任意の実数) と表せる、ということを示しています。

(2)

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_2' &= v_2 - < v_2, u_1 > u_1 \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{6}\,\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$u_2 = \frac{v_2'}{|v_2'|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_3' &= v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$u_3 = \frac{v_3'}{|v_3'|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}$$

とすると、u_1, u_2, u_3 は正規直交基底となる。

(3)

平方完成すると、

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+y-z)^2 + y^2 + 2z^2 + 2(a+1)yz \\ &= (x+y-z)^2 + \{y+(a+1)z\}^2 + \{2-(a+1)^2\}z^2 \end{aligned}$$

これが正値 2 次形式となる条件は、

$$2-(a+1)^2 > 0$$

$$\Longleftrightarrow -1-\sqrt{2} < a < -1+\sqrt{2}$$

また、平方完成したときの z^2 の係数の符号がどのように変化するかを考えて、f の符号は

$-1-\sqrt{2} < a < -1+\sqrt{2}$ のとき (3,0)
$a = -1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}$ のとき (2,0)
$a < -1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2} < a$ のとき (2,1)

(4)

(i)$(AA^*)^* = (A^*)^*A^* = AA^*$ より AA^* はエルミート行列。
また、A が n 次正方行列とすると、任意の n 次列ベクトル v に対し

$${}^t vAA^*\overline{v} =< {}^tAv, {}^tAv > \geq 0$$

が成り立つので AA^* は半正値。
A が正則であることから A^* も正則であり、従って AA^* も正則であるので、AA^* は正値である。

(注) 正則な行列は固有値に 0 を持ちません。そのため、半正値かつ正則であれば正値であるといえます。

(ii)$(\sqrt{AA^*})^{-1}A = B$ とおくと、

$$B^* = A^*(\sqrt{(AA^*)^*})^{-1} = A^*(\sqrt{AA^*})^{-1}$$

よって、

$$\begin{aligned} B^*B &= A^*(\sqrt{AA^*})^{-1}\ (\sqrt{AA^*})^{-1}A \\ &= A^*(AA^*)^{-1}A \\ &= A^*(A^*)^{-1}A^{-1}A \\ &= E_nE_n \\ &= E_n \end{aligned}$$

となり、B はユニタリ行列である。

(iii) $A = \sqrt{AA^*}\,(\sqrt{AA^*})^{-1}A$ であるが、(i) より AA^* は正値エルミート行列なので $\sqrt{AA^*}$ も正値エルミート行列であり、(2) より $(\sqrt{AA^*})^{-1}A$ はユニタリ行列であるから、

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} = A, \sqrt{AA^*} = H, (\sqrt{AA^*})^{-1}A = U$$

とすれば題意の形に表せる。
ここで、

$$AA^* = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 30 \\ 30 & 85 \end{pmatrix}$$

で、その固有多項式は

$$\phi_{AA^*}(t) = (t-40)(t-85) - 30 \cdot 30 = (t-100)(t-25)$$

固有値 $100, 25$ に属する固有ベクトルの一つに、それぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ があるので、

$$AA^*\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

よって、

$$\begin{aligned} AA^* &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= 100\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 25\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 100 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 25 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これより

$$\sqrt{AA^*} = 10 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

また、

$$\begin{aligned} (\sqrt{AA^*})^{-1}A &= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上より、$H = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ で、

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(5)

$f(V) \subset V$ より $g \circ f(V) \subset g(V)$
従って、rk $g \circ f \leq \mathrm{rk} g$
いま、rk $g \circ f = \mathrm{rk} f$ であるので、$\mathrm{rk} f \leq \mathrm{rk} g$
同様に $\mathrm{rk} g \leq \mathrm{rk} f$ が示されるので、$\mathrm{rk} f = \mathrm{rk} g$

次に、$V = f(V) \oplus \mathrm{Ker} g$ を示す。$V = g(V) \oplus \mathrm{Ker} f$ も同様。
まず、次元公式より

$$\mathrm{dim} f(V) = \mathrm{dim} g \circ f(V) + \mathrm{dimKer} g|_{f(V)}$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{rk} f = \mathrm{rk} g \circ f + \mathrm{dimKer} g|_{f(V)}$$

であるが、

$$\mathrm{rk}\ g \circ f = \mathrm{rk} f$$

なので

$$\mathrm{dimKer} g|_{f(V)} = 0$$

よって $f(V)$ において g は単射。$\cdots$ (#)
ここで、$v \in f(V) \cap \mathrm{Ker} g$ とすると、$v \in \mathrm{Ker} g$ なので $g(v) = 0$
これと $g(0) = 0$、$v, 0 \in f(V)$、(#) より $v = 0$
すなわち、

$$f(V) \cap \mathrm{Ker} g = \{0\}$$

よって $\mathrm{dim}(f(V) \cap \mathrm{Ker} g) = 0$ であり、

$$\begin{aligned} \mathrm{dim}(f(V) + \mathrm{Ker} g) &= \mathrm{dim} f(V) + \mathrm{dimKer} g - \mathrm{dim}(f(V) \cap \mathrm{Ker} g) \\ &= \mathrm{dim} f(V) + \mathrm{dimKer} g - 0 \\ &= \mathrm{dim} f(V) + \mathrm{dimKer} g \end{aligned}$$

上で示したように $\mathrm{rk} f = \mathrm{rk} g$ であり、

$$\mathrm{rk} f + \mathrm{dimKer} f = \mathrm{rk} g + \mathrm{dimKer} g = \mathrm{dim} V$$

なので、

$$\mathrm{dimKer} f = \mathrm{dimKer} g$$

よって

$$\begin{aligned} \mathrm{dim}(f(V) + \mathrm{Ker} g) &= \mathrm{dim} f(V) + \mathrm{dimKer} g \\ &= \mathrm{dim} f(V) + \mathrm{dimKer} f \\ &= \mathrm{dim} V \end{aligned}$$

$(f(V) + \mathrm{Ker} g) \subset V$ と $\mathrm{dim}(f(V) + \mathrm{Ker} g) = \mathrm{dim} V$ から、

$$f(V) + \mathrm{Ker} g = V$$

さらに $f(V) \cap \mathrm{Ker} g = \{0\}$ であるので $V = f(V) \oplus \mathrm{Ker} g$