冬学期 数学 IA 演習（足助太郎）解法集成

by @2_7182818

2013 年 2 月 9 日

ノリで解法集成と銘打ちましたが只の個人的な答案集で未完成極まってます。特に問 6.4 4)、問 9.5、問 10.2 2、問 11.6 3)、問 11.8 2)、問 12.1 b)1) 及び e)、問 13.2 2) についてのアイデア解答主義主張を広く募集していますので何かあったら是非適当な伝達手段で私にお伝え下さい。

平成 25 年 2 月 9 日　初版
平成 25 年 2 月 9 日　第 2 版　問 11.7 5) 修正

目次

第 6 回

問 6.1

1) 否定は「$\exists n \in \mathbb{N}^+$ s.t. $a_n \leq 0$」。
命題は「$n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow a_n > 0$」と書けるので対偶は「$a_n \leq 0 \Rightarrow n \in \mathbb{N}^- \cap \{0\}$」。
2) 否定は「$\forall n \in \mathbb{N}^+,\ a_n \leq 0$」。
3) 否定は「$n > N \wedge a_n \leq 0$」。対偶は「$a_n \leq 0 \Rightarrow n \leq N$」。
4) 否定は「$\forall N \in \mathbb{N}^+,\ n > N \wedge a_n \leq 0$」。

問 6.2

1)「$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ s.t. $\forall y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$」
2)「$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ s.t. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$」
3)「$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists \epsilon > 0$ s.t. $\forall \delta > 0,\ \exists y \in \mathbb{R}$ s.t. $|x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \epsilon$」

問 6.3

1)
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, x^{-(n+1)}$$
と仮定すると、これは帰納的に任意の非負整数 n について成り立つと示せる。
$$f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$$
となるから、f の *Taylor* 級数は
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x-1)^n$$
である。また $f' = -g$ より
$$g^{(n)}(1) = -f^{(n+1)}(1) = (-1)^n (n+1)!$$
となるから、g の *Taylor* 級数は
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$$
となる。

2) f は $[c,\ 2-c]$ 上 C^∞ 級函数なので、*Taylor* の定理より任意の正整数 m に対し
$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \frac{f^{(n)}(1+\theta(x-1))}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$
なる θ が存在する。この様な θ に対して
$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{m} a_n (x-1)^n - f(x)\right| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(1+\theta(x-1))}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}\right| \\
&= \left|(-1)^{n+1} \frac{(x-1)^{n+1}}{(1+\theta(x-1))^{n+2}}\right| \\
&= \left|\frac{1}{1+\theta(x-1)} \left(\frac{x-1}{1+\theta(x-1)}\right)^{n+1}\right| \\
&\leq \max\left\{\frac{1}{x}, 1\right\} \cdot \left|\left(\frac{x-1}{1+\theta(x-1)}\right)^{n+1}\right| \\
&\leq \frac{1}{c} \left|\left(\frac{x-1}{1+\theta(x-1)}\right)^{n+1}\right|
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} 1+\theta(x-1)-(x-1) &= 1+(\theta-1)(x-1) \\ &> 1-(x-1) \\ &= 2-x > 0 \end{aligned}$$

よって数列 $\left\{ \left(\dfrac{x-1}{1+\theta(x-1)} \right)^n \right\}_n$ は $n \to +\infty$ のとき 0 に収束するから、任意の実数 $\epsilon' > 0$ について $M \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\forall x \in [c,\ 2-c],\ \forall m \geq M,\ \left| \left(\frac{x-1}{1+\theta(x-1)} \right)^{n+1} \right| < \epsilon'$$

が成り立つ。ここで $\epsilon = \epsilon'/c$ とすれば

$$\left| \sum_{n=0}^{m} a_n (x-1)^n - f(x) \right| \leq \frac{1}{c} \left| \left(\frac{x-1}{1+\theta(x-1)} \right)^{n+1} \right| < \epsilon$$

である。以上により

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall x \in [c,\ 2-c],\ \forall m \geq M,\ \left| \sum_{n=0}^{m} a_n (x-1)^n - f(x) \right| < \epsilon$$

が示された。

3) f の *Taylor* 級数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

を項別微分すると

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n (x-1)^{n-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$$

となり、$f' = -g$ の *Taylor* 級数と一致する。

問 6.4

1) 問題に於ける T の定義は、既に定義されている ℓ を「ある C^∞ 級の曲線」として扱っている（様に見える）点や t_0 が未定義である点など明らかにおかしい。今一つ判然としないが、ℓ, t_0 を固定して

$$T = T_{\ell(t_0)}\mathbb{R}^2 = \{\, v \in \mathbb{R}^2 \mid \text{或る } C^\infty \text{ 級の曲線 } \ell_0 \text{ について } \ell_0(t_0) = \ell(t_0) \text{ 且つ } v = D\ell_0(t_0) \,\}$$

と定義したかったと思われる。以下この定義に従う。
定義より $T \subset \mathbb{R}^2$ は明らか。任意の $v \in \mathbb{R}^2$ について、$\ell_0(t) = \ell(t_0) + v(t - t_0)$ とすると ℓ_0 は C^∞ 級の曲線となるので $D\ell_0(t_0) = v$。よって $v \in T$ より $\mathbb{R}^2 \subset T$。以上より $T = \mathbb{R}^2$ が示された。

2) φ, ℓ は共に C^∞ 級の函数なので ℓ' も C^∞ 級である。

3) $D\ell' = D\varphi \circ \ell \cdot D\ell$ より

$$D\ell'(t_0) = D\varphi(\ell(t_0)) D\ell(t_0)$$

4) $v, w \in T_{\ell(t_0)}\mathbb{R}^2$ とすると、任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ について

$$\begin{aligned} F(\alpha v_1 + \beta v_2) &= D\varphi(\ell(t_0))(\alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= \alpha D\varphi(\ell(t_0)) v_1 + \beta D\varphi(\ell(t_0)) v_2 \\ &= \alpha F(v_1) + \beta F(v_2) \end{aligned}$$

が成り立つから F は実線型写像である。

5) F の線型性より、$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として任意の $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ について

$$\begin{aligned} F(v) &= F(v_1 e_1 + v_2 e_2) \\ &= v_1 F(e_1) + v_2 F(e_2) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって $F(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $F(e_2) = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ とすると行列 $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$ が一意に定まり

$$F(v) = Av$$

である。

又 $\ell(t_0) = \begin{pmatrix} \ell_1(t_0) \\ \ell_2(t_0) \end{pmatrix}$ として

$$\begin{aligned} D\varphi(\ell(t_0)) &= \begin{pmatrix} D_1\varphi_1 & D_2\varphi_1 \\ D_1\varphi_2 & D_2\varphi_2 \end{pmatrix} (\ell(t_0)) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \ell_1(t_0) \\ \ell_2(t_0) \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\ell_2(t_0)) & -\ell_1(t_0)\sin(\ell_2(t_0)) \\ \sin(\ell_2(t_0)) & \ell_1(t_0)\cos(\ell_2(t_0)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\ell_2(t_0)) & -\ell_1(t_0)\sin(\ell_2(t_0)) \\ \sin(\ell_2(t_0)) & \ell_1(t_0)\cos(\ell_2(t_0)) \end{pmatrix}$$

第 7 回

問 7.1

f は連続なので、任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し、

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall y \in \mathbb{R}^n,\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

が成り立つ。

ここで、或る $a_0, b_0 \in \mathbb{R}^n$ について $f(a_0) \neq f(b_0)$ とする。任意の $n \in \mathbb{Z}^+$ について (a_n, b_n) を以下で定める。

$$(a_n, b_n) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right) & f\left(\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) = f(a_{n-1}) \\ \left(a_{n-1}, \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) & f\left(\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) \neq f(a_{n-1}) \end{cases}$$

定義より $f(a_n) \neq f(b_n)$ だが、$f(x) \in \mathbb{Z}$ なので $|f(a_n) - f(b_n)| \geq 1$ である。また、$|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}| = \left(\frac{1}{2}\right)^n |b_0 - a_0|$ より $|b_n - a_n|$ は $n \to \infty$ のとき 0 に収束するから、任意の $\epsilon' > 0$ に対して或る $N > 0$ が存在し、

$$n \geq N \Rightarrow |b_n - a_n| < \epsilon'$$

ここで $\epsilon' = \delta$ とすれば

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0 \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow |f(b_n) - f(a_n)| < \epsilon$$

が成り立つ。ところが $|f(b_n) - f(a_n)| \geq 1$ であるからこれは矛盾である。よって $f(a_0) = f(b_0)$ となり、f は定数函数。

g について、或る $a_0, b_0 \in \mathbb{R}^n$ が存在して $g(a_0) < g(b_0)$ とする。ここで $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ で $g(a_0) < r < g(b_0)$ なるものを任意に選ぶ。以下 $a_0 < b_0$ とする。

任意の $n \in \mathbb{Z}^+$ について (a_n, b_n) を以下で定める。

$$(a_n, b_n) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right) & g\left(\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) < r \\ \left(a_{n-1}, \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) & g\left(\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) > r \end{cases}$$

$a_0 \leq a_n < b_n \leq b_0$ かつ $|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}| = \left(\frac{1}{2}\right)^n |b_0 - a_0|$ より $|b_n - a_n|$ は $n \to \infty$ のとき 0 に収束するから、a_n, b_n は共に或る値 c へ収束し、定義から $g(a_n) < r < g(b_n)$ なので $g(c) = r$ が成り立つ。しかし $g(x) \in \mathbb{Q}$ 故これは矛盾である。よって g は定数函数。$a_0 > b_0$ の場合も同様。

問 7.2

$v_1, \ldots, v_n$ を並べた行列の行列式を $f(v_1, \ldots, v_n)$ とし、$\mathbb{R}^{n^2}$ 上の函数と看做す。$v_1, \ldots, v_n$ は線型独立なので $f(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$ である。ここで f は連続函数なので、任意の $\epsilon > 0$ について $\delta' > 0$ が存在し、

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|w_i - v_i\|^2} < \delta' \Rightarrow |f(w_1, \ldots, w_n) - f(v_1, \ldots, v_n)| < \epsilon$$

が成り立つ。特に $\epsilon < |f(v_1, \ldots, v_n)|$ とすれば $f(w_1, \ldots, w_n) \neq 0$ である。また、ある $\delta > 0$ について $\delta < \delta'^2/n$ とすれば、$\forall i,\ \|w_i - v_i\| < \delta$ なる時

$$\sum_{i=1}^{n} \|w_i - v_i\|^2 < n\delta < \delta'^2$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|w_i - v_i\|^2} < \delta'$$

が成り立つ。以上より

$$\exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall i,\ \|w_i - v_i\| > \delta \Rightarrow f(w_1, \ldots, w_n) \neq 0$$

となり、この時 $w_1, \ldots, w_n$ は線型独立である。

問 7.3

1) f が U 上一様連続であるとき、任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在し

$$\forall x, y \in U,\ \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$$

が成り立つ。ここで $y = a$ と固定すると

$$\forall x \in U,\ \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon$$

となり

$$\forall a \in U,\ \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in U,\ \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon$$

が成り立つ。よって f は U 上各点連続である。

2) $n = m = 1$ の場合について、$f(x) = x^2$ と置く。ここで $x = n + \frac{1}{n},\ y = n\ (n \in \mathbb{N}^+)$ とすると、$|x - y| = \frac{1}{n}$ 及び $|f(x) - f(y)| = \left|2 + \frac{1}{n^2}\right| > 2$ が成り立つ。ここで $n \to \infty$ の時 $\frac{1}{n} \to 0$ なので、$\frac{1}{n}$ が任意の値よりも小さくなる様に n が取れる。よって $\epsilon \leq 2$ とすると、任意の $\delta > 0$ について $|x - y| < \delta$ だが $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ が成り立たない n が存在する（$\Rightarrow$ その様な x, y が存在する）。これは「f が一様連続である事の否定命題「$\exists\epsilon > 0 \text{ s.t. } \forall\delta > 0,\ \exists x, y \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \neg(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$」を示しているから、$f$ は一様連続でない。

3) $n = 1$ の場合について、$f(x) = \frac{1}{x-1}$ と置く。ここで $x = \frac{1}{n} + 1,\ y = \frac{1}{n+1} + 1\ (n \in \mathbb{N}^+)$ とすると、$|x - y| = \frac{1}{n(n+1)}$ 及び $|f(x) - f(y)| = |n - (n+1)| = 1$ が成り立つ。よって $\epsilon < 1$ とすると、任意の $\delta > 0$ について $|x - y| < \delta$ だが $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ が成り立たない n が存在する。よって f は一様連続でない。

問 7.4

$P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ とする。$x \in P_c$ ならば $y \in P$ が存在して $x = y + c$ となるから、$a_k \leq y_k \leq b_k$ より $a_k + c_k \leq x \leq b_k + c_k$ となる。よって $P_c = [a_1 + c_1, b_1 + c_1] \times \cdots \times [a_n + c_n, b_n + c_n]$ であり、P_c は閉区間の直積である。

P_c の任意の分割 Δ' 及び代表点 ξ'_k を平行移動により P の分割 Δ 及び代表点 $\xi_k = \xi'_k - c_k$ と結びつける事で

$$\sum_{k=1}^{k(\Delta')} f_c(\xi'_k) v(I'_k) = \sum_{k=1}^{k(\Delta)} f(\xi_k) v(I_k)$$

が成り立つ。f は可積分函数なので $\delta(\Delta) \to 0$ の時右辺は収束し、よって左辺も $\delta(\Delta') \to 0$ で収束するから f_c も P_c 上可積分である。

問 7.5

f, g は可積分なので f, g は P 上有界であり、或る $C \geq 0$ が存在して $|f(x)| \leq C,\ |g(x)| \leq C$ が成り立つ。この時任意の $x, y \in P$ について

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)(g(x) - g(y)) + (f(x) - f(y))g(y)| \\ &\leq C|g(x) - g(y)| + C|f(x) - f(y)|\end{aligned}$$

が成り立つので、

$$a(fg, I_k) \leq C(a(f, I_k) + a(g, I_k))$$

となる [*1]。ここで P が分割 Δ により閉区間の直積の集合 $\mathcal{I}(\Delta) = \{I_1, \ldots, I_{k(\Delta)}\}$ に分割されるとすると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k(\Delta)} a(fg, I_k)v(I_k) &\leq \sum_{k=1}^{k(\Delta)} C(a(f, I_k) + a(g, I_k))v(I_k) \\ &= C\left(\sum_{k=1}^{k(\Delta)} a(f, I_k)v(I_k) + \sum_{k=1}^{k(\Delta)} a(g, I_k)v(I_k)\right)\end{aligned}$$

となるが、右辺は f, g が可積分である事から $\delta(\Delta) \to 0$ の時 0 に収束する。よって

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} \sum_{k=1}^{k(\Delta)} a(fg, I_k)v(I_k) = 0$$

が成り立つから fg は P 上可積分である。

問 7.6

$$\begin{aligned}\int_0^t x^n dx &= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{m}{N}t\right)^n \frac{1}{N} \\ &= t^n \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{n+1}} \sum_{m=1}^{N} m^n\end{aligned}$$

ここで $S_n(N) = \sum_{m=1}^{N} m^n$ として、$S_n(N) = \frac{1}{n+1}N^{n+1} + O(N^n)$ を示す。$S_0(N) = N$ より $n = 0$ について成り立つ。或る n について成り立つ時、

$$\begin{aligned}m^{n+1} - (m-1)^{n+1} &= m^{n+1} - \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} m^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^{n-i} m^i \\ \sum_{m=1}^{N} \{m^{n+1} - (m-1)^{n+1}\} &= \sum_{m=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^{n-i} m^i \\ N^{n+1} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^{n-i} \sum_{m=1}^{N} m^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} (-1)^{n-i} S_i(N) + \binom{n+1}{n} S_n(N) \\ S_n(N) &= \frac{1}{n+1}N^{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} (-1)^{n-i} S_i(N) \\ &= \frac{1}{n+1}N^{n+1} + O(N^n)\end{aligned}$$

となるから、帰納的に任意の $n \geq 0$ について成り立つ。よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N^{n+1}} S_N(N) = \frac{1}{n+1}$$

となるので、

$$\int_0^t x^n dx = \frac{1}{n+1} t^n$$

[*1] 誰が考えるんでしょうねこんなの。

問 7.7

任意の区間 $I \subset [0,1]$ について、I 上には有理数と無理数が共に存在するから、f の $[0,1]$ 上の不足和、過剰和は必ずそれぞれ $0,1$ となり一致しない。よってリーマン可積分でない。

問 7.8

1)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x-a)^k} &= \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} \\ &= \begin{cases} \log|x-a| + C & (k=1) \\ -\dfrac{1}{k-1}\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}} + C & (k>1) \end{cases}\end{aligned}$$

C は積分定数である。

2) $x = b\tan\varphi$ として $dx = b\,d\varphi/(\cos\varphi)^2$ より

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^k} &= \frac{1}{b^{2k-1}}\int \frac{1}{(\tan^2\varphi+1)^k}\frac{d\varphi}{(\cos\varphi)^2} \\ &= \frac{1}{b^{2k-1}}\int \frac{d\varphi}{(\tan^2\varphi+1)^{k-1}} \\ &= \frac{1}{b^{2k-1}}\int (\cos^2\varphi)^{k-1}d\varphi\end{aligned}$$

$I_n(x) = \int(\cos^2 x)^n dx$ とすると、$I_0(x) = x,\ I_1(x) = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}(x+\cos x\sin x)$ であり

$$\begin{aligned}I_n(x) &= \int \cos^{2n-1}x(\sin x)'dx \\ &= \cos^{2n-1}x\sin x + (2n-1)\int(\cos^2 x)^{n-1}\sin^2 x\,dx \\ &= \cos^{2n-1}x\sin x + (2n-1)\int(\cos^2 x)^{n-1}dx - (2n-1)\int(\cos^2 x)^n dx \\ 2nI_n(x) &= \cos^{2n-1}x\sin x + (2n-1)I_{n-1}(x) \\ &= \frac{2n-1}{2n-2}\cdot 2(n-1)I_{n-1}(x) + \cos^{2n-1}x\sin x \\ &= \frac{2n-1}{2n-2}\left(\frac{2n-3}{2n-4}\cdot 2(n-2)I_{n-2}(x) + \cos^{2n-3}x\sin x\right) + \cos^{2n-1}x\sin x \\ &= 2\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}I_1(x) + \left(\sum_{k=2}^{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\Big/\frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!}\cos^{2k-1}x\right)\sin x\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} = 2n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = 2n\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$$

となるから

$$\begin{aligned}2nI_n(x) &= \frac{n(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\left\{(x+\cos x\sin x) + \left(\sum_{k=2}^{n}\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{k(2k)!}\cos^{2k-1}x\right)\sin x\right\} \\ I_n(x) &= \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\left\{x + \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{4^k(k!)^2}{2k(2k)!}\cos^{2k-1}x\right)\sin x\right\}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^k} &= \frac{1}{b^{2k-1}} I_{k-1}(\varphi) \\ &= \frac{1}{b^{2k-1}} \frac{(2(k-1))!}{4^{k-1}((k-1)!)^2} \left\{ \varphi + \left(\sum_{m=1}^{k-1} \frac{4^m (m!)^2}{2m(2m)!} \cos^{2m-1}\varphi \right) \sin\varphi \right\}\end{aligned}$$

$\varphi = \arctan\frac{x}{b}$ より

$$\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^k} = \frac{1}{b^{2k-1}} \frac{(2(k-1))!}{4^{k-1}((k-1)!)^2} \left[\arctan\frac{x}{b} + \left\{ \sum_{m=1}^{k-1} \frac{4^m (m!)^2}{2m(2m)!} \left(\cos\arctan\frac{x}{b} \right)^{2m-1} \right\} \sin\arctan\frac{x}{b} \right] + C$$

を得る [*2]。

3)

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,dx}{(x^2+b^2)^k} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+b^2)}{(x^2+b^2)^k} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\log(x^2+b^2) + C & (k=1) \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k-1}\dfrac{1}{(x^2+b^2)^{k-1}} + C & (k>1) \end{cases}\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\int \frac{cx+d}{((x-a)^2+b^2)^k} dx &= \int \frac{c(x-a)+ac+d}{((x-a)^2+b^2)^k} dx \\ &= c \int \frac{(x-a)d(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^k} + (ac+d) \int \frac{d(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^k}\end{aligned}$$

とすれば上より求まる。

問 7.9

$\deg f \le \deg g$ ならば、約分により多項式 $r(t)$ を用いて $\frac{g(t)}{f(t)}$ を $\frac{g'(t)}{f(t)} + r(t)$ $(\deg g' < \deg f)$ の形に書き直す事が出来る。$\int r(t)dt$ は多項式となるので、$\deg g \le \deg f$ の場合について示せばよい。

$f(t)$ の実根を $\{a_1, \ldots, a_r\}$、虚根を $\{b_1 + ic_1, \ldots, b_s + ic_s\}$ $(b_n, c_n \in \mathbb{R})$ とすると、虚根は適宜並び替える事で $b_n + ic_n = \overline{b_{s-n} + ic_{s-n}} = b_{s-n} - ic_{s-n}$ を満たす様に取る事が出来る。この時、

$$\begin{aligned}f(t) &= f(0) \prod_{n=1}^{r} (t-a_n)^{k_n} \prod_{n=1}^{s/2} (t-b_n-ic_n)^{l_n} (t-b_{s-n}+ic_{s-n})^{l_n} \\ &= f(0) \prod_{n=1}^{r} (t-a_n)^{k_n} \prod_{n=1}^{s/2} ((t-b_n)^2 + c_n^2)^{l_n}\end{aligned}$$

となるから

$$\frac{g(t)}{f(t)} = \frac{g(0)}{f(0)} \left(\sum_{n=1}^{r} \sum_{m=1}^{k_n} \frac{A_{n,m}}{(t-a_n)^m} + \sum_{n=1}^{s/2} \sum_{m=1}^{l_n} \frac{B_{n,m}x + C_{n,m}}{((t-b_n)^2 + c_n^2)^m} \right)$$

と部分分数分解できる。よって前問からこの積分は初等函数で表される。

[*2] 明示公式が欲しくてやった。反省はしていない。

問 7.10

1)

$$\begin{aligned}L &= \sqrt{(2\delta)^2 + (g(t+\delta) - g(t-\delta))^2} \\ &= \sqrt{(2\delta)^2 + (2\delta\, Df(t))^2} \\ &= 2\delta\sqrt{1 + (Df(t))^2} \\ h(t) &= \sqrt{1 + (Df(t))^2}\end{aligned}$$

2)

$$Df(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

より

$$\begin{aligned}\int_c^d h(t)dt &= \int_c^d \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}}\, dt \\ &= \int_c^d \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\end{aligned}$$

$t = \cos\varphi$ とすると $dt = -\sin\varphi\, d\varphi$ なので

$$\begin{aligned}\int_c^d \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= -\int_{\arccos c}^{\arccos d} d\varphi \\ &= \arccos c - \arccos d \\ &= \theta\end{aligned}$$

3)

$$Df(x) = -\frac{\alpha^2 x}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}}$$

なので

$$\int_{-1/\alpha}^{t} \sqrt{1 + \frac{\alpha^4 t^2}{1-\alpha^2 t^2}}\, dt = \int_{-1/\alpha}^{t} \sqrt{\frac{1-\alpha^2(1-\alpha^2)t^2}{1-\alpha^2 t^2}}\, dt$$

$u = \alpha t$ とすると $du = \alpha\, dt$ であり

$$\frac{1}{\alpha}\int_{-1}^{\alpha t} \sqrt{\frac{1-(1-\alpha^2)u^2}{1-u^2}}\, du$$

問 7.11

1)

$$D\ell(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ Df(t) \end{pmatrix}$$

より

$$L(c,d) = \int_c^d \sqrt{1 + (Df(t))^2}\, dt$$

2)

$$\begin{aligned}L(c,d) &= \int_c^d \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt \\ &= \int_c^d dt \\ &= d - c\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
L(c,d) &= \int_c^d \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t}\, dt \\
&= \int_c^d \sqrt{\cosh 2t}\, dt \\
&= \int_c^d \sqrt{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}}\, dt
\end{aligned}$$

$u^{-1} = e^{2t} + e^{-2t}$ とすると $-u^{-2}du = 2(e^{2t} - e^{-2t})dt = 2\sqrt{(e^{2t}+e^{-2t})^2 - 4}\, dt = 2\sqrt{u^2-4}\, dt$ より

$$\int_c^d \sqrt{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}}\, dt = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{1/(e^{2c}+e^{-2c})}^{1/(e^{2d}+e^{-2d})} \frac{1}{u\sqrt{u(u^2-4)}} du$$

? [*3]

問 7.12

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{z} &= z^{\frac{1}{n}} \\
&= \exp\left(\frac{1}{n}\log z\right)
\end{aligned}$$

ここで $\log z = \mathrm{Log}\, z + 2\pi i m$ $(m \in \mathbb{Z})$ とすると

$$\sqrt[n]{z} = \exp\left(\frac{1}{n}\mathrm{Log}\, z\right) \exp\left(2\pi i \frac{m}{n}\right)$$

ここで $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$ ならば $\exp\left(2\pi i \frac{m}{n}\right) = 1$ なので、$\sqrt[n]{z}$ は $m = 1, \ldots, n$ について相違なる値を取る。よって n 個の分枝が生じる。

問 7.13

$$\begin{aligned}
a^z a^u &= \exp\{z(\mathrm{Log}\, a + 2\pi i n)\} \exp\{w(\mathrm{Log}\, a + 2\pi i n)\} \quad (n \in \mathbb{Z}) \\
&= \exp\{(z+w)(\mathrm{Log}\, a + 2\pi i n)\} \\
&= a^{z+w}
\end{aligned}$$

より指数法則を満たす。

$z = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(\gcd(p,q) = 1,\ q \geq 1)$ ならば前問より q 個の分枝が生じる。z が無理数であれば、$nz \in \mathbb{Z}$ なる整数 n は存在しないので無数の分枝が生じる。$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R},\ y \neq 0)$ ならば

$$\begin{aligned}
a^z &= \exp\{(x+iy)(\mathrm{Log}\, a + 2\pi i n)\} \quad (n \in \mathbb{Z}) \\
&= \exp\{(x+iy)\mathrm{Log}\, a + 2\pi i n x - 2\pi n y\}
\end{aligned}$$

となり無数の分枝が生じる。

問 7.14

1)

$$\frac{dy}{dx} = \cos x = \pm\sqrt{1-y^2}$$

[*3] WolframAlpha 大先生によると $\int \sqrt{\frac{1+4x^2}{1+x^2}} dx$ なる第二種楕円積分になる。らしいです？

2) $\sin x$ は連続写像であり $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上狭義単調増加なので、定理 *2.2.19* より全単射であり、逆写像が存在して連続である。

3) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に於いて $\frac{dy}{dx} \geq 0$ より

$$\frac{d\mathrm{Arcsin}\, y}{dy} = 1 \Big/ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

よって $\mathrm{Arcsin}\, 0 = 0$ より

$$\mathrm{Arcsin}\, y = \int_0^y \frac{dy'}{\sqrt{1-y'^2}}$$

問 7.15

1) $x = \cos^{-1} y \geq 0$ と置くと、$[-1, 1]$ 上で $\frac{dy}{dx} < 0$ なので

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

となり、$\mathrm{Arccos}\, 1 = 0$ より

$$\mathrm{Arccos}\, y = -\int_1^y \frac{dy'}{\sqrt{1-y'^2}} = \int_y^1 \frac{dy'}{\sqrt{1-y'^2}}$$

2) $x = \tan^{-1} y$ と置くと

$$\frac{dx}{dy} = \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$$

となり、$\mathrm{Arctan}\, 0 = 0$ より

$$\mathrm{Arctan}\, y = \int_0^y \frac{dy'}{1+y'^2}$$

3)

$$\tan^{-1} y = \int_0^y \frac{dy'}{1+y'^2} + 2\pi$$

問 7.16

1) $z \in V$ について $w \in U$ が存在して $z = \exp w$ が成り立つ。この時

$$\begin{aligned} \log z &= w \\ \mathrm{Log}\, z + 2\pi i n &= w \qquad (n \in \mathbb{Z}) \\ \mathrm{Log}\, z &= w - 2\pi i n \end{aligned}$$

$\mathrm{Log}\, z,\ w \in U$ より $n = 0$ なので、Log は V 上で一価函数である。

2) $\mathrm{Log}\, 1 = 0$ より

$$f(w) = w$$

3) $\exp(\widetilde{\ell}(t)) = \ell(t)$ より

$$\widetilde{\ell}(t) = \log \ell(t) = \mathrm{Log}\, \ell(t) + 2\pi i n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$\widetilde{\ell}(0) = 0$ より $n = 0$ なので、$\widetilde{\ell}$ は一意に定まる。

4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^1 \frac{D\ell(t)}{\ell(t)} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i n \ell(t)}{\ell(t)} dt \\ &= n \int_0^1 dt \\ &= n \end{aligned}$$

また

$$\ell(1) = \exp(2\pi i n)$$
$$\widetilde{\ell}(1) = 2\pi i n$$

第 8 回

問 8.1

1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2px+q}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+p)^2+q-p^2}}$$

$x+p=\sqrt{q-p^2}\tan t$ とすると $dx=\sqrt{q-p^2}\frac{dt}{\cos^2 t}$ であり

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+p)^2-(p^2-q)}} &= \int \frac{1}{\sqrt{\tan^2 t+1}}\frac{dt}{\cos^2 t}\\ &= \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt\end{aligned}$$

$s=\sin t$ とすると、$s=\tan t/\sqrt{1+\tan^2 t}=(x+p)/\sqrt{q-p^2+(x+p)^2}=(x+p)/\sqrt{x^2+2px+q}$ となり

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}\right)ds\\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{s+1}{s-1}\right|+C\\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+p+\sqrt{x^2+2px+q}}{x+p-\sqrt{x^2+2px+q}}\right|+C\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\int \frac{\cot x}{\log|\sin x|}dx &= \int \frac{(\log|\sin x|)'}{\log|\sin x|}dx\\ &= \log|\log|\sin x||+C\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx\,dx &= \int e^{ax}\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}dx\\ &= \frac{1}{2}\int(e^{(a+ib)x}+e^{(a-ib)x})dx\\ &= \frac{1}{2(a^2+b^2)}\left\{(a-ib)e^{(a+ib)x}+(a+ib)e^{(a-ib)x}\right\}+C\\ &= \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}\left(a\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}+b\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}\right)+C\\ &= \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)+C\end{aligned}$$

4) $x^4-1=(x^2+1)(x+1)(x-1)$ より

$$\frac{x}{x^4-1}=\frac{\alpha x+\beta}{x^2+1}+\frac{\gamma}{x+1}+\frac{\delta}{x-1}$$

とすると

$$\begin{aligned}
\alpha x+\beta+\frac{x^2+1}{x+1}\gamma+\frac{x^2+1}{x-1}\delta &= \frac{x}{x^2-1}\\
\alpha i+\beta &= \frac{i}{-2}\\
\frac{x+1}{x^2+1}(\alpha x+\beta)+\gamma+\frac{x+1}{x-1}\delta &= \frac{x}{x^3-x^2+x-1}\\
\gamma &= \frac{-1}{-4}\\
\frac{x-1}{x^2+1}(\alpha x+\beta)+\frac{x-1}{x+1}\gamma+\delta &= \frac{x}{x^3+x^2+x+1}\\
\delta &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

となるので *(Heaviside cover-up method)*

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^4-1} &= \frac{1}{4}\left(-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\\
\int\frac{x}{x^4-1}dx &= \frac{1}{4}\left(-\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{1}{x-1}dx\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(-\log|x^2+1|+\log|x+1|+\log|x-1|\right)+C\\
&= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+C
\end{aligned}$$

5)

$$\frac{2x-5}{(x+3)(x+1)^2}=\frac{\alpha}{x+3}+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

とすると

$$\begin{aligned}
\alpha+\frac{x+3}{x+1}\beta+\frac{x+3}{(x+1)^2}\gamma &= \frac{2x-5}{(x+1)^2}\\
\alpha &= -\frac{11}{4}\\
\frac{(x+1)^2}{x+3}\alpha+(x+1)\beta+\gamma &= \frac{2x-5}{x+3}\\
\gamma &= -\frac{7}{2}
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{x+3}+\frac{\beta}{x+1} &= \frac{2x-5-\gamma(x+3)}{(x+3)(x+1)^2}\\
&= \frac{11}{2(x+3)(x+1)}\\
\frac{x+1}{x+3}\alpha+\beta &= \frac{11}{2(x+3)}\\
\beta &= \frac{11}{4}
\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{2x-5}{(x+3)(x+1)^2}=\frac{1}{4}\left(-\frac{11}{x+3}+\frac{11}{x+1}-\frac{14}{(x+1)^2}\right)$$

$x=\tan\varphi$ とすると $\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\int d\varphi=\varphi+C=\arctan x+C$ なので

$$\begin{aligned}\int\frac{2x-5}{(x+3)(x+1)^2}dx&=\frac{1}{4}\left(-\int\frac{11}{x+3}dx+\int\frac{11}{x+1}dx-\int\frac{14}{(x+1)^2}dx\right)\\&=\frac{1}{4}\left(-11\log|x+3|+11\log|x+1|-14\arctan x\right)+C\\&=\frac{1}{4}\left(11\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right|-14\arctan x\right)+C\end{aligned}$$

6)

$$\int\frac{x^7}{x^{12}-1}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^4}{x^{12}-1}(x^4)'dx$$

$u=x^4$ とすると

$$\frac{1}{4}\int\frac{x^4}{x^{12}-1}x^3dx=\frac{1}{4}\int\frac{u}{u^3-1}du$$

ここで

$$\frac{u}{u^3-1}=\frac{\alpha}{u-1}+\frac{\beta u+\gamma}{u^2+u+1}$$

とすると

$$\begin{aligned}\alpha+\frac{u-1}{u^2+u+1}(\beta u+\gamma)&=\frac{u}{u^2+u+1}\\\alpha&=\frac{1}{3}\\frac\beta u+\gamma u^2+u+1&=\frac{u}{u^3-1}-\frac{\alpha}{u-1}\\&=\frac{-(u-1)}{3(u^2+u+1)}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\frac{u}{u^3-1}&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{u-1}{u^2+u+1}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{2}\frac{2u+1}{u^2+u+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right)\end{aligned}$$

ここで $u+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\varphi$ とすると

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}&=\frac{2}{\sqrt{3}}\int d\varphi\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C\end{aligned}$$

故、

$$\begin{aligned}\int\frac{u}{u^3-1}du&=\frac{1}{3}\left(\int\frac{du}{u-1}-\frac{1}{2}\int\frac{2u+1}{u^2+u+1}du+\frac{3}{2}\int\frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\log|u-1|-\frac{1}{2}\log|u^2+u+1|+\sqrt{3}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)+C\end{aligned}$$

7) $t = \tan\frac{x}{2}$ とすると $dt = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{2}dx$ であり、$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$ より

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx &= \int \left(1 - \frac{1}{1+\sin x}\right)dx \\
&= x - 2\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2} \\
&= x - 2\int \frac{1}{(1+t)^2}d(1+t) \\
&= x + \frac{2}{1+t} + C \\
&= x + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C
\end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)}dx \\
&= \int (x-\sqrt{x^2-1})dx
\end{aligned}$$

$x = 1/\cos t$ とすると

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-1}dx &= \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt
\end{aligned}$$

$s = \sin t$ として

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt &= \int \left(\frac{1}{1-s^2} - 1\right)\frac{1}{1-s^2}ds \\
&= \int \frac{ds}{(1-s)^2(1+s)^2} - \int \frac{ds}{(1-s)(1+s)}
\end{aligned}$$

9) $x = \tan t$ とすると

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{Arctan}\, x\, dx &= \int t(\tan t)' dt \\
&= t\tan t - \int \tan t\, dt \\
&= t\tan t + \frac{1}{2}\int \frac{-2\sin t}{1-\sin^2 t}d(\sin t) \\
&= t\tan t + \frac{1}{2}\log|1-\sin^2 t| + C \\
&= x\mathrm{Arctan}\, x + \frac{1}{2}\log\left|1-(\sin \mathrm{Arctan}\, x)^2\right| + C
\end{aligned}$$

10)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x^2}{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}dx &= \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - 1\right)\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}dx \\
&= \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x+x^2}} - \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}dx
\end{aligned}$$

ここで第 *3* 項の積分は *1)* で $p=\frac{1}{2},\ q=1$ の場合である。他の *2* 項について、$t=1/(x-a)\ (a\in\mathbb{R})$ とすると $x=\frac{1}{t}+a$ より

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1+x+x^2}} &= -\int\frac{t}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}+a\right)+\left(\frac{1}{t}+a\right)^2}}\frac{dt}{t^2}\\
&= -\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+(1+at)t+(1+at)^2}}\\
&= -\int\frac{dt}{\sqrt{(a^2+a+1)t^2+(2a+1)t+1}}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{a^2+a+1}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{2a+1}{a^2+a+1}t+\frac{1}{a^2+a+1}}}
\end{aligned}$$

となるから、$a=\pm1$ とすれば 1) より求まる。

問 8.2

1)

$$\begin{aligned}
\int_0^1|D\ell_1(t)|dt &= \int_0^1\left|\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t\right|dt\\
&= \int_0^1\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t\,dt\\
&= [\ell_1(t)]_0^1\\
&= 1
\end{aligned}$$

ℓ と ℓ_1 により定まる直線はいづれも $0\to1$ の直線。

2)

$$\begin{aligned}
\int_0^1|D\ell_2(t)|dt &= \int_0^1\left|-\pi\sin\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right|dt\\
&= 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^1\sin\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)\pi\right)dt\\
&= 2\left[-\cos\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right]_{1/2}^1\\
&= 2\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos0\right)\\
&= 2
\end{aligned}$$

l_2 により定まる直線は $0\to1\to0$ であり ℓ により定まる直線を辿った後逆に遡る。

3) 微積分学の基本定理から直ちに計算でき不自然なので $\displaystyle\int_0^s\left|\frac{dl_2}{dt}(t)\right|dt$ の事であると考えられる。

$$\int_0^s|Dl_2(t)|dt=\int_0^s\left|-\pi\sin\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right|dt$$

$s\le\frac{1}{2}$ ならば

$$\begin{aligned}
\int_0^s\left|-\pi\sin\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right|dt &= -\pi\int_0^s\sin\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)\pi\right)dt\\
&= \left[\cos\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right]_0^s\\
&= \cos\left(\left(s-\frac{1}{2}\right)\pi\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$= \cos\left(\left(s - \frac{1}{2}\right)\pi\right)$$

$s \geq \frac{1}{2}$ ならば

$$\begin{aligned}
\int_0^s \left|-\pi \sin\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)\pi\right)\right| dt &= -\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \sin\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)\pi\right) dt + \pi \int_{\frac{1}{2}}^s \sin\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)\pi\right) dt \\
&= 1 - \left[\cos\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)\pi\right)\right]_{\frac{1}{2}}^s \\
&= 2 - \cos\left(\left(s - \frac{1}{2}\right)\pi\right)
\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^s |Dl_2(t)| dt = \begin{cases} \cos\left(\left(s - \frac{1}{2}\right)\pi\right) & s \leq \frac{1}{2} \\ 2 - \cos\left(\left(s - \frac{1}{2}\right)\pi\right) & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

4) $D\ell_3(t)$ が $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n] \in [0, 1]$ で $D\ell_3(t) \geq 0$、それ以外の領域で $D\ell_3(t) < 0$ を満たすとすると、$b_0 = 0,\ a_{n+1} = 1$ として

$$\begin{aligned}
L(\ell_3) &= \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |D\ell_3(t)| dt + \sum_{i=0}^n \int_{b_i}^{a_{i+1}} |D\ell_3(t)| dt \\
&\geq \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} D\ell_3(t) dt + \sum_{i=0}^n \int_{b_i}^{a_{i+1}} D\ell_3(t) dt \\
&= \int_0^1 D\ell_3(t) dt \\
&= 1
\end{aligned}$$

ここで

$$\ell_3(t) = \frac{1}{2}\{1 - \cos((2n+1)\pi t)\}$$

とすると ℓ_3 は条件を満たし、$L(\ell_3) = n$ となる。

問 8.3

以下 $(\!(x, y)\!) = (\min\{x, y\},\ \max\{x, y\})$ とする。

1) $0 < \varphi(a) < 1$ と仮定すると、$(\alpha, \beta) = (\!(\psi(0), \psi(1))\!)$ と置いた時 $a < \alpha$ であり、中間値の定理から $c \in (\alpha, \beta)$ で $\varphi(c) = \varphi(a)$ を満たすものが存在する。ところが φ は逆写像を持つ事から単射でなければならず矛盾。よって $\varphi(a) = 0$ または $\varphi(a) = 1$ である。

2)

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi(t) &= t \\
D\psi \circ \varphi(t) \cdot D\varphi(t) &= 1
\end{aligned}$$

$D\varphi(t) = 0$ とすると左辺は必ず 0 になり矛盾する。よって $D\varphi(t_0) \neq 0$ なる $t_0 \in [a, b]$ は存在しない。
$\varphi(a) = 0$ とすると、任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して、$x - a < \delta$ の時

$$\left|\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} - D\varphi(a)\right| < \epsilon$$

が成り立つ。この時

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} < D\varphi(a) + \epsilon$$

が成り立つから

$$D\varphi(a) \geq \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} > 0$$

であり、上より $\forall t \in [a,b],\ D\varphi(t) > 0$ となる。$\varphi(a)=1$ の場合も同様。

3) 2) より $\varphi(a)=0 \Leftarrow \varphi(b)=0$ 及び $\varphi(a)=1 \Leftarrow \varphi(b)=0$ が成り立つので

$$\begin{aligned}
L_\varphi &= \int_a^b |D(l\circ\varphi)(t)|dt \\
&= \int_a^b |Dl\circ\varphi(t)D\varphi(t)|dt \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_a^b |Dl\circ\varphi(t)|D\varphi(t)dt & \varphi(a)=0 \\ \displaystyle\int_b^a |Dl\circ\varphi(t)|D\varphi(t)dt & \varphi(a)=1 \end{cases} \\
&= \int_0^1 |Dl\circ\varphi(u)|du \quad (u=\varphi(t)) \\
&= L
\end{aligned}$$

4) 前問 4) を参照。

5) $DL(t) = \|D\ell(t)\| > 0$ より L は狭義単調増加なので、$[0,1]$ から I への全単射写像であり、L^{-1} が存在して微分可能である。また $D(L^{-1}) = 1/(DL\circ L^{-1})$ であり L は C^1 級かつ $DL \neq 0$ なので $D(L^{-1})$ も連続。

6)

$$\begin{aligned}
\|D\ell'(s)\| &= \|D\ell\circ\rho(s)D\rho(s)\| \\
&= \|D\ell\circ\rho(s)\|\frac{1}{\|D\ell\circ\rho(s)\|} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^s \|Dl'(s')\|ds' = s$ より s は ℓ' の長さそのものである。

7)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dh_1}{dt}(t), \frac{dh_2}{dt}(t)\right) &= \frac{d\ell}{dt}(\varphi(t))\frac{d\varphi}{dt}(t) \\
&= \left(\frac{d\ell_1}{dt}(\varphi(t)), \frac{d\ell_2}{dt}(\varphi(t))\right)\frac{d\varphi}{dt}(t) \\
&= (f(\varphi(t)), g(\varphi(t)))\frac{d\varphi}{dt}(t)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}h_1(t) = f\circ\varphi(t)\dfrac{d}{dt}\varphi(t) \\ \dfrac{d}{dt}h_2(t) = g\circ\varphi(t)\dfrac{d}{dt}\varphi(t) \end{cases}$$

問 8.4

1)

$$
\begin{aligned}
D\varphi &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) & \dfrac{\partial}{\partial \theta}(r\cos\theta) \\ \dfrac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta) & \dfrac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\
\det D\varphi &= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta \\
&= r
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} \\
&= \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \left(-\frac{y}{x^2}\cos^2\arctan\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} \\
&= (\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{1}{r}\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} \\
&= \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{x}\cos^2\arctan\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} \\
&= (\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left[(\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{1}{r}\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\right]^2 \\
&= (\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r} - (\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r}\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta}(\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta} \\
&= (\cos\theta)^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r}\sin^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial r} \\
&\quad - \left(\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r^2}\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\
&= (\cos\theta)^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\sin^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{2}{r^2}\cos\theta\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r^2}\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left[(\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\right]^2 \\
&= (\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r}(\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r} + (\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r}\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta} \\
&= (\sin\theta)^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \left(\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r}\cos^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial r} \\
&\quad + \left(\frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}
\end{aligned}
$$

$$= (\sin\theta)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\cos^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \left(\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

以上より

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
&= (\cos\theta)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\sin^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\frac{2}{r^2}\cos\theta\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\frac{1}{r^2}\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\
&\quad + (\sin\theta)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\cos^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \left(\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}
\end{aligned}$$

2) 問題の φ は極座標になっていないし $\det D\varphi \equiv 0$ なので、φ の第 *3* 要素は $r\sin\theta$ の誤りと考えられる。この時

$$\begin{aligned}
D\varphi(r,\theta,\psi) &= \begin{pmatrix}
\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta\cos\psi) & \frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta\cos\psi) & \frac{\partial}{\partial\psi}(r\cos\theta\cos\psi) \\
\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta\sin\psi) & \frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta\sin\psi) & \frac{\partial}{\partial\psi}(r\cos\theta\sin\psi) \\
\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta) & \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta) & \frac{\partial}{\partial\psi}(r\sin\theta)
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\cos\theta\cos\psi & -r\sin\theta\cos\psi & -r\cos\theta\sin\psi \\
\cos\theta\sin\psi & -r\sin\theta\sin\psi & r\cos\theta\cos\psi \\
\sin\theta & r\cos\theta & 0
\end{pmatrix} \\
\det D\varphi(r,\theta,\psi) &= \sin\theta(-r\sin\theta\cos\psi\cdot r\cos\theta\cos\psi - r\cos\theta\sin\psi\cdot r\sin\theta\sin\psi) \\
&\qquad - r\cos\theta(\cos\theta\cos\psi\cdot r\cos\theta\cos\psi + r\cos\theta\sin\psi\cdot\cos\theta\sin\psi) \\
&= -r^2\cos\theta\sin^2\theta(\cos^2\psi + \sin^2\psi) - r^2\cos^3\theta(\cos\psi^2 + \sin^2\psi) \\
&= -r^2\cos\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= -r^2\cos\theta
\end{aligned}$$

第 9 回

問 9.1

1)

$$\int_S dxdy = \int_{x^2+y^2\le 1} dxdy - \int_{4x^2+9y^2<1} dxdy$$

$S(a,b) = \int_{x^2/a^2+y^2/b^2\le 1} dxdy$ とすると

$$\begin{aligned} S(a,b) &= \int_{-a}^{a}\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dydx \\ &= 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx \end{aligned}$$

$x = a\cos\varphi$ とすると

$$\begin{aligned} 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx &= 2b\int_{\pi}^{0}\sqrt{1-\cos^2\varphi}(-a\sin\varphi)d\varphi \\ &= 2ab\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi \\ &= 2ab\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi \\ &= ab\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\pi} \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} \int_S dxdy &= S(1,1) - S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) \\ &= \pi - \frac{1}{6}\pi \\ &= \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \int_{x^2/a^2+y^2/b^2<1}(x+y)dxdy &= \int_{-a}^{a}\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}(x+y)dydx \\ &= \int_{-a}^{a}\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}dx \\ &= 2b\int_{-a}^{a}x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx \end{aligned}$$

$u = \sqrt{1-x^2/a^2}$ とすると

$$\begin{aligned} 2b\int_{-a}^{a}x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx &= 2b\int_0^1(-a\sqrt{1-u^2})u\left(a\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du + 2b\int_1^0 a\sqrt{1-u^2}\cdot u\left(-a\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du \\ &= 2a^2b\int_0^1 u^2du - 2a^2b\int_0^1 u^2du \\ &= 0 \end{aligned}$$

3) $C \in \mathbb{R}$ を

$$C = \max_{k \in \{1,\ldots,r\}} |f(p_k) - g(p_k)|$$

と定めると、任意の $x \in P$ に対し $|f(x) - g(x)| \leq C$ が成り立つ。
ここで任意の $\epsilon > 0$ に対し、Δ を $\delta(\Delta) < \epsilon/(rC)$ なる P の分割とし $\mathcal{I}(\Delta) = \{I_1, \ldots, I_{k(\Delta)}\}$ とする。$k \in \{1, \ldots, k(\Delta)\}$ の内、I_k が $p_1, \ldots, p_r$ の何れかか 1 つ以上を含むものを $\{k_1, \ldots, k_l\}$ とする。点が複数の I_k に同時に含まれる事は無いから、$l \leq r$ が成り立つ。
$\{k_1, \ldots, k_l\}$ に含まれない任意の k について $\forall x \in I_k, f(x) = g(x)$ となるから、任意の代表点 $\{\xi_k\}$ について

$$\begin{aligned}
s(f-g;\Delta;\xi) &= \sum_{k=1}^{k(\Delta)} (f(\xi_k) - g(\xi_k))v(I_k) \\
&= \sum_{i=1}^{l} (f(\xi_{k_i}) - g(\xi_{k_i}))v(I_{k_i}) \\
&< \sum_{i=1}^{l} C\frac{\epsilon}{rC} \\
&= \frac{l}{r}\epsilon \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

より

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} s(f-g;\Delta;\xi) = \int_P (f(x) - g(x))dx = 0$$

が成り立つので $f - g$ は P 上可積分。よって $g = f - (f - g)$ も P 上可積分であり、

$$\int_P g(x)dx = \int_P f(x)dx$$

が成り立つ。

4) $C \in \mathbb{R}$ を

$$C = \max\{\ |\ f(x) - g(x)\ |\ \mid \exists t \in [0,1] \text{ s.t. } l(t) = x\,\}$$

と定めると、任意の $x \in P$ に対し $|f(x) - g(x)| \leq C$ が成り立つ。又 $D\ell$ は $[0,1]$ で連続なので、或る $L > 0$ が存在して任意の $t \in [0,1]$ に対し $\|D\ell(t)\| \leq L$ が成り立つ。
$J_i = \left[\dfrac{k}{N}, \dfrac{i+1}{N}\right]$ と置いて $[0,1]$ を $\{J_i\}_{i=0}^{N-1}$ に分割する。この時、任意の $t \in J_i$ について $\left\|\ell(t) - \ell\left(\dfrac{i}{N}\right)\right\| \leq \dfrac{L}{N}$ が成り立つから、$K_i = \left[\ell\left(\dfrac{i}{N}\right) - \dfrac{L}{N},\ \ell\left(\dfrac{i}{N}\right) + \dfrac{L}{N}\right]$ とした時

$$\sum_{i=0}^{N-1} v(K_i) = N\left(\frac{2L}{N}\right)^2 = \frac{(2L)^2}{N}$$

が成り立つ。
ここで K_i の各辺を延長した P の分割 Δ を考える。即ち、任意の K_i について $K_i = \bigcup_{I \in X} I$ なる $X \subset \mathcal{I}(\Delta)$ が存在するとする。K_i の定義より $\delta(\Delta) \leq 2\sqrt{2}L/N$ である。$\mathcal{I}(\Delta)$ について $k \in \{1, \ldots, k(\Delta)\}$ の内、I_k が K_i の何れかに含まれるものを $\{k_1, \ldots, k_l\}$ とする。

$\{k_1, \ldots, k_l\}$ に含まれない任意の k について $\forall x \in I_k, f(x) = g(x)$ となるから、任意の代表点 $\{\xi_k\}$ について

$$\begin{aligned}
s(f-g;\Delta;\xi) &= \sum_{k=1}^{k(\Delta)} (f(\xi_k) - g(\xi_k))v(I_k) \\
&= \sum_{i=1}^{l} (f(\xi_{k_i}) - g(\xi_{k_i}))v(I_{k_i}) \\
&\le \sum_{i=1}^{l} Cv(I_{k_i}) \\
&\le C\frac{(2L)^2}{N}
\end{aligned}$$

ここで N は任意であり、C, L は N に依らない定数なので、$N \to \infty$ とすると $\delta(\Delta) \to 0$ であり

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} s(f-g;\Delta;\xi) = \int_P (f(x) - g(x))dx = 0$$

が成り立つので $f - g$ は P 上可積分。よって $g = f - (f - g)$ も P 上可積分であり、

$$\int_P g(x)dx = \int_P f(x)dx$$

が成り立つ。

問 9.2

1)

$$Df(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

となるので

$$\begin{aligned}
L(s) &= \int_0^s \sqrt{1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} dt \\
&= \int_0^s \sqrt{1 + \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4}} dt \\
&= \int_0^s \sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2} dt \\
&= \int_0^s \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt \\
&= \frac{1}{2}\left[e^t - e^{-t}\right]_0^s \\
&= \frac{e^s - e^{-s}}{2} \\
&= \sinh s
\end{aligned}$$

2) $u = \sqrt{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)$ と置くと

$$Df(t) = -\sqrt{2}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

となるので

$$\begin{aligned}
L(s) &= \int_{-1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}(s-1/2)} \sqrt{1 + \left(-\sqrt{2}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)^2} \frac{du}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}(s-1/2)} \sqrt{\frac{1+u^2}{1-u^2}} du
\end{aligned}$$

これは $k = i$ の第二種楕円積分である。

問 9.3

1) 略

2)

$$\begin{aligned}
\det D\Phi(r,\theta) &= \begin{vmatrix} \dfrac{d}{dr}r\cos\theta & \frac{d}{d\theta}r\cos\theta \\ \dfrac{d}{dr}r\sin\theta & \frac{d}{d\theta}r\sin\theta \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= r
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
\int_S dxdy &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_1^2 r\,drd\theta \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_1^2 d\theta \\
&= \frac{3}{2}[\theta]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\det D\Psi(r,\theta) &= \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} \\
&= \sin\varphi\begin{vmatrix} -r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\cos\theta \\ r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \end{vmatrix} + r\cos\varphi\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= r^2\cos\varphi\sin^2\varphi + r^2\cos^3\varphi \\
&= r^2\cos\varphi
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
F(r) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^r r'^2\cos\varphi\,dr'd\theta d\varphi \\
&= \frac{1}{3}r^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\theta d\varphi \\
&= \frac{2}{3}\pi r^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi \\
&= \frac{2}{3}\pi r^3[\sin\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{2}{3}\pi r^3[\sin\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
\frac{dF}{dr}(r) &= 4\pi r^2
\end{aligned}$$

問 9.4

1) S は $0, v, w$ を頂点とする三角形を成す。

2)

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{aligned} {}^tAA &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v^2 & v \cdot w \\ w \cdot v & w^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで v と w の成す角を θ とすると

$$\begin{aligned} v(S) &= \sqrt{v^2w^2 - (v \cdot w)^2} \\ &= \sqrt{v^2w^2 - v^2w^2\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{v^2w^2\sin^2\theta} \\ &= |v \times w| \end{aligned}$$

と平行四辺形の面積になっちゃいますね？

問 9.5

$$\begin{aligned} DF(x,y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ D_1 f & D_2 f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x\sinh(x^2+y^2) & 2y\sinh(x^2+y^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$s = \sinh(x^2+y^2)$ として

$$\begin{aligned} {}^tDF(x,y)DF(x,y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2xs \\ 0 & 1 & 2ys \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2xs & 2ys \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+4x^2s^2 & 4xys^2 \\ 4xys^2 & 1+4y^2s^2 \end{pmatrix} \\ |{}^tDF(x,y)DF(x,y)| &= (1+4x^2s^2)(1+4y^2s^2) - (4xys^2)^2 \\ &= 1 + 4(x^2+y^2)s^2 \end{aligned}$$

よって

$$S(\Sigma) = \int_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1+4(x^2+y^2)\sinh^2(x^2+y^2)}dxdy$$

極座標変換より

$$\begin{aligned} \int_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1+4(x^2+y^2)\sinh^2(x^2+y^2)}dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2\sinh^2 r^2}r\,drd\theta \\ &= 2\pi\int_0^1 \sqrt{1+4r^2\sinh^2 r^2}r\,dr \end{aligned}$$

多分無理？

第 10 回

問 10.1

1) $(x,y)=t(\pi,0)+s(\pi,\pi)$ より $(t,s)=\frac{1}{\pi}(x-y,y)$ なので、

$$\begin{aligned} s\geq 0 &\Rightarrow y\geq 0\\ t\geq 0 &\Rightarrow x\geq y\geq 0\\ t+s\leq 1 &\Rightarrow x\leq\pi \end{aligned}$$

より $D=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq\pi,\ 0\leq y\leq x\,\}$、或いは $D=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq y\leq\pi,\ y\leq x\leq\pi\,\}$ となる。

2)

$$\int_D \frac{y\sin x}{x}dxdy=\int_0^\pi\int_0^x \frac{y\sin x}{x}dydx=\int_0^\pi\int_y^\pi \frac{y\sin x}{x}dxdy$$

3)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\int_0^x \frac{y\sin x}{x}dydx &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^x dx\\ &=\frac{1}{2}\int_0^\pi x\sin x\,dx\\ &=\frac{1}{2}\int_0^\pi x(-\cos)'\,dx\\ &=-\frac{1}{2}[x\cos x]_0^\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi\cos x\,dx\\ &=-\frac{1}{2}(-\pi-0)+\frac{1}{2}[\sin x]_0^\pi\\ &=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

問 10.2

1) $k=-1$ は半球、$k=0$ は円盤、$k=1$ は z^2 的な

2)

$$DF(x,y)=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ kx/\sqrt{1+k(x^2+y^2)} & ky/\sqrt{1+k(x^2+y^2)}\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}\det{}^tDF(x,y)DF(x,y) &= \begin{vmatrix} 1+\dfrac{k^2x^2}{1+k(x^2+y^2)} & \dfrac{k^2xy}{1+k(x^2+y^2)}\\ \dfrac{k^2xy}{1+k(x^2+y^2)} & 1+\dfrac{k^2y^2}{1+k(x^2+y^2)}\end{vmatrix}\\ &=\left(1+\frac{k^2x^2}{1+k(x^2+y^2)}\right)\left(1+\frac{k^2y^2}{1+k(x^2+y^2)}\right)-\left(\frac{k^2xy}{1+k(x^2+y^2)}\right)^2\\ &=1+\frac{k^2(x^2+y^2)}{1+k(x^2+y^2)}\\ &=1+k-\frac{k}{1+k(x^2+y^2)}\end{aligned}$$

となるから

$$A(k;\,R)=\int_{x^2+y^2\leq R}\sqrt{1+k-\frac{k}{1+k(x^2+y^2)}}dxdy$$

極座標変換より

$$\int_{x^2+y^2\le R}\sqrt{1+k-\frac{k}{1+k(x^2+y^2)}}dxdy=\int_0^{\sqrt{R}}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+k-\frac{k}{1+kr^2}}r\,d\theta dr$$
$$=2\pi\int_0^{\sqrt{R}}\sqrt{1+k-\frac{k}{1+kr^2}}r\,dr$$

$k=0$ の場合は

$$A(0;\,R)=2\pi\int_0^{\sqrt{R}}r\,dr=\pi R$$

$k\neq 0$ の場合、$u^2=1+k-k/(1+kr^2)$ とすると $2u\,du=k^2r\,dr/(1+kr^2)^2=(1+k-u^2)^2r\,dr$ より

$$2\pi\int_0^{\sqrt{R}}\sqrt{1+k-\frac{k}{1+kr^2}}r\,dr=4\pi\int_1^{\sqrt{1+\frac{k^2R}{1+kR}}}\frac{u^2}{(1+k-u^2)^2}du$$
$$=\pi\int_1^{\sqrt{1+\frac{k^2R}{1+kR}}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+k}-u}-\frac{1}{\sqrt{1+k}+u}\right)^2du$$
$$=\pi\int_1^{\sqrt{1+\frac{k^2R}{1+kR}}}\left(\frac{1}{(u-\sqrt{1+k})^2}-\frac{2}{1+k-u^2}+\frac{1}{(u+\sqrt{1+k})^2}\right)du$$

ここで $t=u\pm\sqrt{1+k}$ とすると

$$\int_1^{\sqrt{1+\frac{k^2R}{1+kR}}}\frac{1}{(u\pm\sqrt{1+k})^2}du=\int_{1\pm\sqrt{1+k}}^{\sqrt{1+\frac{k^2R}{1+kR}}\pm\sqrt{1+k}}\frac{1}{t^2}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{t}\right]_{1\pm\sqrt{1+k}}^{\sqrt{1+\frac{k^2R}{1+kR}}\pm\sqrt{1+k}}$$
$$=\frac{1}{1\pm\sqrt{1+k}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2R}{1+kR}}\pm\sqrt{1+k}}$$
$$=\frac{1\mp\sqrt{1+k}}{1-(1+k)}-\frac{\sqrt{1+\frac{k^2R}{1+kR}}\mp\sqrt{1+k}}{(1+\frac{k^2R}{1+kR})-(1+k)}$$
$$=-\frac{1\mp\sqrt{1+k}}{k}+(1+kR)\left(\sqrt{1+\frac{k^2R}{1+kR}}\mp\sqrt{1+k}\right)$$

となる（複合同順）ので

$$\int_1^{\sqrt{1+\frac{k^2R}{1+kR}}}\left(\frac{1}{(u-\sqrt{1+k})^2}+\frac{1}{(u+\sqrt{1+k})^2}\right)du=2\sqrt{(1+kR)(1+kR+k^2R)}-\frac{2}{k}$$

又、

$$2\int_1^{\sqrt{1+\frac{k^2R}{1+kR}}}\frac{1}{1+k-u^2}du=\frac{1}{\sqrt{1+k}}\int_1^{\sqrt{1+\frac{k^2R}{1+kR}}}\left(\frac{1}{u+\sqrt{1+k}}-\frac{1}{u-\sqrt{1+k}}\right)du$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+k}}\log\left|\frac{\sqrt{1+\frac{k^2R}{1+kR}}+\sqrt{1+k}}{\sqrt{1+\frac{k^2R}{1+kR}}-\sqrt{1+k}}\right|$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+k}}\log\left|\frac{\sqrt{1+kR+k^2R}+\sqrt{(1+k)(1+kR)}}{\sqrt{1+kR+k^2R}-\sqrt{(1+k)(1+kR)}}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+k}} \log \left| \frac{\left(\sqrt{1+kR+k^2R} + \sqrt{(1+k)(1+kR)}\right)^2}{1+kR+k^2R-(1+k)(1+kR)} \right|$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1+k}} \log \left| \sqrt{1+kR+k^2R} + \sqrt{(1+k)(1+kR)} \right| - \frac{1}{\sqrt{1+k}} \log |k|$$

以上より

$$A(k;\, R) = \begin{cases} \pi \left(\frac{1}{\sqrt{1+k}} \log |k| - \frac{2}{\sqrt{1+k}} \log \left| \sqrt{1+kR+k^2R} + \sqrt{(1+k)(1+kR)} \right| \right. \\ \qquad \left. +2\sqrt{(1+kR)(1+kR+k^2R)} - \frac{2}{k} \right) & (k \neq 0) \\ \pi R & (k = 0) \end{cases}$$

となる [*4]。

3)

$$\frac{\partial}{\partial k} A(k;\, R) = 2\pi \int_0^{\sqrt{R}} \frac{\partial}{\partial k} \sqrt{\frac{1+kr^2+k^2r^2}{1+kr^2}}\, r\, dr$$
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{R}} \frac{(1+2k)(1+kr^2)-(1+kr^2+k^2r^2)}{2(1+kr^2)\sqrt{(1+kr^2)(1+kr^2+k^2r^2)}} r^3 dr$$
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{R}} \frac{(2+kr^2)k}{2(1+kr^2)\sqrt{(1+kr^2)(1+kr^2+k^2r^2)}} r^3 dr$$

$k > 0$ の場合、被積分函数は正なので $\dfrac{\partial A}{\partial k} > 0$ であり、$A(k;\, R)$ は単調増加する。$k < 0$ の場合、$z \in \mathbb{R}$ 故 $1 + kR^2 \geq 0$ より $R^2 \leq -1/k$ が言えるから、$0 \leq r \leq \sqrt{R}$ より

$$r^2 \leq \sqrt{-\frac{1}{k}}$$
$$kr^2 \geq -(-k)\sqrt{-\frac{1}{k}} = -\sqrt{-k}$$
$$1 + kr^2 \geq 1 - \sqrt{-k}$$

ここから $-1 < k < 0$ については $\frac{\partial A}{\partial k} < 0$ となる。
以上より、k について A の増減は下表の様になる。

k	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$\frac{\partial A}{\partial k}$		$-$	0	$+$	
A		$\searrow$	min	$\nearrow$	

問 10.3

1) 極座標変換から

$$S(R) = \int_D (R) e^{-r^2} r\, dr d\theta$$
$$= \int_0^{\sqrt{R}} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\, d\theta dr$$
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{R}} e^{-r^2} r\, dr$$
$$= \pi \int_0^R e^{-s} ds \qquad (s = r^2)$$

[*4] $k \to -1$ で半球の表面積になるし、多分合ってるんじゃないかなぁ。

ここで任意の $0 < v < w$ について

$$
\begin{aligned}
\left| \int_v^w e^{-s} ds \right| &= -[e^{-s}]_v^w \\
&= e^{-v} - e^{-w} \\
&< e^{-v}
\end{aligned}
$$

これは $v \to +\infty$ の時 $e^{-v} \to 0$ 故コーシーの収束条件を満たし、この広義積分は収束する。

2)

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} S(R) &= \pi \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-s} ds \\
&= \pi \lim_{R\to\infty} [-e^{-s}]_0^R \\
&= \pi \lim_{R\to\infty} (1 - e^{-R}) \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

3) 任意の $1 < v < w$ について

$$
\begin{aligned}
\left| \int_v^w e^{-x^2} dx \right| &= \int_v^w e^{-x^2} dx \\
&< \int_v^w e^{-x} dx \\
&= [-e^{-x}]_v^w \\
&= e^{-v} - e^{-w} \\
&< e^{-v}
\end{aligned}
$$

これは $v \to +\infty$ の時 $e^{-v} \to 0$ 故コーシーの収束条件を満たし、この広義積分は収束する。

4)

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy &= \lim_{R\to\infty} \int_{-\sqrt{R}}^{\sqrt{R}} \int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dydx \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-\sqrt{R}}^{\sqrt{R}} e^{-x^2} \int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} e^{-y^2} dydx
\end{aligned}
$$

ここで任意の R' について

$$
\int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} e^{-y^2} dy = \int_{-R'}^{R'} e^{-y^2} dy - 2\int_{\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R}} e^{-y^2} dy - 2\int_{\sqrt{R}}^{R'} e^{-y^2} dy
$$

となるから、$R' \to \infty$ とすると

$$
\int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} e^{-y^2} dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy - 2\int_{\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R}} e^{-y^2} dy - 2\lim_{R'\to\infty} \int_{\sqrt{R}}^{R'} e^{-y^2} dy
$$

が成り立つ。ここで $F(t) = \int_0^t e^{-x^2} dx$ と置くと、

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy &= \lim_{R\to\infty} \int_{-\sqrt{R}}^{\sqrt{R}} e^{-x^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy - 2\int_{\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R}} e^{-y^2} dy - 2\lim_{R'\to\infty} \int_{\sqrt{R}}^{R'} e^{-y^2} dy \right) dx \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 - 2\lim_{R\to\infty} \int_{-\sqrt{R}}^{\sqrt{R}} e^{-x^2} \int_{\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R}} e^{-y^2} dydx \\
&\quad - 2\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \lim_{R\to\infty} \left(\lim_{R'\to\infty} F(R') - F(\sqrt{R}) \right)
\end{aligned}
$$

ここで

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{R}}^{\sqrt{R}} e^{-x^2}\int_{\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R}} e^{-y^2}dydx &< \int_{-\sqrt{R}}^{\sqrt{R}} e^{-x^2}e^{-(R-x^2)}dx \\ &= \int_{-\sqrt{R}}^{\sqrt{R}} e^{-R}dx \\ &= 2\sqrt{R}e^{-R} \to 0 \qquad (R\to\infty)\end{aligned}$$

及び

$$\lim_{R\to\infty}\left(\lim_{R'\to\infty}F(R')-F(\sqrt{R})\right)=\left(\lim_{R'\to\infty}F(R')-\lim_{R\to\infty}F(\sqrt{R})\right)=0$$

より

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)^2$$

が成り立つ。よって

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx=\sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy}=\sqrt{\pi}$$

問 10.4

1) 線型性・対称性は積分の性質から直ちに従う。

$$\langle f\,|\,f\rangle=\int_{-1}^{1}|f(x)|^2dx\geq 0$$

より正値性が分かり、等号が成立するのは $f(x)\equiv 0$ の時のみである。

2) $p_{a,b}(x)=\dfrac{d^b}{dx^b}(x^2-1)^a$ と置くと

$$\begin{aligned}\langle P_m\,|\,P_n\rangle &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2^m m!}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}p_{m,m}(x)\right)\left(\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}p_{n,n}(x)\right)dx \\ &= \frac{\sqrt{(2m+1)(2n+1)}}{2\cdot 2^{m+n}m!n!}\int_{-1}^{1}p_{m,m}(x)p_{n,n}(x)dx\end{aligned}$$

ここで部分積分より

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}p_{m,m}(x)p_{n,n}(x)dx &= \int_{-1}^{1}p_{m,m}(x)\frac{d}{dx}p_{n,n-1}(x)dx \\ &= [p_{m,m}(x)p_{n,n-1}(x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}p_{m,m+1}(x)p_{n,n-1}(x)dx\end{aligned}$$

$p_{a,b}(x)$ は $a>b$ の時 (x^2-1) で割り切れるので、任意の $n\geq 0$ に対し右辺第 *1* 項は 0 となり

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}p_{m,m}(x)p_{n,n}(x)dx &= -\int_{-1}^{1}p_{m,m+1}(x)p_{n,n-1}(x)dx \\ &= \cdots \\ &= (-1)^n\int_{-1}^{1}p_{m,m+n}(x)p_{n,0}(x)dx \\ &= (-1)^n\int_{-1}^{1}p_{m,m+n}(x)(x^2-1)^n dx\end{aligned}$$

$p_{m,0}(x)$ は x について $2m$ 次式なので、$m>n$ とすると $p_{m,m+n}(x)=0$ が成り立つから右辺は 0 に等しい。又 m,n は交換可能なので $m<n$ の場合も 0 となる。$m=n$ とすると、

$$(-1)^n\int_{-1}^{1}p_{n,2n}(x)(x^2-1)^n dx=(-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$$

更に部分積分より

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(\frac{d}{dx}x\right)(x^2-1)^n dx &= \left[x(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} - 2n\int_{-1}^{1} x^2(x^2-1)^{n-1}dx \\ &= -2n\int_{-1}^{1}\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{3}x^3\right)(x^2-1)^{n-1}dx \\ &= \cdots \\ &= (-1)^n 2^n n!\frac{1}{(2n-1)!!}\int_{-1}^{1} x^{2n}dx \\ &= (-1)^n 2^n n!\frac{(2n)!!}{(2n)!}\left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_{-1}^{1} \\ &= (-1)^n 2^n n!\frac{2^n n!}{(2n)!}\frac{2}{2n+1} \\ &= (-1)^n\frac{1}{(2n)!}\frac{2(2^n n!)^2}{2n+1}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\langle P_n \,|\, P_n\rangle &= \frac{2n+1}{2(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1} p_{n,n}(x)p_{n,n}(x)dx \\ &= 1\end{aligned}$$

が成り立つから、以上より

$$\langle P_m \,|\, P_n\rangle = \delta_{m,n}$$

故に $\{P_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は正規直交系を成す。

3) 無限次元の空間 V に無限個の直交ベクトルなんだから基底なんじゃないの？ [*5]

[*5] ちゃんと完全性を証明するのは少し手間っぽい。N.N.Lebedev “Special Functions & Their Applications” の 4.7 など参照。（ここでドヤる）

第 11 回

問 11.1

1) $[a,b)$ について示す。f は $[a,b]$ 上可積分なので有界であり、或る $C>0$ が存在して任意の $x\in[a,b]$ に対し $|f(x)|<C$ となる。すると任意の $c\in[a,b)$ に対し

$$\left|\int_{[a,c]} f(x)dx - \int_{[a,b]} f(x)dx\right| = \left|\int_c^b f(x)dx\right| < C(b-c)$$

であり、任意の ϵ について $c > b-\epsilon/C$ なる c を取ると

$$\left|\int_{[a,c]} f(x)dx - \int_{[a,b]} f(x)dx\right| < \epsilon$$

が成り立つ。よって f は $[a,b)$ 上広義可積分であり $\int_{[a,b)} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$。$\int_{(b,a]} f(x)dx = -\int_{[a,b)} f(x)dx$ より $(a,b]$, (a,b) についても示される。

2) 任意の $c\in(a,b)$ について $\int_{(a,b)} = \int_{(a,c]} + \int_{[c,b)}$ なので、1) より従う。

問 11.2

f,g は $[a,b]$ 上有界なので、或る $C>0$ が存在して任意の $x\in[a,b]$ に対し $|(\lambda f+\mu g)(x)|<C$ となる。ここで任意の $\epsilon>0$ に対し、$\delta>0$ を $\delta<\epsilon/C$ となる様に取れれば、$b-\delta<s\le t<b$ なる任意の s,t に対し

$$\left|\int_s^t (\lambda f+\mu g)(x)dx\right| < C\delta < \epsilon$$

が成り立つ。よって $\lambda f+\mu g$ は $[a,b)$ 上広義可積分で、積分と極限の線型性から $\int_{[a,b)}(\lambda f+\mu g) = \lambda\int_{[a,b)} f + \mu\int_{[a,b)} g$ となる。

問 11.3

f は連続なので、任意の $\epsilon_1>0$ に対して $\delta_1>0$ が存在し、

$$\forall x,y\in[a,b],\ |x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon_1$$

が成り立つ。ここで $a_k = a+(k/n)(b-a)$ とし $(b-a)/n<\delta_1$ となる n を取ると、任意の $x\in[a_k,a_{k+1})$ に対して

$$|f(x)-f(a_k)|<\epsilon_1$$

より、$t_k=f(a_k)$ とすると

$$|f(x)-g(x)|<\epsilon_1$$

となる。一方、任意の $\epsilon_2>0$ に対して

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|-\epsilon_2 < |f(x)-g(x)| \le \sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$$

なので、

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)| < \epsilon_1+\epsilon_2$$

ϵ_1,ϵ_2 はそれぞれ任意なので、任意の $\epsilon>0$ に対して $\epsilon=\epsilon_1+\epsilon_2$ となるよう定めればよい。

問 11.4

1) 任意の $\epsilon>0$ に対して f_n の連続性から $\delta>0$ が存在して $\forall x,y\in[a,b],\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon$ が成り立ち、また f の条件から $N>0$ が存在して $n\ge N \Rightarrow \forall x\in[a,b],\ |f_n(x)-f(x)|<\epsilon$ が各々成り立つ。ここで

$$\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)| &= |f_n(x)-f_n(x+h)+f_n(x+h)-f(x)| \\
&= |f_n(x)-f_n(x+h)+f_n(x+h)-f(x+h)+f(x+h)-f(x)| \\
&\ge |f(x+h)-f(x)| - |f_n(x+h)-f_n(x)| - |f_n(x+h)-f(x+h)|
\end{aligned}$$

より

$$|f(x+h)-f(x)| \leq 3\epsilon$$

故に f は連続。

2) 条件より任意の $\epsilon>0$ に対し $N>0$ が存在して、$n \geq N$ ならば

$$\forall x \in [a,b],\ |f_n(x)-f(x)|<\epsilon$$

が成り立つ。この時

$$f(x)-\epsilon < f_n(x) < f(x)+\epsilon$$
$$\int_a^b f(x)dx-\epsilon(b-a) < \int_a^b f_n(x)dx < \int_a^b f(x)dx+\epsilon(b-a)$$

より

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right| < \epsilon(b-a)$$

である。よって

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

問 11.5

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $[x]=\begin{cases}\lfloor x\rfloor & (x\geq 0)\\ \lceil x\rceil & (x<0)\end{cases}$ とする。$m=\left[a\Big/\frac{2\pi}{\lambda}\right]$, $n=\left[b\Big/\frac{2\pi}{\lambda}\right]$ とし、$a_k=\frac{2\pi k}{\lambda}$ $(m\leq k\leq n)$ と置く。f の連続性より、任意の $\epsilon'>0$ に対し $\delta>0$ が存在して

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon'$$

が成り立つ。λ を $2\pi/\lambda<\delta$ となる様に取れば、任意の $x\in[a_k,a_{k+1}]$ $(m\leq k<n)$ に対し

$$|f(x)-f(a_k)|<\epsilon'$$
$$f(a_k)-\epsilon'<f(x)<f(a_k)+\epsilon'$$

となるから

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k)\sin\lambda x\,dx-\frac{2\pi}{\lambda}\epsilon' < \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\sin\lambda x\,dx < \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k)\sin\lambda x\,dx+\frac{2\pi}{\lambda}\epsilon'$$
$$-\frac{2\pi}{\lambda}\epsilon' < \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\sin\lambda x\,dx < \frac{2\pi}{\lambda}\epsilon'$$

各区間について和すれば

$$\left|\int_{a_m}^{a_n} f(x)\sin\lambda x\,dx\right| < \frac{2\pi}{\lambda}(n-m)\epsilon'$$

又 f は閉区間上連続なので有界であり、或る $C>0$ が存在して任意の $x\in[a,b]$ に対して $|f(x)|<C$ が成り立つ。故に

$$\left|\int_a^{a_m} f(x)\sin\lambda x\,dx\right| < \frac{2\pi}{\lambda}C,\ \left|\int_{a_n}^b f(x)\sin\lambda x\,dx\right| < \frac{2\pi}{\lambda}C$$

以上より、特に $\epsilon'=1$ とすれば

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx\right| < \frac{2\pi}{\lambda}(n-m+2C)$$

よって、任意の $\epsilon > 0$ に対して $L \geq 2\pi(n - m + 2C)/\epsilon$ とすれば

$$\lambda > L \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx \right| < \epsilon$$

が成り立つ。即ち

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0$$

問 11.6

1) $x \in [0, \pi]$ 故 $x \neq 0$ ならば $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ であり g は連続。*l'Hospital* の定理より

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +0} g(x) &= \lim_{x \to +0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} - x}{x \sin \frac{x}{2}} \\ &= \lim_{x \to +0} \frac{\cos \frac{x}{2} - 1}{\sin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \lim_{x \to +0} \frac{-\sin \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}} \\ &= 0 = g(0)\end{aligned}$$

よって g は連続。

2) $x = \frac{2n+1}{2} t$ と置くと

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \right) \sin \frac{2n+1}{2} t \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi g(t) \sin \frac{2n+1}{2} t \, dt + \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt\end{aligned}$$

$n \to +\infty$ とすると $\frac{2n+1}{2} \to +\infty$ 故、*Riemann-Lebesgue* の定理より右辺第一項は 0 に収束する。従って

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{2n+1}{2} n} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt$$

を得る。

3) 積分できないんですが？

4)

4a) $\delta \neq 0$ ならば $\gamma_{\delta, R_1, R_2}$ の成す閉領域で f は極 $z = 0$ のみを持つので、任意の δ, R_1, R_2 について

$$\int_{\gamma_{\delta, R_1, R_2}} f(z) dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f;\, 0)$$

ここで

$$\mathrm{Res}(f;\, 0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} e^{\sqrt{-1} z} = 1$$

よって

$$\lim_{\substack{\delta \searrow 0 \\ R_1 \to +\infty \\ R_2 \to +\infty}} \int_{\gamma_{\delta, R_1, R_2}} f(z) dz = 2\pi i$$

4b) 積分路 $\{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = \delta,\ \mathrm{Im}\ z \leq 0 \,\}$ を γ_0、積分路 $\{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = \delta,\ \mathrm{Im}\ z \geq 0 \,\}$ を γ_0' とすると、留数定理から

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz + \int_{\gamma_0'} f(z)dz = 2\pi i$$

z を $-z$ に置き換えると

$$\int_{\gamma_0'} f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(-z)dz$$

よって

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_0'} f(z)dz &= \int_{\gamma_0} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z}dz \\ &= 2i\int_{\gamma_0} \frac{\sin z}{z}dz\end{aligned}$$

或る固定された $R > 0$ に対し $(\sin z)/z$ は $B_0(R)$ 上正則なので有界であり、或る $C > 0$ が存在して任意の $z \in B_0(R)$ に対し $|(\sin z)/z| < C$ が成り立つ。よって $\delta < R$ とすれば

$$\int_{\gamma_0} \frac{\sin z}{z}dz < \pi\delta C$$

となるから

$$\lim_{\substack{\delta \searrow 0 \\ R_1 \to +\infty \\ R_2 \to +\infty}} \left(\int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_0'} f(z)dz \right) = 0$$

が成り立つ。よって

$$\lim_{\substack{\delta \searrow 0 \\ R_1 \to +\infty \\ R_2 \to +\infty}} \int_{\gamma_0} f(z)dz = \pi i$$

積分路 $\{\, z \in \mathbb{C} \mid \delta \leq \mathrm{Re}\ z \leq R_1,\ \mathrm{Im}\ z = 0 \,\}$ を γ_1、積分路 $\{\, z \in \mathbb{C} \mid -R_1 \leq \mathrm{Re}\ z \leq -\delta,\ \mathrm{Im}\ z = 0 \,\}$ を γ_5 とすると

$$\lim_{\substack{\delta \searrow 0 \\ R_1 \to +\infty \\ R_2 \to +\infty}} \mathrm{Im} \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z}dz$$

また

$$\lim_{\substack{\delta \searrow 0 \\ R_1 \to +\infty \\ R_2 \to +\infty}} \mathrm{Im} \int_{\gamma_5} f(z)dz = \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin z}{z}dz = \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z}dz$$

積分路 $\{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ z = R_1,\ 0 \leq \mathrm{Im}\ z \leq R_2 \,\}$ を γ_2、、積分路 $\{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ z = -R_1,\ 0 \leq \mathrm{Im}\ z \leq R_2 \,\}$ を γ_4、とすると

$$\begin{aligned}\left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| &\leq \int_0^{R_2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{R_1^2 + x^2}}dx \\ &< \frac{1}{R_1}\int_0^{R_2} e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{R_1}(1 - e^{-R_2})\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{\substack{\delta \searrow 0 \\ R_1 \to +\infty \\ R_2 \to +\infty}} \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$$

γ_4 も同様。

積分路 $\{\, z \in \mathbb{C} \mid -R_1 \le \mathrm{Re}\ z \le R_1,\ \mathrm{Im}\ z = R_2 \,\}$ を γ_3 とすると

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_3} f(z)dz\right| &\le \int_{-R_1}^{R_1} \frac{e^{-R_2}}{\sqrt{x^2+R_2^2}}dx \\ &< \frac{2R_1}{\sqrt{R_1^2+R_2^2}}e^{-R_2}\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{\substack{\delta\searrow 0\\ R_1\to+\infty\\ R_2\to+\infty}} \int_{\gamma_3} f(z)dz = 0$$

以上よりそれぞれの積分の極限は収束する [*6] ので、

$$\lim_{\substack{\delta\searrow 0\\ R_1\to+\infty\\ R_2\to+\infty}} \mathrm{Im} \int_{\gamma_{\delta,R_1,R_2}} f(z)dz = \pi + 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z}dz$$

従って前問の結果より

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z}dz = \frac{\pi}{2}$$

問 11.7

1) $\lim_{t\to+\infty} e^{-t}t^{x+1} = 0$ より、或る $T>0$ が存在して任意の $t \ge T$ に対し $\left|e^{-t}t^{x+1}\right| = \left(e^{-t}t^{x-1}\right)/t^{-2} < 1$ が成り立つ。この時、

$$\int_T^{+\infty} \left|e^{-t}t^{x-1}\right| dt < \int_T^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$$

となり、右辺は絶対収束するので $\Gamma(x)$ は絶対収束する。

2)

i)

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(-e^{-t}\right)' t^x dt \\ &= \left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}dt \\ &= \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

$\Gamma(1) = 0!,\ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ より帰納的に $\forall n \in \mathbb{N}^+,\ \Gamma(n) = (n-1)!$ となる。

iii) $x, t \in \mathbb{R}^+$ に対し $e^{-t}t^{x-1} > 0$ より $\Gamma(x) > 0$

[*6] $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ の収束性は…

iv) $t = r^2$ とすると

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-r^2} t^{2x-2} \cdot 2r\,dr \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-r^2} t^{2x-1} dr\end{aligned}$$

3) $B(x,y)$ が広義積分となるのは $0 < x < 1$ 又は $0 < y < 1$ の場合である。
$0 < x < 1$ の場合について考える。任意に固定した $\alpha \in (0,1)$ に対し $(1-t)^{y-1}$ は $[0,\alpha]$ 上有界なので、或る $C > 0$ が存在して任意の $t \in [0,\alpha]$ に対し $\left|(1-t)^{y-1}\right| < C$ が成り立つ。よって任意の $0 < a \leq b < \alpha$ に対し

$$\begin{aligned}\int_a^b \left|t^{x-1}(1-t)^{y-1}\right| dt &< C\int_a^b t^{x-1} dt \\ &= C\left[\frac{1}{x}t^x\right]_a^b \\ &< \frac{C\alpha^x}{x}\end{aligned}$$

よって任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ を $\delta < \alpha$ 且つ $\delta < \left(\frac{x}{C}\epsilon\right)^{1/x}$ なる様に取れば、$0 < a \leq b < \delta$ に対して $\int_a^b \left|t^{x-1}(1-t)^{y-1}\right| dt < \epsilon$ が成り立つ。即ち $t \to 0$ について広義積分は絶対収束する。$0 < y < 1$ の場合も同様。

4) $t' = 1 - t$ と置換すると

$$\begin{aligned}B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \\ &= -\int_1^0 (1-t')^{x-1} t'^{y-1} dt' \\ &= \int_0^1 t'^{y-1}(1-t')^{x-1} dt' \\ &= B(y,x)\end{aligned}$$

$t = \sin^2\theta$ と置換すると

$$\begin{aligned}B(x,y) &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-2}\theta \cos^{2y-2}\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta\end{aligned}$$

5) 2) iv) 及び 4) より

$$\begin{aligned}B(x,y)\Gamma(x+y) &= \left(2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,d\theta\right)\left(2\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2x-1} dr\right) \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2x+2y-1}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,drd\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}(r\cos\theta)^{2x-1}(r\sin\theta)^{2x-1} rdrd\theta\end{aligned}$$

極座標変換より、$(v,w) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と置くと

$$\begin{aligned}4\int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}(r\cos\theta)^{2x-1}(r\sin\theta)^{2x-1} rdrd\theta &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(v^2+w^2)} v^{2x-1} w^{2x-1} dvdw \\ &= \left(2\int_0^{+\infty} e^{-v^2} v^{2x-1} dv\right)\left(2\int_0^{+\infty} e^{-w^2} w^{2x-1} dw\right) \\ &= \Gamma(x)\Gamma(y)\end{aligned}$$

2) iii) より $\Gamma(x+y) \neq 0$ であるから

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

となる。

問 11.8

1) $(x,y) \in \overline{W_n}$ とすると $\frac{2}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}$ 且つ $\frac{1}{n} \leq y \leq 1 - \frac{1}{n}$ である。この時 $\frac{2}{n+1} < x < 1 - \frac{1}{n+1}$ 且つ $\frac{1}{n+1} < y < 1 - \frac{1}{n+1}$ なので $(x,y) \in W_{n+1}$ が成り立つ。よって $\overline{W_n} \subset W_{n+1}$ となる。

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ 且つ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$ より、任意の $x \in W$ に対して或る n が存在し $x \in W_n$ が成り立つ。よって $W \subset \displaystyle\bigcup_{n=4}^{+\infty} W_n$ となる。一方各 W_n は W の部分集合なので $\displaystyle\bigcup_{n=4}^{+\infty} W_n \subset W$ である。よって $W = \displaystyle\bigcup_{n=4}^{+\infty} W_n$ が成り立つ。W_n と U_n は互いに区間を取り換えたものだから U_n も同様。

2) $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2+y^2)^2$ と置く。$f(y,x) = -f(x,y)$ なる反対称性より、

$$V_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{2}{n} < x < 1 - \frac{1}{n},\ \frac{1}{n} < y < \frac{2}{n} \right\}$$

として

$$\int_{\overline{W_n}} f(x,y)dxdy = \int_{\overline{V_n}} f(x,y)dxdy$$

が成り立つ。すると

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{V_n}} f(x,y)dxdy &= \int_{2/n}^{1-1/n} \int_{1/n}^{2/n} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dydx \\
&\leq \int_{2/n}^{1-1/n} \int_{1/n}^{2/n} \frac{x^2}{(x^2)^2} dydx \\
&= \frac{1}{n} \int_{2/n}^{1-1/n} \frac{1}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{x} \right]_{2/n}^{1-1/n} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}
\end{aligned}$$

よって任意の n について

$$\int_{\overline{W_n}} f(x,y)dxdy \leq \frac{1}{2}$$

が成り立つ。

収束性は？

3) $|f(x,y)| \geq 0$ 故、W_n よりも小さい積分領域を取って

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{W_n}} |f(x,y)|dxdy &\geq \int_{2/n}^{1-1/n} \int_{2/n}^{x} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dydx \\
&\geq \int_{2/n}^{1-1/n} \int_{2/n}^{x} \frac{x^2-y^2}{(2x^2)^2} dydx \qquad (\because y \leq x) \\
&= \frac{1}{4} \int_{2/n}^{1-1/n} \int_{2/n}^{x} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{x^4} \right) dydx \\
&= \frac{1}{4} \int_{2/n}^{1-1/n} \left\{ \frac{1}{x^2} \left(x - \frac{2}{n} \right) - \frac{1}{3x^4} \left(x^3 - \frac{8}{n^3} \right) \right\} dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{4}\int_{2/n}^{1-1/n}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{x}-\frac{2}{n}\frac{1}{x^2}\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\log x+\frac{2}{n}\frac{1}{x}\right]_{2/n}^{1-1/n} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\frac{2}{3}\log\frac{n-1}{2}+\frac{2}{n}\left(\frac{n}{n-1}-\frac{n}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{6}\log\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

これは $n\to+\infty$ の時発散する。よって

$$
\lim_{n\to+\infty}\int_{W_n}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|dxdy=+\infty
$$

問 11.9

1) 定義から $\|(v,w)\|_{(x,y)}=0\Leftrightarrow v=w=0$（独立性）及び $\forall a\in\mathbb{R},\ \|a(v,w)\|_{(x,y)}=|a|\cdot\|(v,w)\|_{(x,y)}$（斉次性）が成り立つ。また、相加相乗平均の関係から

$$
\begin{aligned}
&\left(\|(v_1,w_1)\|_{(x,y)}+\|(v_2,w_2)\|_{(x,y)}\right)^2-\left(\|(v_1,w_1)+(v_2,w_2)\|_{(x,y)}\right)^2 \\
&=2\left(\frac{2}{1+x^2+y^2}\right)^2\left\{\sqrt{v_1^2v_2^2+v_1^2w_2^2+v_2^2w_1^2+w_1^2w_2^2}-(v_1v_2+w_1w_2)\right\} \\
&\geq 2\left(\frac{2}{1+x^2+y^2}\right)^2\left\{\sqrt{v_1^2v_2^2+2|v_1v_2w_1w_2|+w_1^2w_2^2}-(v_1v_2+w_1w_2)\right\} \\
&\geq 2\left(\frac{2}{1+x^2+y^2}\right)^2\left\{|v_1v_2|+|w_1w_2|-(v_1v_2+w_1w_2)\right\} \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

より劣加法性が成り立つ。

2) $Dl_1(t)=\frac{\pi}{4}\left(-\sin\frac{\pi}{4}t,\,\cos\frac{\pi}{4}t\right)$ より

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \int_0^1\frac{2}{1+\cos^2\frac{\pi}{4}t+\sin^2\frac{\pi}{4}t}\cdot\frac{\pi}{4}\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{4}t+\cos^2\frac{\pi}{4}t}\,dt \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^1 dt \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

$Dl_2(t)=(-1,1)$ より

$$
\begin{aligned}
L_2 &= \int_0^1\frac{2\sqrt{2}}{1+(1-t)^2+t^2}dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^1\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt
\end{aligned}
$$

$t-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\varphi$ として

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}\int_0^1\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt &= 2\sqrt{\frac{2}{3}}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}d\varphi \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\pi
\end{aligned}
$$

$\frac{8}{27}-\frac{1}{16}=\frac{101}{432}>0$ より $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}>\frac{1}{4}$。よって $L_1<L_2$。

3) $(0,0,1)+\alpha\{(t,s,u)-(0,0,1)\}=(x,y,0)$ とすると $(x,y)=f(t,s,u)$ なので、f は $S^2\setminus\{(0,0,1)\}$ の点を、その点と $(0,0,1)$ を結ぶ直線の xy 平面との交点へ対応させる写像である [*7]。

4) 任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ について、$f(t,s,u)=(x,y)$ とすると

$$t^2+s^2+u^2=(x^2+y^2)(1-u)^2+u^2=1$$

より

$$u=\frac{1\pm\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\right)}}{1+\frac{1}{x^2+y^2}}=\frac{x^2+y^2\pm 1}{x^2+y^2+1}$$

$u\neq 1$ なので

$$u=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

又 $1-u=2/(1+x^2+y^2)$ となるから

$$(t,s,u)=\frac{1}{1+x^2+y^2}(2x,\,2y,\,x^2+y^2-1)$$

よって f は全射である。又 $f(t_1,s_1,u_1)=f(t_2,s_2,u_2)$ ならば $t_1:t_2=s_1:s_2=1-u_1:1-u_2$ より、$\alpha\in\mathbb{R}$ として $(t_2,s_2,1-u_2)=\alpha(t_1,s_1,1-u_1)$ だが、

$$t_2^2+s_2^2+u_2^2=\alpha^2t_1^2+\alpha^2s_1^2+\{1-\alpha(1-u_1)\}^2=\alpha^2+(1-\alpha)^2+2\alpha(1-\alpha)u_1=1$$

が任意の u_1 について恒等式である事から $\alpha=0,1$ であり、ここで $\alpha=0$ は $(t_2,s_2,u_2)\in S^2\setminus\{(0,0,1)\}$ に反する。よって $\alpha=1$ であり、f は単射。以上より f は全単射であり、逆写像が存在して

$$f^{-1}(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}(2x,\,2y,\,x^2+y^2-1)$$

となる。

5)

$$\begin{aligned}Dg(x,y)&=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\frac{2x}{1+x^2+y^2} & \frac{\partial}{\partial y}\frac{2x}{1+x^2+y^2}\\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{2y}{1+x^2+y^2} & \frac{\partial}{\partial y}\frac{2y}{1+x^2+y^2}\\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2} & \frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\end{pmatrix}\\ &=\frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix}1-x^2+y^2 & -2xy\\ -2xy & 1+x^2-y^2\\ 2x & 2y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}\|(v,w)\|'_{(x,y)}&=\left\|Dg(x,y)\begin{pmatrix}v\\ w\end{pmatrix}\right\|''\\ &=\frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\left\|\left((1-x^2+y^2)v-2xyw,\ -2xyv+(1+x^2-y^2)w,\ 2xv+2yw\right)\right\|\\ &=\frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\sqrt{(1+x^2+y^2)^2(v^2+w^2)}\\ &=\|(v,w)\|_{(x,y)}\end{aligned}$$

よって示された。

*7 $(0,0,1)\mapsto\infty$ とすると上手い事いくので Riemann 球面と呼ばれる。

第 12 回

問 12.1

a) 1) $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ とすると

$$\begin{aligned}D^3f+D^2f-Df-f&=\sum_{n=3}^{+\infty}n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+3}+(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}-a_n\right\}x^n\\&=0\end{aligned}$$

x についての恒等式なので、全ての n について

$$(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+3}+(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}-a_n=0$$

が成り立つ。又 $f(0)=Df(0)=0,\ D^2f(0)=1$ より $a_0=a_1=0,\ a_2=1$。
ここで $b_n=(n+1)a_{n+1}+a_n$ と置くと、$b_0=0,b_1=2$ であり

$$\begin{gathered}(n+2)(n+1)((n+3)a_{n+3}+a_{n+2})=(n+1)a_{n+1}+a_n\\(n+2)(n+1)b_{n+2}=b_n\end{gathered}$$

より

$$\begin{aligned}b_n&=\begin{cases}0&(2|n)\\\frac{2}{n!}&(2\not|n)\end{cases}\\&=\frac{1-(-1)^n}{2}\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

となる。$c_n=n!a_n$ と置けば $c_0=c_1=0$ で、

$$\begin{gathered}c_{n+1}+c_n=n!b_n=\frac{1-(-1)^n}{2}\\c_{n+2}=c_n+2(-1)^n\end{gathered}$$

より

$$\begin{aligned}c_n&=\begin{cases}c_0+n&(2|n)\\c_1-(n-1)&(2\not|n)\end{cases}\\&=(-1)^nn+\frac{1-(-1)^n}{2}\end{aligned}$$

以上から

$$a_n=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}+\frac{1-(-1)^n}{2n!}=\frac{1}{n!}\left\{\frac{1}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^n\right\}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\frac{n}{n!}\left|\frac{\frac{1}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^n}{n}\right|}$$

ここで

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^n}{n}\right|=1$$

より

$$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(n-1)!}}=0$$

即ち収束半径は $+\infty$。

2) $f(x)=e^{\alpha x}$ とすると

$$\alpha^3+\alpha^2-\alpha-1=(\alpha+1)^2(\alpha-1)=0$$

より $\alpha=1,\ -1$(重根)。よって

$$f(x)=C_1e^x+(C_2+C_3x)e^{-x}$$

初期条件より $C_1=1/4,\ C_2=-1/4,\ C_3=-1/2$ なので

$$f(x)=\frac{e^x-(2x+1)e^{-x}}{4}=\frac{\sinh x-xe^{-x}}{2}$$

となり、これは *Taylor* 展開すると上の級数解に一致する。

3) x を複素数としても同様である。

b) 1) $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ とすると $a_0=0$ であり、

$$\{f(x)\}^2=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\sum_{m=0}^{+\infty}a_mx^m=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}a_na_mx^{n+m}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\right)x^n$$

よって

$$Df(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\right)x^n$$

即ち $n=0$ の時 $a_1=1+a_0^2=1$ であり、任意の $n\geq 1$ については

$$(n+1)a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$$

先ず帰納的に $a_{2n}=0$ が示せる。

$$\begin{aligned}a_1&=1\\a_3&=1/3\\a_5&=2/3/5\\a_7&=17/3/5/3/7\\a_9&=62/3/5/3/7/9\\a_11&=1384/3/5/3/7/9/5/11\end{aligned}$$

$$1,\ \frac{1}{1!!\cdot3!!},\ \frac{2}{1!!\cdot5!!},\ \frac{17}{3!!\cdot7!!},\ \frac{62}{3!!\cdot9!!},\ \frac{1384}{5!!\cdot11!!},\ \cdots$$

何ですかねこれは…？ [*8]

2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+f^2}\frac{df}{dx}&=1\\\int\frac{df}{1+f^2}&=\int dx\end{aligned}$$

[*8] Bernoulli 数で書けるらしい。下から分かる様に $f(x)=\tan x$ なので $\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{2}{\pi}$ の筈だが…（複素解析の定理から収束半径は最も近い特異点までの距離に等しい。）こんなの計算できるの？

$f = \tan \circ g$ とすると

$$\int \frac{df}{1+f^2} = \int \frac{1}{1+\tan^2 \circ g} \frac{dg}{\cos^2 g} = g = \arctan f$$

即ち

$$\begin{aligned} \arctan f(x) &= x + C \\ f(x) &= \tan(x + C) \end{aligned}$$

ここで初期条件より $C = m\pi\ (m \in \mathbb{Z})$。よって

$$f(x) = \tan x$$

3) 同様。

c) 1) $(Df)^3 = 27f^2$ で f を N 次多項式とすると、$3(N-1) = 2N$ より $N = 3$ である。よって $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ とすると、$f(0) = 0$ より $a_0 = 0$ で、

$$\begin{aligned} (Df)^3 &= 27f^2 \\ (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2)^3 &= 27(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)^2 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} a_1^3 &= 0 \\ 6a_1^2 a_2 &= 0 \\ 3a_1(3a_1 a_3 + 4a_2^2) &= 27a_1^2 \\ 4a_2(9a_1 a_3 + 2a_2^2) &= 54a_1 a_2 \\ 9a_3(3a_1 a_3 + 4a_2^2) &= 27(2a_1 a_3 + a_2^2) \\ 54a_2 a_3^2 &= 54a_2 a_3 \\ 27a_3^3 &= 27a_3^2 \end{aligned}$$

これを解いて $a_1 = a_2 = 0$、及び $a_3 = 0, 1$ を得る。よって

$$f(x) = 0,\ x^3$$

いずれも $\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ より収束半径は $+\infty$ である。

2) $f = 0$ は解である。$f \neq 0$ の場合

$$\begin{aligned} f^{-2/3} \frac{df}{dx} &= 3 \\ \int f^{-2/3} df &= 3 \int dx \\ 3f^{1/3} &= 3x + C' \\ f(x) &= (x + C)^3 \end{aligned}$$

$f(0) = 0$ より

$$f(x) = x^3$$

よって

$$f(x) = 0,\ x^3$$

3) $z \in \mathbb{C}$ に対して $z^{2/3}$ は多価函数であり、$\exp\left(\frac{2}{3}\mathrm{Log}\, z\right)$ の $1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$ 倍になる不定性がある。よって分枝に取り方によっては x^3 の $e^{-2\pi i/3}, e^{-4\pi i/3}$ 倍も解であり

$$f(x) = 0,\ x^3,\ e^{\frac{2}{3}\pi i}x^3,\ e^{\frac{4}{3}\pi i}x^3$$

となる。

d) 1) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ として

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\right) &= -1 \\
\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_m a_{n+1}x^{m+n} &= -1 \\
\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{n-k}a_{k+1}\right)x^n &= -1
\end{aligned}$$

$f(0) = -1$ より $a_0 = -1$ なので、

$$\{a_n\} = \left\{-1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{5}{8},\ -\frac{7}{8},\ -\frac{17}{16},\ \ldots\right\}$$

ここで $n \geq 3$ に対して $a_n = -(2n-3)!!/n!$ が成り立つ。*Stirling* の公式から導かれる（というかそれよりも弱い評価の）$n! \sim n^n$ を用いれば [*9]

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{(2n-3)!!}{n!} \\
&= \frac{(2n-3)!}{(2n-2)!!\,n!} \\
&= \frac{(2n-3)!}{2^{n-1}(n-1)!n!} \\
&= \frac{n}{2n(2n-1)(2n-2)}\frac{(2n)!}{2^{n-1}(n!)^2} \\
&\sim \frac{(2n)^{2n}}{2^{n+2}n^{2n+2}} \\
&= \frac{2^{n-2}}{n^2}
\end{aligned}$$

より $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 2$ 故、収束半径は $\dfrac{1}{2}$。

2)

$$\begin{aligned}
\int f\,df &= -\int dx \\
\frac{1}{2}f^2 &= -x + C \\
f(x) &= \pm\sqrt{2(-x+C)}
\end{aligned}$$

$f(0) = -1$ より

$$f(x) = -\sqrt{1-2x}$$

[*9] 記号 $f \sim g$ は $\lim(f/g) = 1$ を意味する。

この *Taylor* 展開は *1)* の級数と一致する。

3) 平方根による不定性は上の様に初期条件で解消される。

e) 1) $0 = f(0)Df(0) = -1$ ですね？

問 12.2

1) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ とすると

$$Df = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$$

より

$$a_{n+1} = \alpha\frac{a_n}{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}a_0 = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}f(0)$$

が成り立つ。よって $f(0)$ を指定すれば級数解が一意に定まる。

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{|\alpha|^n}{n!}|f(0)|} = |\alpha|\sqrt[n]{\frac{|f(0)|}{n!}} \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

より収束半径は $+\infty$ である。

2) 同様。

3) a) $P \in GL_2(\mathbb{R})$ より P^{-1} が存在して $f = P^{-1}g$。すると

$$\begin{aligned} Df &= Af \\ DP^{-1}g &= (AP^{-1})g \\ Dg &= (PAP^{-1})g \quad (\because D \text{ の線型性}) \end{aligned}$$

又 $g(0) = Pf(0) = Pv$ となる。逆も同様。

b)

$$\begin{pmatrix} Df_1 \\ Df_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} 2f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

より

$$f(x) = \begin{pmatrix} \alpha e^{2x} \\ \beta e^x \end{pmatrix}$$

$f(0) = (1\ 1)^T$ より $(\alpha, \beta) = (1, 1)$。よって

$$f(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^x \end{pmatrix}$$

c) $|\lambda I - A| = \lambda^2 - 1 = 0$ とすると $\lambda = \pm 1$。

$$A\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ b_1 & -b_2 \end{pmatrix}$$

とすると $a_1 = b_1,\ a_2 = -b_2$ なので、固有ベクトルは $(1\ 1)^T, (1\ -1)^T$ となり

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

と置くと

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

また

$$g(0) = Pf(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって $Dg = (P^{-1}AP)g$ の解は $g = (e^x \ \ -e^{-x})^T$ で、

$$f(x) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ -e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh x \\ \cosh x \end{pmatrix}$$

d) $|\lambda I - A| = \lambda^2 + 1 = 0$ とすると $\lambda = \pm i$。

$$A \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia_1 & -ia_2 \\ ib_1 & -ib_2 \end{pmatrix}$$

とすると $a_1 = ib_1,\ a_2 = -ib_2$ なので、固有ベクトルは $(i\ 1)^T, (1\ i)^T$ となり

$$P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

と置くと

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

また

$$g(0) = Pf(0) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって $Dg = (P^{-1}AP)g$ の解は $g = (e^{ix} \ \ ie^{-ix})^T$ で、

$$f(x) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ix} \\ -ie^{-ix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

問 12.3

以下 $A, B \in M_2(K)$ について $\forall i, j \in \{1, 2\},\ A_{i,j} < B_{i,j}$ の時 $A < B$ であるとする。

1)

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ c_n & b_n \end{pmatrix}$$

と置き、$r > 0$ が或る $n \geq 1$ について $a_n, b_n, c_n < 2^{n-1}r^n$ を満たすとする。この時

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_1a_n + c_1c_n & c_1a_n + b_1c_n \\ a_1c_n + c_1b_n & b_1b_n + c_1c_n \end{pmatrix}$$

より $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} < 2^n r^{n+1}$ が成り立つ。仮定は $n = 0$ について成り立っているので、数学的帰納法により任意の $n \geq 1$ について $a_n, b_n, c_n < 2^{n-1}r^n$ が言える。すると

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(Ax)^n v &< I_2 v + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} 2^{n-1} r^n x^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v \\ &= v + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (2rx)^n \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix} \\ &= v + \frac{e^{2rx} - 1}{2} \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、優級数の方法より $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(Ax)^n v$ は一様収束する。従って f は項別微分可能であり

$$Df(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}A^n x^{n-1}v=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A^{n+1}x^n v=A\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A^n x^n v=Af(x)$$

又定義より $f(0)=v$ なので、これは問題の方程式の解となっている。

2)

$$A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$$

と置けば前問と同様にして

$$B(x)<I_2+\frac{e^{2rx}-1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

より、$B(x)$ は一様収束してその収束半径は $+\infty$ と分かる。

3) 略

4) 略

5) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ の時、$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ より

$$A^n=\begin{cases}A & (2\not|n)\\ I & (2|n)\end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned}\exp Ax&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}I+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}A\\ &=\frac{e^x+e^{-x}}{2}I+\frac{e^x-e^{-x}}{2}A\\ &=(\cosh x)I+(\sinh x)A\end{aligned}$$

$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ の時、$A^2=-I$ より

$$A^n=\begin{cases}(-1)^{(n-1)/2}A & (2\not|n)\\ (-1)^{n/2}I & (2|n)\end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned}\exp Ax&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}I+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}A\\ &=(\cos x)I+(\sin x)A\end{aligned}$$

6) 略

問 12.4

1)

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]\times[0,1]}D_1D_2f(x,y)dxdy&=\int_0^1\int_0^1 D_1D_2f(x,y)dxdy\\ &=\int_0^1\left(D_2f(1,y)-D_2f(0,y)\right)dy\\ &=f(1,1)-f(1,0)-f(0,1)+f(0,0)\end{aligned}$$

2) a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(1,t)dt + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(0,1-t)dt &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(1,t)dt + \int_1^0 \frac{\partial f}{\partial y}(0,1-t)d(1-t) \\ &= f(1,1) - f(1,0) + f(0,0) - f(0,1) \\ &= f(1,1) - f(1,0) - f(0,1) + f(0,0)\end{aligned}$$

1) と一致する。

b)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)dt + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(1-t,1)dt &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)dt + \int_1^0 \frac{\partial f}{\partial x}(1-t,1)d(1-t) \\ &= f(1,0) - f(0,0) + f(0,1) - f(1,1) \\ &= f(1,0) + f(0,1) - f(0,0) - f(1,1)\end{aligned}$$

符号が逆。

問 12.5

1) $f_0 \equiv \mathrm{Log}$ かつ f_n 同士の差は定数なので、$m \geq 1$ に対し f_n の m 階微分は全て一致して Log の m 階微分に等しい。よって

$$D^m f_n(z) = D^m \mathrm{Log}\, z = (-1)^{m-1}(m-1)! z^{-m} \quad (m \geq 1)$$

より

$$f_n(z) = 2\pi i n + \mathrm{Log}\, z_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z - z_0)^n$$

となる。ここで

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|z_0|}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{|z_0|}$$

より収束半径は $|z_0|$ である。

一方、$g_0 = \pi i + \mathrm{Log}\,(-z)$ かつ g_n 同士の差も定数なので

$$g_n(z) = 2\pi i\left(n + \frac{1}{2}\right) + \mathrm{Log}\,(-z_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z - z_0)^n$$

となり、収束半径は $|z_0|$ である。

2) H_1 上で $f_n = g_m$ となる時、Log の定義域に注意して

$$\begin{aligned}2\pi i n + \mathrm{Log}\, z_0 &= 2\pi i\left(m + \frac{1}{2}\right) + \mathrm{Log}\,(-z_0) \\ &= 2\pi i\left(m + \frac{1}{2}\right) + \mathrm{Log}\,(-i) + \mathrm{Log}\,(-i z_0) \\ 2\pi i n &= 2\pi i\left(m + \frac{1}{2}\right) + 2\mathrm{Log}\,(-i) \\ &= 2\pi i\left(m + \frac{1}{2}\right) - \pi i \\ n &= m\end{aligned}$$

H_2 上では

$$\begin{aligned}
2\pi in + \mathrm{Log}\, z_0 &= 2\pi i\left(m+\frac{1}{2}\right) + \mathrm{Log}\,(-z_0)\\
&= 2\pi i\left(m+\frac{1}{2}\right) + \mathrm{Log}\, i + \mathrm{Log}\,(iz_0)\\
2\pi in &= 2\pi i\left(m+\frac{1}{2}\right) + 2\mathrm{Log}\, i\\
&= 2\pi i\left(m+\frac{1}{2}\right) + \pi i\\
n &= m+1
\end{aligned}$$

3) a) E は幅 2 の *Archimedes* 螺旋。

b) $D \setminus \{\, z \in \mathbb{R} \mid z \le 0 \,\}$ の各連結領域を内側から順に $S_0, S_1, \ldots$ とする。即ち、

$$\begin{aligned}
\ell_0 &= \{\, z \in \mathbb{C} \mid 0 \le r \le 1,\ z = r^{\pi ir} \,\}\\
\ell_n &= \{\, z \in \mathbb{C} \mid 2n-1 \le r \le 2n+1,\ z = r^{\pi ir} \,\}
\end{aligned}$$

として、ℓ_0 と負の実軸で囲まれる領域の内部を S_0、$n \ge 1$ について ℓ_{n-1}, ℓ_n と負の実軸で囲まれる領域の内部を S_n とする。同様に $E \setminus \{\, z \in \mathbb{R} \mid z \ge 0 \,\}$ の各連結領域を内側から順に $T_0, T_1, \ldots$ とする。
この時 $1 \in S_1$ より、$f(1) = 0$ なので f は S_1 上 f_0 と一致する。f_0 は $S_1 \cap T_0$ 上 g_{-1} と一致するので、f はもし連続ならば T_0 上 g_{-1} と一致する。同様にして任意の S_n, T_n について f が一意に定まるから、D 全体でも f は一意に定まる。

c) 前問より任意の $z_0 \in D$ に対して或る $n \ge 0$ が存在し、S_n 又は T_n 上で f_{n-1} 又は g_{n-1} と一致する。1) より f_{n-1}, g_{n-1} は z_0 で *Taylor* 展開可能なので、f は D 上解析的である。

d) f が D 全体で単一の冪級数として表されているのならば、$\lim_{z\to 2-0} f(z) = \lim_{z\to 2+0} f(z)$ となる筈である。しかし、

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 2-0} f(z) &= \lim_{z\to 2-0} f_0(z) = \mathrm{Log}\, 2\\
\lim_{z\to 2+0} f(z) &= \lim_{z\to 2+0} f_1(z) = \mathrm{Log}\, 2 + 2\pi i
\end{aligned}$$

となり矛盾。よって f は D 全体で単一の冪級数として表せない。

問 12.6

1) $f, g \in V$ とすると、連続性より任意の $\epsilon > 0$ について $\delta_1, \delta_2 > 0$ が存在し、任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
|x-y| < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon\\
|x-y| < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - g(y)| < \epsilon
\end{aligned}$$

が共に成り立つ。この時任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ について

$$\begin{aligned}
|(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(y) + \beta g(y))| &= |\alpha f(x) - \alpha f(y) + \beta g(x) - \beta g(y)|\\
&\le |\alpha f(x) - \alpha f(y)| + |\beta g(x) - \beta g(y)|\\
&= \alpha |f(x) - f(y)| + \beta |g(x) - g(y)|
\end{aligned}$$

より

$$|x-y| < \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow |(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(y) + \beta g(y))| < (\alpha + \beta)\epsilon$$

となる。ϵ と α, β は独立に決められるから、$\alpha f + \beta g$ も連続である。よって V は実線型空間である。

2) 略

3) 略

4) a) $f, g \in U$ より或る $M > 0$ が存在して $|x| \geq M$ ならば $f(x) = g(x) = 0$ である。よって

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx &= \int_{-\infty}^{-M} f(x)g(x)dx + \int_{-M}^{M} f(x)g(x)dx + \int_{M}^{\infty} f(x)g(x)dx \\ &= \int_{-M}^{M} f(x)g(x)dx\end{aligned}$$

5) 略

6) 任意の $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ に対して $\{f_n\}$ は f に $[a, b]$ 上一様収束するので、任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $N > 0$ が存在し、

$$n \geq N \Rightarrow \forall x \in [a, b],\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成立する。又各 f_n は連続なので、同じ ϵ に対して或る $\delta > 0$ が存在し、

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$$

となる。よって任意の $x, y \in [a, b]$ 及び $n \geq N$ について、$|x - y| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

となり f は $[a, b]$ 上連続である。任意の $x \in \mathbb{R}$ について a, b を $x \in [a, b]$ となる様に取れるので、f は $\mathbb{R}$ 上連続であり $f \in V$。

一方、$f_n \in U$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \left|\dfrac{x}{n}\right| & (|x| \leq n) \\ 0 & (|x| \geq n) \end{cases}$$

と定めると $f(x) = 1$ は連続だが $f \notin U$ である。

7) a) $f \in U$ より或る $M > 0$ が存在して $|x| \geq M \Rightarrow f(x) = 0$ である。よって

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x \in [-M, M]} |f(x)|$$

であり、$|f|$ は有界閉区間 $[-M, M]$ 上連続なので有限の最大値を持つ。よって $\|f\|_\infty$ は有限である。

定義から任意の $f \in U$ について $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$（独立性）と $\forall a \in \mathbb{R},\ \|af\|_\infty = |a|\,\|f\|_\infty$（斉次性）が従う。又 $f, g \in U$ について

$$\begin{aligned}\|f + g\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) + g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} (|f(x)| + |g(x)|) \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\end{aligned}$$

となり劣加法性が成り立つ。よって $\|\cdot\|_\infty$ は U 上のノルムである。

b)

$$f_n = \begin{cases} n - |n^4 x| & (|x| \leq 1/n^3) \\ 0 & (|x| \geq 1/n^3) \end{cases}$$

とすると $\lim_{n\to+\infty}\|f\|_\infty = +\infty$ だが

$$\begin{aligned}\|f_n\|^2 &= 2\int_0^{1/n^3}\left(n - n^4x\right)^2 dx \\ &= \frac{2}{n^4}\int_0^n x^2dx \\ &= \frac{2}{3n}\end{aligned}$$

より $\lim_{n\to+\infty}\|f_n\| = 0$ となる。

c)

$$f_n = \begin{cases}\dfrac{1}{n} - \left|\dfrac{x}{n^4}\right| & (|x| \leq n^3) \\ 0 & (|x| \geq n^3)\end{cases}$$

とすると $\lim_{n\to+\infty}\|f\|_\infty = 0$ だが

$$\begin{aligned}\|f_n\|^2 &= 2\int_0^{n^3}\left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^4}\right)^2 dx \\ &= 2n^4\int_0^{1/n} x^2dx \\ &= \frac{2}{3}n\end{aligned}$$

より $\lim_{n\to+\infty}\|f_n\| = +\infty$ となる。

問 12.7

1) 略

2) $\lim_{n\to+\infty}\|f_n\| = 0$ より任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $N > 0$ が存在して、$n \geq N$ ならば

$$\|f_n\| = \sqrt{\int_0^1 \{(f(x))^2 + (Df(x))^2\}\, dx} < \epsilon$$

より

$$\sqrt{\int_0^1 (Df(x))^2 dx} < \epsilon$$

が成り立つ。すると任意の $x_0 \in [0, 1]$ について

$$\begin{aligned}f_n(x_0) &= \int_0^{x_0} Df_n(x)dx \\ &\leq \int_0^1 |Df_n(x)|dx \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 |Df_n(x)|^2 dx} \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

となるから、$\{f_n\}$ は 0 に $[0, 1]$ 上一様収束する。

3) a) 任意の $f, g \in V$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 及び $x \in \mathbb{R}$ について、

$$D(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha Df(x) + \beta Dg(x)$$

が成り立つから [*10] $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi f + \beta\varphi g$ となり φ は線型写像である。

b) 2) で示した。

c)

$$f_n(x) = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$$

とすると

$$\|f_n\|' = \frac{1}{n\pi}\sqrt{\int_0^1 \sin^2 n\pi x\,dx} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi}$$

より $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|f_n\|' = 0$ だが、

$$\begin{aligned}\|Df_n\| &= \sqrt{\int_0^1 \left(\cos^2 n\pi x + n^2\pi^2\sin^2 n\pi x\right)dx} \\ &= \sqrt{\frac{1+n^2\pi^2}{2}}\end{aligned}$$

より $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|Df_n\| = +\infty$ である。

問 12.13

定義 12.11 の記号を用いて、変数変換公式より

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_0^1 h\circ\gamma(s)\frac{d\gamma}{ds}ds \\ &= \sum_{i=0}^{k-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}} h\circ\gamma_i(s)\frac{d\gamma_i}{ds}ds \\ &= \sum_{i=0}^{k-1}\int_{\gamma_i(s_i)}^{\gamma_i(s_{i+1})} h(t)dt\end{aligned}$$

ここで定義より任意の $0 \le i \le k-1$ について $\gamma_i(s_{i+1}) = \gamma(s_{i+1}) = \gamma_{i+1}(s_{i+1})$ が成り立つので

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b h(t)dt$$

となり、$\int_\gamma \omega$ は γ の選び方に依らず定まる。

問 12.17

$\gamma^* dx$ の定義 [*11] より $\gamma^* dx = d\gamma_1$ が、γ_1 を $\mathbb{R}$ 上 0-形式と看做せば外微分の定義より $d\gamma_1 = \dfrac{d\gamma_1}{ds}ds$ がそれぞれ成り立つ。$\gamma^* dy$ についても同様。

問 12.19

定義と前問より

$$\begin{aligned}\gamma^*\omega &= (\gamma^* f)\gamma^* dx + (\gamma^* g)\gamma^* dy \\ &= (f\circ\gamma)d\gamma_1 + (g\circ\gamma)d\gamma_2 \\ &= f\circ\gamma\frac{d\gamma_1}{ds}ds + g\circ\gamma\frac{d\gamma_2}{ds}ds\end{aligned}$$

[*10] I 上の函数 f, g について $f = g$ って $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$ の事なんですかね？

[*11] この辺りで $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と書かれているが、恐らくは $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ の誤植。

問 12.20

問題の γ はどう見ても区分的に C^∞ 級の曲線ではない。恐らくは

$$\gamma(s)=\begin{cases}(4s,1) & 0\le s\le \dfrac{1}{4}\\ (1,2-4s) & \dfrac{1}{4}\le s\le\dfrac{1}{2}\\ (3-4s,0) & \dfrac{1}{2}\le s\le\dfrac{3}{4}\\ (0,4s-3) & \dfrac{3}{4}\le s\le 1\end{cases}$$

という閉曲線を描きたかったのでないだろうか。多分。そういう事にしておく。

1) $(0,1),(1,1),(1,0),(0,0)$ を頂点とする正方形。

2) γ を自然に $\gamma_a,\gamma_b,\gamma_c,\gamma_d$ へ分割する。この時

$$\int_\gamma\omega=\int_{\gamma_a}\omega+\int_{\gamma_b}\omega+\int_{\gamma_c}\omega+\int_{\gamma_d}\omega$$

と書ける。$\omega=\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ は定義 12.14 で (f,g) を $(0,D_yf)$ としたものと言えるので、

$$\begin{aligned}\int_\gamma\omega&=\int_0^{1/4}\frac{\partial f}{\partial y}\circ\gamma_a(s)\frac{d\gamma_{a2}}{ds}(s)ds+\int_{1/4}^{1/2}\frac{\partial f}{\partial y}\circ\gamma_b(s)\frac{d\gamma_{b2}}{ds}(s)ds\\&\quad+\int_{1/2}^{3/4}\frac{\partial f}{\partial y}\circ\gamma_c(s)\frac{d\gamma_{c2}}{ds}(s)ds+\int_{3/4}^{1}\frac{\partial f}{\partial y}\circ\gamma_d(s)\frac{d\gamma_{d2}}{ds}(s)ds\\&=-4\int_{1/4}^{1/2}\frac{\partial f}{\partial y}\circ\gamma_b(s)ds+4\int_{3/4}^{1}\frac{\partial f}{\partial y}\circ\gamma_d(s)ds\\&=-4\int_{1/4}^{1/2}\frac{\partial f}{\partial y}(1,2-4s)ds+4\int_{3/4}^{1}\frac{\partial f}{\partial y}(0,4s-3)ds\\&=\int_1^0\frac{\partial f}{\partial y}(1,t)dt+\int_0^1\frac{\partial f}{\partial y}(0,t)dt\\&=f(1,0)-f(1,1)+f(0,1)-f(0,0)\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\int_\gamma\omega&=\int_0^{1/4}\frac{\partial f}{\partial x}\circ\gamma_a(s)\frac{d\gamma_{a1}}{ds}(s)ds+\int_{1/4}^{1/2}\frac{\partial f}{\partial x}\circ\gamma_b(s)\frac{d\gamma_{b1}}{ds}(s)ds\\&\quad+\int_{1/2}^{3/4}\frac{\partial f}{\partial x}\circ\gamma_c(s)\frac{d\gamma_{c1}}{ds}(s)ds+\int_{3/4}^{1}\frac{\partial f}{\partial x}\circ\gamma_d(s)\frac{d\gamma_{d1}}{ds}(s)ds\\&=4\int_0^{1/4}\frac{\partial f}{\partial x}\circ\gamma_a(s)ds-4\int_{1/2}^{3/4}\frac{\partial f}{\partial x}\circ\gamma_c(s)ds\\&=4\int_0^{1/4}\frac{\partial f}{\partial x}(4s,1)ds-4\int_{1/2}^{3/4}\frac{\partial f}{\partial x}(3-4s,0)ds\\&=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(t,1)dt+\int_1^0\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)dt\\&=f(1,1)-f(0,1)+f(0,0)-f(1,0)\end{aligned}$$

問 12.24

$\mathbb{R}^2$ 上の 0-形式 f に対する外微分 df は定義されていないが、$df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ とすると上手く行くのでそういう

事にする。

$$
\begin{aligned}
d\omega &= df \wedge dx + dg \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) \wedge dy \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}dx \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dy \\
&= -\frac{\partial f}{\partial y}dx \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial x}dx \wedge dy \\
&= \left(-\frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx \wedge dy
\end{aligned}
$$

問 12.29

定義 12.28 で $g = 1$（定数函数）としたものと言えるから $g \circ f = 1$ であり、定義 12.21 から

$$
\begin{aligned}
f^*\omega &= df_1 \wedge df_2 \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy\right) \wedge \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy\right) \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right) dx \wedge dy \\
&= (\det Df)dx \wedge dy
\end{aligned}
$$

問 12.30

1)

$$
\begin{aligned}
g \circ f &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \\
Dg \circ f(x) Df(x) &= I_2 \\
(\det Dg \circ f(x))(\det Df(x)) &= 1
\end{aligned}
$$

より $\det Df(x) = 0$ とすると矛盾。よって $\det Df(x) \neq 0$ が成り立つ。

$\det Df(x)$ は $\mathbb{R}^2$ 上連続なので、符号が変わるとすると中間値の定理より $\det Df(x) = 0$ なる x が存在するがこれは矛盾。よって符号は変わらない。

2) $\omega = g\, dx \wedge dy$ とすると、問 12.29 より $df_1 \wedge df_2 = (\det Df)dx \wedge dy$ なので

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,1]\times[0,1]} f^*\omega &= \int_{[0,1]\times[0,1]} (g \circ f) df_1 \wedge df_2 \\
&= \int_{[0,1]\times[0,1]} (g \circ f)(\det Df) dx \wedge dy \\
&= \int_{[0,1]\times[0,1]} (g \circ f)(\det Df) dxdy
\end{aligned}
$$

条件より $\det Df = |\det Df|$ なので、変数変換より

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,1]\times[0,1]} (g \circ f)(\det Df) dxdy &= \int_{f([0,1]\times[0,1])} g\, dx'dy' \\
&= \int_{[0,1]\times[0,1]} g\, dxdy \\
&= \int_{[0,1]\times[0,1]} \omega
\end{aligned}
$$

よって

$$
\int_{[0,1]\times[0,1]} f^*\omega = \int_{[0,1]\times[0,1]} \omega
$$

3) 前問で $\det Df = |\det Df|$ を $\det Df = -|\det Df|$ に置き換えればよい。

第 13 回

問 13.1

1) $f \in V$ とすると、或る多項式 P が存在して $\lim_{n\to+\infty}(f/P)(x) = 0$ が成り立つ。この時任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $M > 0$ が存在して、$x > M$ ならば

$$\left|\frac{f(x)}{P(x)}\right| < \epsilon$$

なので特に $\epsilon = 1$ とすれば $|f(x)| < |P(x)|$ である。よって $f \in V'$ であり、$V \subset V'$ が成り立つ。

$f \in V'$ とすると、或る多項式 P と $M > 0$ が存在して $x > M \Rightarrow |f(x)| \le |P(x)|$ が成り立つ。この時 P の次数を n とすると、$\lim_{x\to+\infty}|P(x)|/x^{n+1} = 0$ より或る $L > 0$ が存在して $x > L$ ならば

$$|P(x)| \le x^{n+1}$$

が成り立つ。よって

$$x > \max\{M, L\} \Rightarrow |f(x)| \le x^{n+1}$$

なので $f \in V''$ であり、$V' \subset V''$ が成り立つ。

$f \in V''$ とすると、或る $n > 0$ と $M > 0$ が存在して $x > M$ ならば $|f(x)| \le x^n$ が成り立つ。この時

$$\left|\frac{f(x)}{x^{n+1}}\right| \le \frac{1}{x}$$

なので、$\lim_{x\to+\infty}(1/x) = 0$ より $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x^{n+1} = 0$ である。よって $f \in V$ であり、$V'' \subset V$ が成り立つ。

以上より $V \subset V' \subset V'' \subset V$ なので $V = V' = V''$ である。

$f.g \in V''$ とすると、或る $n_1, n_2 > 0$ と $M_1, M_2 > 0$ が存在して $x > M_1 \Rightarrow |f(x)| < x^{n_1}$ と $x > M_2 \Rightarrow |g(x)| < x^{n_2}$ がそれぞれ成り立つ。この時、$m = \max\{n_1, n_2\} + 1$ とすると任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ について $\lim_{x\to+\infty}(\alpha x^{n_1} + \beta x^{n_2})/x^m = 0$ より $\alpha f + \beta g \in V''$ が言えるので $V = V' = V''$ は実線型空間である。

2) $f \in V = V''$ とすると或る $n > 0$ と $M > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx &\le \int_0^{+\infty} e^{-tx}|f(x)|dx \\
&\le \int_0^{M} e^{-tx}|f(x)|dx + \int_M^{+\infty} e^{-tx}x^n dx \\
&\le \frac{1}{t^{n+1}}\Gamma(n+1) + \int_0^{M} e^{-tx}|f(x)|dx - \int_0^{M} e^{-tx}x^n dx
\end{aligned}$$

問 11.7 1) より右辺は収束するので左辺も収束して $f \in W$ となり、$V \subset W$ が成り立つ。広義積分の（積分と極限の）線型性から W は実線型空間であり、V, W は同じ演算について実線型空間を成すから V は W の部分線型空間である。

3) 部分積分より

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(t) &= \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx \\
&= -\frac{1}{t}[e^{-tx}f(x)]_0^{+\infty} + \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-tx}Df(x)dx
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}f$ の収束性より $\lim_{x\to+\infty} e^{-tx}f(x) = 0$ なので

$$\mathcal{L}f(t) = \frac{1}{t}f(0) + \frac{1}{t}(\mathcal{L}Df)(t)$$
$$(\mathcal{L}Df)(t) = -f(0) + t(\mathcal{L}f)(t)$$

右辺が収束するので左辺も収束し、$Df \in W$ である。

4) $f(x) = \sin x$ とすると f は連続であり、$\sin x \leq 1$ より $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 0$ が成り立つので $f \in V$ である。
又部分積分より

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(t) &= \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x \, dx \\
&= -\frac{1}{t}[e^{-tx}\sin x]_0^{+\infty} + \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos x \, dx \\
&= -\frac{1}{t^2}[e^{-tx}\cos x]_0^{+\infty} - \frac{1}{t^2}\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x \, dx \\
&= \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}\mathcal{L}f(t) \\
\mathcal{L}f(t) &= \frac{1}{1+t^2}
\end{aligned}$$

5) 3) より $\mathcal{L}Df, \mathcal{L}D^2 f$ は収束するので

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}\sin)(t) &= \mathcal{L}(D^2 f + 2Df + f)(t) \\
\frac{1}{1+t^2} &= (\mathcal{L}D^2 f)(t) + 2(\mathcal{L}Df)(t) + \mathcal{L}f(t) \\
&= -Df(0) + t(\mathcal{L}Df)(t) - 2f(0) + 2t(\mathcal{L}f)(t) + \mathcal{L}f(t) \\
&= (1+t)^2(\mathcal{L}f)(t) - (t+2)f(0) - Df(0) \\
\mathcal{L}f(t) &= \frac{1}{(1+t)^2}\left\{\frac{1}{1+t^2} + (t+2)f(0) + Df(0)\right\}
\end{aligned}$$

6) 広義積分の線型性より $\mathcal{L}$ は線型写像である。

問 13.2

1) $I = (0, +\infty)$ とする。$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) dx$ は任意の $t \in I$ について収束する。一方

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right)(x,t) = -e^{-tx}\sin x$$

は $[0, +\infty) \times I$ 上存在して連続であり、

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right) dx &= -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x \, dx \\
&= -\frac{1}{1+t^2}
\end{aligned}$$

の収束は任意の閉区間 $[a, b] \subset I$ について一様である。よって

$$D\mathcal{L}f(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right) dx = -\frac{1}{1+t^2}$$

2) 読者への練習問題とする。