２０１１年度数学 IA（斎藤 義久） 冬学期中間試験問題　解答

[1] 次の不定積分を求めよ．ただし積分定数は無視して良い．

(1)$\displaystyle\int x^2e^x dx$　　(2)$\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$

[解]

(1) $(x^2-2x+2)e^x$

(2)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3-1} &= \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} \\
&= \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} \\
&= \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{6}\frac{(2x+1)+3}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{6}\left(\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} + \frac{3}{x^2+x+1}\right)
\end{aligned}$$

それぞれの不定積分を求めると，

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3(x-1)} &= \frac{1}{3}\log|x-1| \\
\int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx &= \log(x^2+x+1) \\
\int \frac{3}{x^2+x+1}dx &= 3\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\
&= 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)
\end{aligned}$$

以上をまとめると，

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

[2] 次の積分が広義積分かどうか調べ，広義積分でない（＝普通の積分である）場合には，その値を求めよ．また広義積分である場合には，収束・発散を判定し，収束するならその値を求めよ．

(1)$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}dx$ (n は正の整数)　　(2)$\displaystyle\int_0^1 \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

[解]

(1) $A_n = \dfrac{\sin nx}{\sin x}$とおく．

$$\begin{aligned}
\frac{\sin nx}{\sin x} &= \frac{\sin{(n-1)x}\cos x + \cos{(n-1)x}\sin x}{\sin x} \\
&= A_{n-1}\cos x + \cos{(n-1)x}
\end{aligned}$$

すなわち，$\lim_{x\to+0} A_{n-1}$の値が有限ならば，$\lim_{x\to+0} A_n$の値も有限.
$A_1=1$ であるから，すべての n について $\lim_{x\to+0} A_n$の値は有限. $\lim_{x\to\pi-0}$ のときも同様に，極限値は有限である
. したがって，この積分は広義積分ではない（普通の積分である）.

$I_n=\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx$ とおくと，$n\geq 3$ のとき，

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{\sin{(n-1)x}\cos x+\cos{(n-1)x}\sin x}{\sin x} \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{\sin{(n-2)x}\cos x+\cos{(n-2)x}\sin x}{\sin x}\cos x+\cos{(n-1)x}\right)dx \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{\sin{(n-2)x}}{\sin x}(1-\sin^2 x)+\cos{(n-2)x}\cos x+\cos{(n-1)x}\right)dx \\
&= I_{n-2}+\int_0^\pi \left(-\sin{(n-2)x}\sin x+\cos{(n-2)x}\cos x+\cos{(n-1)x}\right)dx \\
&= I_{n-2}+2\int_0^\pi \cos{(n-1)x}dx \\
&= I_{n-2}+2\left[\frac{\sin{(n-1)x}}{n-1}\right]_0^\pi \\
&= I_{n-2}
\end{aligned}
$$

$n\leq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\pi dx=\pi \\
I_2 &= \int_0^\pi 2\cos x dx=0
\end{aligned}
$$

以上より，この定積分の値は，

$$
\begin{cases}
\pi \ (n\text{ が奇数のとき}) \\
0 \ (n\text{ が偶数のとき})
\end{cases}
$$

(2) 被積分関数は，$\lim_{x\to1-0}$ としたとき無限大に発散するので，この積分は広義積分である.

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_0^t x\arcsin x(\arcsin x)'dx \\
&= \left[\frac{x}{2}\arcsin^2 x\right]_0^t-\frac{1}{2}\int_0^t \arcsin^2 xdx \\
&= \frac{t}{2}\arcsin^2 t-\frac{1}{2}\int_0^t \arcsin^2 xdx
\end{aligned}
$$

ここで，第二項の積分を計算する. $\arcsin x=u$ と置換すると，$dx=\cos udu$ であるので，

$$
\int_0^t \arcsin^2 xdx=\int_0^{\arcsin t} u^2\cos udu
$$

右辺の積分は簡単に計算できて，結果は

$$\int_0^t \arcsin^2 x dx = t \arcsin^2 t - 2t + 2 \arcsin t \cos(\arcsin t)$$

したがって,

$$\int_0^t \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = t - \arcsin t \cos(\arcsin t)$$

よって，求める広義積分の値は,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{t \to 1-0} (t - \arcsin t \cos(\arcsin t)) \\ &= 1\end{aligned}$$

[3] 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx$ の収束・発散を判定し，収束するならその値を求めよ.

[解] この広義積分は２つの広義積分に分けて考えることができる.

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2} dx + \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx$$

ここで，$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2} dx$，$I_2 = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx$ とおく.
I_1について，$0 < x \leq 1$ のとき,

$$\log x < \frac{\log x}{1+x^2} \leq 0 \Longrightarrow \int_0^1 \log x dx < \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2} dx \leq 0$$

(注：この段階では $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2} dx$ が収束することが示されていないので，本当はこういう書き方は正しくないが，授業でもこのような表記をしていたので許容されるはず)

他方,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log x dx &= \lim_{c \to +0} \int_c^1 \log x dx \\ &= \lim_{c \to +0} [x \log x - x]_c^1 \\ &= -1\end{aligned}$$

したがって I_1 は収束する.
次に I_2 について，$b > 1$ として,

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{\log x}{1+x^2} dx &= \int_1^{1/b} \frac{\log \frac{1}{t}}{1+(\frac{1}{t})^2} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= -\int_{1/b}^1 \frac{\log t}{1+t^2} dt\end{aligned}$$

$b \to +\infty$ のとき，$\dfrac{1}{b} \to +0$ だから，

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{\log x}{1+x^2}dx \\ &= -\lim_{1/b\to+0}\int_{1/b}^1 \frac{\log t}{1+t^2}dt \\ &= -I_1 \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} \int_1^b \frac{\log x}{1+x^2}dx &= I_1 + I_2 \\ &= I_1 + (-I_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

（注：I_1 の値が収束することを言わないと $I_1 + I_2 = 0$ の式が成り立つとは言えないので，必ず I_1 が収束することを述べること）

[4] リーマン積分の定義にしたがって，$\displaystyle\int_0^a x^2dx = \frac{a^3}{3}$ を示せ．ただし $a > 0$ とする．

[解] 分割Δ : $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$ を任意にとる．また，i 番目の小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の中から $c_i^0 = \sqrt{\dfrac{1}{3}({x_i}^2 + x_ix_{i-1} + x_{i-1}^2)}$をとる．
このときリーマン和 $S(x^2, \Delta, \{c_i^0\})$ は，

$$\begin{aligned} S(x^2, \Delta, \{c_i^0\}) &= \sum_{i=1}^n (c_i^0)^2(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^n (x_i^3 - x_{i-1}^3) \\ &= \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

分割 Δの各小区間の幅の最大値を$\delta(\Delta)$ とすると，一般のリーマン和 $S(x^2, \Delta, \{c_i\})$ と上で考えた特殊なリーマン和 $S(x^2, \Delta, \{c_i^0\}) = \dfrac{a^3}{3}$ の差は，

$$\begin{aligned} \left|S(x^2, \Delta, \{c_i\}) - \frac{a^3}{3}\right| &\leq \sum_{i=1}^n \left|c_i^2 - (c_i^0)^2\right|(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left|c_i - c_i^0\right|(c_i + c_i^0)(x_i - x_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^n \delta(\Delta)\cdot 2a(x_i - x_{i-1}) \\ &= 2\delta(\Delta)a^2 \end{aligned}$$

と評価できる．右辺は $\delta(\Delta) \to 0$ のとき 0 に収束するので，

$$\begin{aligned}\int_0^a x^2 dx &= \lim_{\delta(\Delta)\to 0} S(x^2, \Delta, \{c_i\}) \\ &= \frac{a^3}{3}\end{aligned}$$

[補足]「リーマン積分の定義にしたがって〜」の解き方
求める積分が $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ であるとします．
まず最初に $[a, b]$ の分割Δを任意にとります．次に i 番目の小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ から c_i^0をとります．
このとき c_i^0は，

$$f(c_i^0) = \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx}{x_i - x_{i-1}}$$

を満たすようにします．こうすると，平均値の定理より $x_{i-1} < c_i^0 < x_i$であることがわかります．
特殊なリーマン和 $S(f, \Delta, \{c_i^0\})$ の値は当然 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ になります．
次に，一般のリーマン和 $S(f, \Delta, \{c_i\})$ と特殊なリーマン和の差をとって，分割Δの幅の最大値$\delta(\Delta)$ が 0 に近づくときその差も 0 に近づくことを示します．すなわち，

$$\left|S(f, \Delta, \{c_i\} - S(f, \Delta, \{c_i^0\})\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|f(c_i) - f(c_i^0)\right|(x_i - x_{i-1})$$

の値を評価し，右辺が（定数）$\times\, \delta(\Delta)$ の形になればよいということです．
ここで，$\left|f(c_i) - f(c_i^0)\right|$の値が（定数）$\times\, \delta(\Delta)$ より小さいと評価できれば，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a$（定数）なので，評価が完了します．
(試験中に考えなければならないのはここの評価の仕方だけです．それ以外は機械的な作業で済みます．)
あとは両辺の$\delta(\Delta) \to 0$ の極限をとれば終わりです．

[5] $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ 上の有界な可積分関数とし，$[a, b]$ 上の関数 $F(x)$ を

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \ (a \leq x \leq b)$$

と定める．このとき以下に述べることは正しいか？正しければ証明し，間違っているなら反例を挙げて説明せよ．
(1)$F(x)$ は (a, b) 上の連続関数である．
(2)$F(x)$ は (a, b) で微分可能である．
(3)$F(x)$ が (a, b) で微分可能ならば，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．

[解]
(1)「$F(x)$ は (a, b) 上の連続関数である．」は正しい．

（証明）

$f(x)$ は有界だから，$|f(x)| \leq M$ なる実数 M が存在する．十分に絶対値が小さい実数 h について，

$$\begin{aligned}\Big|F(x+h)-F(x)\Big| &= \Big|\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\Big| \\ &= \Big|\int_x^{x+h} f(t)dt\Big| \\ &\leq M|h|\end{aligned}$$

したがって，

$$\lim_{h\to 0}|F(x+h)-F(x)| = 0$$

ゆえに，$F(x)$ は連続関数である．（証明終わり）

(2)「$F(x)$ は (a,b) 上で微分可能である．」は正しくない．

（反例）

次のような，閉区間 $[0,2]$ 上の有界な関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ (0 \leq x < 1) \\ 1 \ (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

関数 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ が $(0,2)$ で微分可能であるとは，$0 \leq x \leq 2$ を満たすすべての x について

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

の値が存在することと同値であるが，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to +0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h} &= \lim_{h\to +0}\frac{\int_1^{1+h} f(t)dt}{h} = \lim_{h\to +0} 1 = 1 \\ \lim_{h\to -0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h} &= -\lim_{h\to +0}\frac{\int_{1-h}^{1} f(t)dt}{h} = \lim_{h\to +0} 0 = 0\end{aligned}$$

であるため，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ の値は存在しない．したがって $F(x)$ は微分可能でなく，はじめの命題「$F(x)$ は (a,b) 上で微分可能である．」が正しくないことが示された．

[補足]上の例のように，$f(x)$ が不連続だと $F(x)$ は微分可能ではありません．逆に，$f(x)$ が連続関数ならば $F(x)$ は微分可能です．((3) 参照)

(3)「$F(x)$ が (a,b) で微分可能ならば，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．」は正しい．

[証明]

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとは，$F'(x) = f(x)$ が成り立つということである．

ここで，$F(x)$ が (a,b) で微分可能であることから，$f(x)$ は $[a,b]$ で連続である．なぜなら (2) より，$f(x)$ が不連続ならば，その $f(x)$ の不連続点において $F(x)$ は微分可能でないからである．

したがって，積分の平均値の定理が適用でき，$\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt = hf(c)$, $x < c < x+h$ なる実数 c が存在する．

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}f(c)$$

であるが，$x<c<x+h$ より $\lim\limits_{h\to 0}f(c)=f(x)$ であるから，

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}f(c)=f(x)$$

したがって $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．

[6] 非負整数 n に対し $P_n(x):=\dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$ とおく．$\displaystyle\int_{-1}^{1}P_n(x)^2dx$ を求めよ．

[解] $Q_{n,k}(x)=\dfrac{d^k}{dx^k}(1-x^2)^n$ とおくと，次のことが成り立つ．

$$\begin{aligned} P_n(x) &= Q_{n,n}(x) \\ Q_{n,k}(x)=\frac{d}{dx}Q_{n,k-1}(x) &\Longleftrightarrow \int Q_{n,k}(x)dx=Q_{n,k-1}(x) \end{aligned}$$

ここで，$0\leq k\leq n-1$ のとき，$f_k(x)$ を多項式として $Q_{n,k}(x)$ が

$$Q_{n,k}(x)=f_k(x)(1-x^2)^{n-k} \tag{1}$$

という形で表されることを帰納的に示す．$k=0$ のとき，

$$Q_{n,0}(x)=(1-x^2)^n$$

これは (1) の形で表されている．
次に，$k=i(0\leq i\leq n-2)$ のとき $Q_{n,i}(x)$ が (1) の形で表されるとすると，

$$\begin{aligned} Q_{n,i+1}(x)&=\frac{d}{dx}Q_{n,i}(x) \\ &=f_i'(x)(1-x^2)^{n-i}-2(n-i)xf_i(x)(1-x^2)^{n-(i+1)} \\ &=\{f_i'(x)(1-x^2)-2(n-i)xf_i(x)\}(1-x^2)^{n-(i+1)} \end{aligned}$$

ここで，$f_{i+1}(x)=f_i'(x)(1-x^2)-2(n-i)xf_i(x)$ とおけば，

$$Q_{n,i+1}(x)=f_{i+1}(x)(1-x^2)^{n-(i+1)}$$

したがって，$0\leq k\leq n-1$ のとき，$Q_{n,k}(x)$ は (1) の形で表される．
このことより，$0\leq k\leq n-1$ のとき，$Q_{n,k}(\pm 1)=0$．

求める定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_n(x)^2dx$ を部分積分していくと，

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}P_n(x)^2dx&=\int_{-1}^{1}P_n(x)Q_{n,n}(x)dx \\ &=\Big[P_n(x)Q_{n,n-1}(x)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left(\frac{d}{dx}P_n(x)\right)Q_{n,n-1}(x)dx \\ &=-\int_{-1}^{1}\left(\frac{d}{dx}P_n(x)\right)Q_{n,n-1}(x)dx\ (\because Q_{n,n-1}(\pm 1)=0) \end{aligned}$$

この操作を n 回繰り返すことにより，

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx &= \int_{-1}^{1} P_n(x) Q_{n,n}(x) dx \\
&= (-1)^n \int_{-1}^{1} \left(\frac{d^n}{dx^n} P_n(x) \right) Q_{n,0}(x) dx \\
&= (-1)^n \int_{-1}^{1} \left(\frac{d^n}{dx^n} P_n(x) \right) (1-x^2)^n dx \qquad (2)
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n} P_n(x) &= \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (1-x^2)^n \\
&= \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \{(-1)^n x^{2n} + (2n-2) \text{ 次以下の多項式}\} \\
&= (-1)^n (2n)!
\end{aligned}$$

であるから，これを (2) 式に代入すると，

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = (2n)! \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx \qquad (3)$$

次に，この式の右辺に出てくる定積分の値を計算する．

$R_{m,n}(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1+x)^m (1-x)^n dx$ (m, n は正の整数) とおくと，部分積分により，

$$\begin{aligned}
R_{m,n}(x) &= \left[\frac{1}{m+1} (1+x)^{m+1} (1-x)^n \right]_{-1}^{1} + \frac{n}{m+1} \int_{-1}^{1} (1+x)^{m+1} (1-x)^{n-1} dx \\
&= \frac{n}{m+1} R_{m+1,n-1}(x)
\end{aligned}$$

この等式を繰り返し用いると，(3) 式の右辺の定積分は

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx &= \int_{-1}^{1} (1+x)^n (1-x)^n dx \\
&= R_{n,n}(x) \\
&= \frac{n}{n+1} R_{n+1,n-1}(x) \\
&= \cdots \\
&= \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} R_{2n,0}(x) \\
&= \frac{n!n!}{(2n)!} \int_{-1}^{1} (1+x)^{2n} dx \\
&= \frac{n!n!}{(2n)!} \left[\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1} \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

これを (3) 式に代入すると，

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n+1}}{2n+1}$$