２０１１年度数学 IA（斎藤 義久） 夏学期期末試験問題　解答

[1] ２変数 C^2-級関数 $f(x,y)$ が $\Delta f = 0$ を満たすとき，調和関数であるという．ここに $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする．このとき，次の関数が調和関数であることを証明せよ．ただし与えられた関数が C^2-級であることは証明せずに用いてよい．

(1)$\log\sqrt{x^2+y^2}$

[解]

$$\frac{\partial}{\partial x}\log\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

y についても同様にして，

$$\frac{\partial}{\partial y}\log\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\log\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

したがって，

$$\Delta\log\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

であるから，調和関数である．（証明終わり）

(2)$\arctan\dfrac{y}{x}$

[解]

$$\frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x} = \frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\arctan\frac{y}{x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{y}{x} = \frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\arctan\frac{y}{x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

したがって，

$$\Delta\arctan\frac{y}{x} = 0$$

であるから，調和関数である．（証明終わり）

[2] 3 変数の極座標系（r,θ,φ）を

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

で定める．このとき $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ を極座標系（r,θ,φ）で表示せよ．

[解]

$w = f(x,y,z)$ とおく．このとき，$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$ である．

まず，各変数の１次偏導関数を求める．

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \qquad (1)\\ &= \frac{\partial w}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial w}{\partial z}\cos\theta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x} r\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial y} r\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial w}{\partial z}\sin\theta \\
\frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial w}{\partial x} r\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial w}{\partial y} r\sin\theta\cos\varphi
\end{aligned}
$$

(1) 式の両辺を r で微分することで次の等式が得られる．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = {} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r}\right) \\
& + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

(1) 式の r を θ や φ に変えることで，$\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$ と $\dfrac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$ の式も得られる．

$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$ を代入して $\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$ を求めると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = {} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\sin^2\theta\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\theta\sin^2\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\cos^2\theta \\
& + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = {} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} r^2\sin^2\theta \\
& + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} r^2\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z} r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x} r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\right) \\
& - \frac{\partial w}{\partial x} r\sin\theta\cos\varphi - \frac{\partial w}{\partial y} r\sin\theta\sin\varphi - \frac{\partial w}{\partial z} r\cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = {} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi \\
& - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi \\
& - \frac{\partial w}{\partial x} r\sin\theta\cos\varphi - \frac{\partial w}{\partial y} r\sin\theta\sin\varphi
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 w}{\partial^2 \varphi}$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial^2 \varphi} = {} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\sin^2\theta\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\theta\sin^2\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\cos^2\theta \\
& + 2\left(\underline{\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi} + \underline{\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi} + \underline{\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi}\right) \\
& + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\theta\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos^2\theta\sin^2\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\sin^2\theta \\
& + 2\left(\underline{\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi} - \underline{\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi} - \underline{\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi}\right) \\
& - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{1}{r}\sin\theta\cos\varphi - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{1}{r}\sin\theta\sin\varphi - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{1}{r}\cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\sin^2\varphi+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos^2\varphi\\
&\underline{-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi}\\
&-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi \qquad \text{（下線部の項は消える）}\\
&=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}
\end{aligned}
$$

したがって，Δ について整理すると，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

[3] 2 変数関数 $f(x,y)=(xy)^{2/3}$ を考える．

(1) $f(x,y)$ は原点 (0, 0) で全微分可能であることを示せ．

(2) $f(x,y)$ は原点 (0, 0) で C^1-級であるかどうか，判定せよ．

[解] 教科書　問題 4.2.5 参照

[4] 次の関数の極値と，それを与える点を全て求めよ．ただし本問において極値とは，広義の極値を表すものとする．

(1) $xye^{-x^2-y^2}$

[解]

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(1-2x^2)ye^{-x^2-y^2},\ \frac{\partial f}{\partial x}=(1-2y^2)xe^{-x^2-y^2}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}$=0 となる (x,y) が極値を取りうる点であり，これを求めると，

$$(x,y)=(0,0),(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{（複号任意）} \tag{1}$$

また，第 2 次偏導関数も求めると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}&=(4x^3-6x)ye^{-x^2-y^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}&=(1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}&=(4y^3-6y)xe^{-x^2-y^2}
\end{aligned}
$$

(1) で求めたそれぞれの (x,y) の値について，ヘッシアン $\det H_f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2$ と，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ の正負を求める．

$(x,y)=(0,0)$ のとき，$\det H_f=-1<0$ となるので，$(0,0)$ は鞍点である．すなわち極値をとらない．

$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$（複号同順）のとき, $\det H_f=4e^{-2}>0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2e^{-2}<0$ となる.
したがって, $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$（複号同順）で極大.
$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$（複号同順）のとき, $\det H_f=4e^{-2}>0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2e^{-2}>0$ となる.
したがって, $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$（複号同順）で極小.
また,

$$f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2e},\quad f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{2e}$$

以上をまとめると,

$$\begin{cases} \text{極大値} \quad \dfrac{1}{2e} & \left((x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})\ \text{（複号同順）}\right) \\ \text{極小値} \quad -\dfrac{1}{2e} & \left((x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})\ \text{（複号同順）}\right) \end{cases}$$

(2)x^3+y^3-3xy
[解]

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y, \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x$$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$=0 を満たす (x,y) の組は,

$$(x,y)=(0,0),(1,1)$$

また,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$$

$(x,y)=(0,0)$ のとき，$\det H_f=-9<0$ であるから，鞍点である.
$(x,y)=(1,1)$ のとき，$\det H_f=27>0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6>0$ であるから，極小となる.
また，$f(1,1)=-1$.
以上をまとめると,

$$\begin{cases} \text{極大値} \quad \text{なし} & \\ \text{極小値} \quad -1 & ((x,y)=(1,1)) \end{cases}$$

(3)$(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2$
[解]

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \frac{\partial f}{\partial y}=2y\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$=0 を満たす (x,y) の組は,

$$(x,y)=(0,0)\ \text{と},\ \sqrt{x^2+y^2}=1\ \text{を満たすすべての}\ (x,y)$$

また，$(x, y) \neq (0,0)$ で，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)
\end{aligned}
$$

まず，$(x, y) = (0,0)$ のときを考える．

$$f(0,0) = 1$$

$0 < x^2 + y^2 < 1$ を満たすすべての点で，

$$
\begin{gathered}
-1 < \sqrt{x^2+y^2} - 1 < 0 \\
0 < (\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2 < 1
\end{gathered}
$$

したがって極値の定義より，点 (0,0) は極大値 1 をとる．
次に，$\sqrt{a^2+b^2} = 1$ を満たす点 (a, b) を考える．

$$f(a, b) = 0$$

このとき，$\det H_f = 0$ となるから，ヘッシアンの値では極値をとるかどうか判断できない．
しかし，任意の点 (x, y) において $f(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2 \geq 0 = f(a,b)$ となることから，点 (a, b) は広義の極小値である．

以上をまとめると，

$$
\begin{cases}
\text{極大値} \quad 1 \quad ((x,y) = (0,0)) \\
\text{極小値} \quad 0 \quad \left(x^2+y^2 = 1 \text{ を満たす } (x,y)\right)
\end{cases}
$$

(4)$(y - x^2)(y - 2x^2)$

[解]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 6xy, \frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 + 2y$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$=0 を満たす (x, y) の組は,

$$(x, y) = (0,0)$$

ここで，$f(x,y) = 0$ である．また，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 24x^2 - 6y, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -6x, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2
\end{aligned}
$$

このとき，$\det H_f = 0$ となる．
しかし，任意の $\delta > 0$ に対して，$0 < x^2 + y^2 < \delta^2$かつ $y = 3x^2$を満たす (x, y) と，$0 < x^2 + y^2 < \delta^2$かつ $y = \dfrac{3}{2}x^2$を満たす (x, y) が存在する．
前者を (x_1, y_1), 後者を (x_2, y_2) とおけば,

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= 2x_1^4 > 0 \\ f(x_2, y_2) &= -\frac{1}{4}x_2^4 < 0 \end{aligned}$$

すなわち，(0,0) では極値をとらない．
以上より，この関数の極値は存在しない．

[注] ヘッシアンの値が 0 になるときは，極値の定義などを利用して，それぞれの点で極値を取るかどうかを個別に調べる必要があります．

[5]x, y, z は正の実数で，かつ $x + y + z = a$（定数）を満たすものとする．このとき $f(x, y, z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma$の最大値と，それを与える (x, y, z) を全て求めよ．ただしα, β, γは正の定数とする．

[解] $z = a - x - y$ を代入して，

$$f(x, y) = x^\alpha y^\beta (a - x - y)^\gamma$$

$x > 0, y > 0, x + y < a$ における $f(x, y)$ の最大値を求めればよい．

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= x^{\alpha-1} y^\beta (a - x - y)^{\gamma-1} \left(\alpha(a - x - y) - \gamma x\right), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^\alpha y^{\beta-1} (a - x - y)^{\gamma-1} \left(\alpha(a - x - y) - \gamma y\right) \end{aligned}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$=0 を解くと，

$$x = \frac{\alpha a}{\alpha + \beta + \gamma}, y = \frac{\beta a}{\alpha + \beta + \gamma}$$

以下，x, y はこの値を考える．
$\alpha(a - x - y) - \gamma x = \alpha(a - x - y) - \gamma y = 0$ であることに注意して$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$を求めると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= x^{\alpha-1} y^\beta (a - x - y)^{\gamma-1} (-\alpha - \gamma) < 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\alpha x^{\alpha-1} y^\beta (a - x - y)^{\gamma-1}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^\alpha y^{\beta-1} (a - x - y)^{\gamma-1} (-\beta - \gamma) \end{aligned}$$

ヘッシアンを求めると，

$$\det H_f = x^{2\alpha-1} y^{2\beta-1} (a - x - y)^{2\gamma-2} \gamma(\alpha + \beta + \gamma) > 0$$

$\det H_f > 0, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ であるから，$f(x,y)$ はこの点で極大値をとる．
最大値を与える点は，境界上の点か内部にあって極値を与える点であるが，境界上の点の $f(x,y)$ の値は 0 であるから，この領域で $f(\dfrac{\alpha a}{\alpha+\beta+\gamma}, \dfrac{\beta a}{\alpha+\beta+\gamma})$ よりも大きくなる点は存在しない．
したがって，このときの値が最大値である．
以上より，

$$\text{最大値}\quad \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^{\alpha+\beta+\gamma}} a^{\alpha+\beta+\gamma} \left((x,y,z) = (\frac{\alpha a}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\beta a}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\gamma a}{\alpha+\beta+\gamma}) \text{ のとき} \right)$$

[6] 問題文省略

[解] まず，関数 $f(x,y)$ を極座標表示する．すなわち，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$とおき，$(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r,\theta)$ とする．
極座標表示をした上で，θの値を固定すると，g は r の 1 変数関数となる．この関数 $g(r)$ は関数 $g(r,\theta)$ をある原点を通る平面で切った断面である．
A君の主張は，この関数 $g(r)$ がθの値によらず $r=0$ で極値を取るならば，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値をとるという主張である．
以下，この主張が間違いであることを示す．
間違っている部分は，どんな平面で切っても極値をとるならば極値である，と考えていることである．
例として $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$ を考える．

[4](4) から，$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$=0 の解は $(x,y) = (0,0)$．ゆえに $r=0$ で極値をとるかどうか調べる．

$$\begin{aligned} g(r) &= f(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &= 2r^4\cos^4\theta - 3r^3\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dr} &= 8r^3\cos^4\theta - 9r^2\cos^2\theta\sin\theta + 2r\sin^2\theta \\ \frac{d^2g}{dr^2} &= 24r^2\cos^4\theta - 18r\cos^2\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta \\ \frac{d^2g}{dr^2}(0) &= 2\sin^2\theta \end{aligned}$$

$\theta \neq 0, \pi$なら，$\dfrac{d^2g}{dr^2}(0) > 0$．すなわち下に凸．
$\theta = 0$ またはπのとき，

$$g(r) = 2r^4$$

したがって，下に凸．ゆえに，$g(r)$ はどのようなθに対しても下に凸．
しかし，[4](4) で求めた通り，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値をとらない．このことから，A 君の主張が間違いであることが示された．