２０１１年度数学 IA（斎藤 義久） 夏学期中間試験問題　解答

[1] 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$

[解]

$$\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x\sqrt{x}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

(2) $\log\left(\sin\left(x+1\right)\right)$

[解]

$$\left(\log\left(\sin\left(x+1\right)\right)\right)' = \frac{\cos\left(x+1\right)}{\sin\left(x+1\right)}$$

(3) $\mathrm{Arcsin}(\log(x+1))$

[解]

$$y = \mathrm{Arcsin}(\log(x+1)) \quad \text{とする。}$$

$$\sin y = \log(x+1)$$

両辺を x で微分して、

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{(x+1)\cos y} \\ &= \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-(\log(x+1))^2}}\end{aligned}$$

(4) $x^{\sin x}$

[解]

$$y = x^{\sin x} \quad \text{とする。}$$

両辺の自然対数をとって、

$$\log y = \sin x \log x$$

両辺を x で微分して、

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}\right)x^{\sin x}\end{aligned}$$

[2] 次の極限値を求めよ（ε - δ 論法は使っても使わなくてもよい）。

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

[解]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$
$$= 1$$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$
[解]

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - x - 2} &= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{2x+1}{x+1} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x+1}$
[解]

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x+1} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(4) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x}$
[解]
ロピタルの定理を用いる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} \\ &= \cdots \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{e^x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

[3] 次の関数が x=1 で連続であることを $\varepsilon - \delta$ 論法によって証明せよ。
(1) $\sin x$
[解] 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\delta = \varepsilon$ とおく。$x - 1 = h$ とおくと、$|x-1| < \delta$のとき $|h| < \delta$ であり、

$$\begin{aligned} |\sin(1+h) - \sin 1| &= \left| 2\cos\frac{2+h}{2} \sin\frac{h}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin\frac{h}{2} \right| \\ &< 2 \left| \frac{h}{2} \right| \\ &= |h| < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

ゆえに、$\sin x$ は x=1 で連続である。(証明終わり)

(2)x^3

[解] 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\delta = \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{7}\}$ とおく。$|x-1| < \delta$ 　のとき、

$$\begin{aligned} |x^3 - 1| &= |(x-1)(x^2+x+1)| \\ &= |x-1||x^2+x+1| \\ &< \frac{\varepsilon}{7} \cdot |2^2+2+1| \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

ゆえに x^3 は x=1 で連続である。(証明終わり)

[4] $0 < a_1 < b_1$ とする。また、$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$、$b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ と定義する。このとき数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ はともに収束し、しかも $\lim a_n = \lim b_n$ であることを証明せよ。

[解] $0 < a_n < b_n$ であるとすると、

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > a_n,\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < b_n \tag{1}$$

また、$(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2 > 0$ であることから、

$$\begin{aligned} a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n} &> 0 \\ \sqrt{a_n b_n} &< \frac{a_n + b_n}{2} \\ a_{n+1} &< b_{n+1} \end{aligned} \tag{2}$$

$0 < a_1 < b_1$ であることと、(1)(2) より、帰納的に

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < b_n < \cdots < b_2 < b_1$$

b_1 は数列 $\{a_n\}$ の上界であるから、数列 $\{a_n\}$ は収束する。同様に、a_1 は数列 $\{b_n\}$ の下界であるから、数列 $\{b_n\}$ は収束する。

また、

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} &< \frac{a_n + b_n}{2} - a_n \\ &= \frac{b_n - a_n}{2} \end{aligned}$$

この不等式を繰り返し用いて、

$$b_n - a_n < \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} < \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

したがって、数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ は公理 II の 2 条件を満たし、

$$\lim a_n = \lim b_n$$

である。(証明終わり)