電磁気学A解答例

つん電磁気

平成 25 年 4 月 6 日

2012 年度冬学期の国場敦夫の電磁気 A の解答例

第 I 部

1

1　1

1.1　問題

z 軸全体に一様な線密度 λ で電荷が分布している。電場$\boldsymbol{E}$(x,y,z) と、電位 ϕ(x,y,z) を求めよ。電位の基準点と基準値は勝手に選んでよい。

1.2　解答例

これの解答方法は電場を求める段階に置いて 2 つ考えられる。それぞれについて書いておこうと思う。
なお、推奨されるのは１つ目の方法。

1.2.1　解答 1

電荷と、電荷が作る電場の関係性は、マクスウェルの 4 つの方程式のうちでは、
ガウスの法則
の示すところである。故に、これを適用する。

z 軸から見て、z 軸からある一定距離 r だけ離れた点の電場については、
いかなる z 軸からある一定距離 r だけ離れた点についても幾何的には
z 軸上の電荷との関係は同じであることから、(等方的)
z 軸からある一定距離 r だけ離れた点の電場の大きさは距離 r によって決まり、
向きは電荷の位置ベクトルによって確定する。
また、向きも、z 軸 + 側から見たときと − 側から見たときの幾何的関係も変わらないことから、
z 軸方向の電場も存在しない。
(上の説明の部分が、この方法のめんどくささ。これの説明方法のところのみ、の法則などを流用するのもありかもしれない。ただ、実際には、「等方的」ということと、z 軸方向は考えなくて良いことのみ主張すれば良い。)
そこで、z 軸を中心とする半径 r の円筒を考えて、ガウスの法則を適用するとよい。
円筒の側面ではどこでも同じ大きさ同じ向きの z 軸から見て「放射状」[1]の電場$\boldsymbol{E}$がある。
さて、単位長さを円筒の高さとしてガウスの法則を適用する。

$$2\pi r \times E = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

が成立する。
これから、E が確定し、あとは、r を書き換えて、「放射状」であることから、向きを与えれば良い。
r は z 軸からの距離であるから、$\sqrt{x^2+y^2}$ で、向きは z 軸から電荷の位置を見たときの方向の単位ベクトルを x 軸 y 軸にそれぞれ射影させた長さを全体の大きさに掛ければ、x 成分 y 成分が確定できる。
要は

$$\boldsymbol{E} = (\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0)$$

ということになる。

[1]放射状であることは、電磁誘導の法則、つまり、回転と磁場の変化の関係性と、等方的仮定から主張できる。

1.2.2 解答 2

クーロンの法則と、合成電場は、合成前の各電場の和であるという、重ね合せの原理を用いて答案を作ることもできる。
その場合には、z 軸上 z の値で微小長さ dz の範囲に点電荷 λdz が存在していると考えて、
それが作る電場を足し合わせていく。
このときは、クーロンの法則に基づいて、最初から x 成分、y 成分、z 成分に分けて計算することができる。
まず、x 成分。
x 成分は、z 軸上 z の値にある点電荷が作る電場の x 成分は、

$$\frac{\lambda dz}{4\pi}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

z は $-\infty$ から ∞ までの範囲であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda dz}{4\pi}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ここで、$\sqrt{x^2+y^2}=r$,$z=r\tan\theta$ と置換することができる。そうすると、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda r d\theta}{4\pi\cos^2\theta}\frac{x}{(\frac{r^2}{\cos^2\theta})^{\frac{3}{2}}}$$

r、x は定数であることに注意して、積分操作すれば解答 1 の x 成分となる。
また、y 成分については x を y と書改めるだけで、y も定数であるから、解答 2 の y 成分。
z については、z が定数ではないことに注意して、置換してしまえばよい。やはり、0 という答えになる。

つぎに電位を求めるが、これは「電位の勾配に－をかけたものが電場」であることを思いだす。z 軸からの距離に依存し、放射状の電場であることから、電場の向きが z 軸からの位置ベクトルと平行より、電場の大きさを距離 r で表した式を r で積分して、r を戻せば良いだけ。
つまり、

$$E=\frac{\lambda}{2\pi r}$$

を r で積分する。ここで、基準云々は、積分定数をどんな値にしても良いことと対応するから、0 にすればよい。

答えは、

$$\phi = -\frac{\lambda}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

2　2

2.1　問題

z 軸に平行な 2 直線 $x - a = y = 0$ と $x + a = y = 0$ 上にそれぞれ線密度 λ と $-\lambda$ の一様な電荷分布がある。ただし、$a > 0$,$\lambda > 0$ とする。電位 $\phi(x, y, z)$ を求めよ。また、等電位面は円柱であることを示せ

2.2　解答

この問題の解答は先の 1 の答えを流用すれば良い。
また、電位も重ね合わせが有効であることから、
2 直線のそれぞれが作る電位の和を取ればよいだけ。前者の直線が作る電位は、x を $x - a$ に改めて
後者の直線が作る電位は、x を $x + a$ に改めて、λ を $-\lambda$ に改める。
よって

$$\phi = -\frac{\lambda}{2\pi} \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \frac{\lambda}{2\pi} \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

つぎに、これが等電位となる時にどうなるかを考えよう。
左辺が定数なら、取りあえず、両辺に定数を掛けても良いから、

$$\text{定数} = -\ln \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}$$

これは、ln の中身が定数であることから、

$$\text{定数} = \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}$$

この定数を c と置く。

$$(x-a)^2 + y^2 = c((x+a)^2 + y^2)$$

これを等式変形していく。

$$0 = (c-1)(x^2 + y^2) + 2(c+1)ax + (c-1)a^2$$

$$0 = (c-1)(x^2 + 2\frac{c+1}{c-1}ax + y^2 + a^2)$$
$$0 = x^2 + 2\frac{c+1}{c-1}ax + y^2 + a^2$$
$$(\frac{c+1}{c-1}a)^2 - a^2 = (x + \frac{c+1}{c-1}a)^2 + y^2$$

これは、円の方程式である。

3　3

3.1　問題

(2) の設定で、xy 平面内に限定して電気力線を実線で、等電位面を点線で 1 つの図上に描け

3.2　解答

この問題は、(2) におけるパラメータ c に対して形が定まるが、c は、$e^($電位 × 定数) のようなかたちをしている。
ゆえに、そもそも、c は正の値しかとらない。
また、等電位面の式であるから、今から求めるのは、等電位面。であるから、点線で描く。0 に近い場合どうなるだろうか。
左辺が 0 に近い正となり、a の係数は -1 となり、$x - a = y = 0$ 近傍の小さな円となる。
0 から少し大きくなると、どうなるか。c=0.5 を代入すると

$$8a^2 = (x-3a)^2 + y^2$$

となる。これは、$2\sqrt{2}$ の大きさの円が、3a,0 を中心に描かれる。
このように、だんだん、中心が a より大きな値になり、半径が大きくなっていく。
また、それでも、y 軸をまたぐ円にはならない。(漸近する)
c=1 については、2 の式をかなりもどって確認すると、x=0 であることが分る。
また、さらに大きくしていくと、今度は円の中心が $-\infty$ からだんだんと、$-a$ に近づいていくことと、左右対称になることが分る。
電場については、等電位面が多く密集しているところを高い密度で描き、等電位面に

垂直になるようにかけばいい。

第 II 部

2

4　1

4.1　問題

ビオ・サバールの法則とは何か。式を用いて簡潔に説明せよ

4.2　解答

電流 (素片) とその周りにできる磁場の関係の式
(ごめん、公式は打ち込むのが面倒なんで、教科書から探し出して …·)

注
ビオ・サバールの法則はクーロンの法則と同じ逆二乗の形 (大きさでの表現では分母に距離の二乗) をしていますが、
分子がベクトルの「外積」での表記となっています。
そうしないと、右ねじの法則のような関係性は出てこないってことがあるんだけど、なんかめんどくさいです。ポテンシャル同士で比較すると
クーロンの法則 (のポテンシャル版) の「電荷」を「電流素片」におきかえたベクトルのポテンシャルが、ベクトルポテンシャルで、その回転が磁場というありがたい関係があります。

5　2

5.1　問題

半径 a の円周にそって大きさ I の定常電流が流れている。円の中心における磁束密度の大きさ B_1 を求めよ。

5.2 解答

ビオ・サバールの法則、円の中心は円周上からの距離が一定 (=a) と言った条件から積分の形のビオ・サバールの法則に代入すると

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2} \times \frac{Ia}{a^2}$$

よって、$B_1 = \mu_0 \frac{I}{2a}$

6 3

6.1 問題

無限に長い直線の一部が半円に置き換わった電線を大きさ I の定常電流が流れている。円の中心 O における磁束密度の向きとその大きさ B_2 を求めよ

6.2 解答

直線部分の延長上に O があるため、直線部分によって生じる磁場はない。(ビオ・サバールの法則から導出できるので、これも言及すること。)
で、半円部分については、(2) で言及した部分の半分であるから、ビオ・サバールの式から磁場の大きさは B_1 の $\frac{1}{2}$ になる。向きは、右ねじの法則から出てくるように、問題用紙紙面の裏に向かう向き (図で描いて、矢を用いた表向き裏向きの記法で描くのが良いだろう。)。

第 III 部

3

7 1

7.1 問題

ファラデーの電磁誘導の法則を与え、その内容について 3,4 行で簡潔に説明せよ

7.2　解答

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

で表記され、閉曲面を貫く磁場の時間微分に比例して閉曲面を閉じる閉曲線上の電場一周の線積分、すなわち誘導起電力が生じ、その向きは、その向きに電流が流れた時に、磁場の変化を抑制するむきとなるという、レンツの法則に従う。

8　2

8.1　問題

磁束密度の大きさ B の一様な磁場中で、長さ L の直線上の物体 PQ の一端 P を固定し、磁場と垂直な面内で角速度 ω で回転させた。P からの距離 x の点における誘導電場の大きさ $E(x)$ と PQ 間に生じる誘導起電力の大きさ V を求めよ。

8.2　解答

この場合については、ローレンツ力によって、電場が生ずると考えれば良い。
ローレンツ力は、P からの距離 x においては、$x\omega$ で運動しているのと、外積の関係から、
電荷 q に対して

$$F = qx\omega B$$

である。
F と E は $F = qE$ であるから、$E = x\omega B$ である。
V は、E を線積分することで導出されるから、x で E を 0 から L まで積分すれば良い。
よって、$V = \frac{1}{2}\omega BL^2$

9　3

9.1　問題

あるヘリコプターの１つのプロペラの長さは 3m で、1 秒間に 2 回転する。地球磁場の鉛直成分が 0.5×10^{-4} テスラの場所で、プロペラの先端と回転軸の間に誘起される起電力はいくらか

9.2　解答

(2) の答えを流用すれば良い。
$L = 3$,$\omega = 2\pi \times 2$,$B = 0.5 \times 10^{-4}$ を (2) の答えに代入して計算した値。

第 IV 部

4

9.3　問題

真空中を伝わる電磁波を考える。電場が $\boldsymbol{E}(x, y, z) = (0, 0, A\sin(kx - \omega t))$ で与えられるとき、定数 A,k,ω の間にどのような関係が成立すべきか。また、磁束密度 $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ の式を求めよ

9.4　解答

マクスウェル方程式に、「真空」、つまり、何も物質が存在しない条件を与えると

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

の 4 つとなる。
一般に $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$ という公式があり、これを適用すると、

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\nabla^2 \boldsymbol{E}$$

となるが、これは、

$$\nabla \times (-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t})$$

であり、さらに、これは

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B})$$

これにさらにマクスウェル方程式を元に変形すると

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mu_0 \epsilon_0 \boldsymbol{E})$$

となる。故に、

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mu_0 \epsilon_0 \boldsymbol{E})$$

となるが、$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ であるから、z 成分を二回 x で微分したものと、二回 t で微分したものが、同じになるように、係数の条件を定めれば良い。

これは、$Ak^2 = A\omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ である。

磁束密度の式は、

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

で、$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ を求めて、積分により導出すれば良い。

$$-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = (0, Ak\cos(kx - \omega t), 0)$$

を時間で積分し、負号を調整すると、

$$\boldsymbol{B} = (0, A\frac{k}{\omega}\sin(kx - \omega t), 0)$$

となる。

第 V 部

5

9.5 問題

時間があれば、授業や内容についての自由な感想、意見 (成績に関係無し)

9.6 解答

もっと面白い問題作れや!!以下 ry

第 VI 部
総括

とにかく、嫌な問題でしたね。お疲れさまでした。

なお、この解答が完全に正しいことの保障は一切ありません。あくまでも、2012 年度理一 29 組が作っただけにすぎないです。
で、この問題が何を聞いているのかって ?? そんなこたあ、俺は知らない。
国場さんにきいてくれ。で批評すれば、具体的すぎる問題が、僕はあまり気に入らない。
高校物理じみていて、なんだかやる気も起きない。
それでも、かる〜くマクスウェル方程式を弄らなきゃいけないしね。面倒だよ面倒。

どうせなら、物質中のマクスウェル方程式とか、いろいろ面白い話ならあるでしょ。
一応、マクスウェル方程式に関連するベクトル解析の話とかやったんだしさあ。
って、文句をつぶやいたところで仕方ないよね。でもね。高校物理の結論をわざわざ導出するのは、講義中とか、レポート課題だけでいいんじゃないの ??
以下いろいろ書きたいけど、高 2 の時にビオ・サバールの法則を使っていろいろ導出していた自分にとっての所感であるから、一般人と乖離してしまうということでとりあえず、今回はこれで終わりにします。
国場先生、半年間ありがとうございました。

そして、理一 29 組のみんな、１年間ありがとう。
こんな分りづらいシケプリを作って、ノートもろくにアップしないくそシケ対を活用してくれたみんなに感謝します。