力学Ａ試験対策プリント

平成 25 年度入学理科Ⅰ類 28 組　sou16

このシケプリは吉岡大二郎著「朝倉物理学選書Ⅰ　力学」(朝倉書店) を解説したものです。質問・指摘等は以下のコメント欄まで。

http://green.ap.teacup.com/sou16/206.html#comment

0. 目次

1. 運動の記述

記号・用語の説明

「≡」

合同ではなく、「定義する」という意味です。

例えば、

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

なら、「$\binom{n}{k}$を$\frac{n!}{(n-k)!k!}$と定義する。」という意味です。

数学Ⅱで使った「≔」も同じ意味を持っています。

「$\dot{x}$」

ウムラウトではなく、微分を表しています。[1]

何の説明も無しに出てきた場合は、ほぼ間違いなく時間微分のことで、

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

を意味しています。

x'や$\frac{dx}{dt}$のような高校での記法[2]だと「微分したものの 2 乗[3]」とかが書きにくいのでこの書き方が使われることがあります。今となってはほとんど（古典）物理学特有の書き方なので、数学でこの書き方を使うのは止めた方が良いでしょう。

---

1 ニュートンの記法。

2 x'はラグランジュの記法。$\frac{dx}{dt}$はライプニッツの記法。

3 それぞれ、$\dot{x}^2, (x')^2, \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$となる。

途中式補完

式(48), (50), (51)→式(52)

$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y = 1$と$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0$に気を付けると、式(48)と式(50)より、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_r &= \left\{\left(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_y\right\} \cdot \left(\cos\theta\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_y\right) \\
&= \left(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\right)\cos\theta + \left(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right)\sin\theta \\
&= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\dot{r} \\
&= \dot{r}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_\theta &= \left\{\left(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_y\right\} \cdot \left(-\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_y\right) \\
&= \left(-\dot{r}\cos\theta + r\dot{\theta}\sin\theta\right)\sin\theta + \left(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right)\cos\theta \\
&= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)r\dot{\theta} \\
&= r\dot{\theta}
\end{aligned}
$$

（これは$\boldsymbol{v}$の動径方向の成分と角度方向の成分を求める操作です。）

式(51)より、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_\theta)\boldsymbol{e}_\theta \\
&= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

式(49), (50), (51)→式(53)

上と同様にして、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_r &= \left[\left\{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\cos\theta - \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\sin\theta\right\}\boldsymbol{e}_x + \left\{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\sin\theta + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\cos\theta\right\}\boldsymbol{e}_y\right] \cdot \left(\cos\theta\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_y\right) \\
&= \left\{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\cos\theta - \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\sin\theta\right\}\cos\theta + \left\{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\sin\theta + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\cos\theta\right\}\sin\theta \\
&= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \\
&= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_\theta &= \left[\left\{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\cos\theta - \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\sin\theta\right\}\boldsymbol{e}_x + \left\{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\sin\theta + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\cos\theta\right\}\boldsymbol{e}_y\right] \cdot \left(-\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_y\right) \\
&= \left\{\left(-\ddot{r} + r\dot{\theta}^2\right)\cos\theta + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\sin\theta\right\}\sin\theta + \left\{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\sin\theta + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\cos\theta\right\}\cos\theta \\
&= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) \\
&= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}
\end{aligned}
$$

これより、

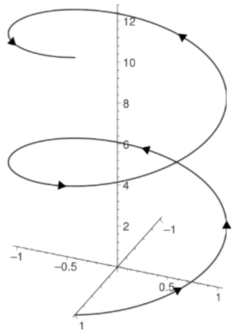
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_\theta)\boldsymbol{e}_\theta \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\boldsymbol{e}_\theta \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

演習問題

［1］

（1）

話を簡単にするために$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$とおきます。



x成分とy成分だけに注目すると、

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b\cos\omega t\\ b\sin\omega t\end{pmatrix}$$

これは点(α,β)を中心とした半径bの円運動を表しています。

次にz成分だけに注目すると、

$$z = \gamma + ct$$

これは速度cの等速直線運動を表しています。

以上２つを合わせると、

「円運動しつつ、その円運動の軌道の平面が等速直線運動している」

ということになり、質点が直線$x = \alpha, y = \beta$を軸とした螺旋運動をしていることが分かります。[4]　■

（2）

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(t) &= \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\\ &= \frac{d}{dt}(b\cos\omega t\,, b\sin\omega t\,, ct)\\ &= (-b\omega\sin\omega t\,, b\omega\cos\omega t\,, c) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(t) &= |\boldsymbol{v}(t)|\\ &= \sqrt{(-b\omega\sin\omega t)^2 + (b\omega\cos\omega t)^2 + c^2}\\ &= \sqrt{b^2\omega^2 + c^2} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}(t) &= \frac{\boldsymbol{v}(t)}{|\boldsymbol{v}(t)|}\\ &= \frac{1}{\sqrt{b^2\omega^2 + c^2}}(-b\omega\sin\omega t\,, b\omega\cos\omega t\,, c) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

太字はベクトル、細文字はスカラー（大抵は絶対値）です。

$\boldsymbol{e}$は数学Ⅱと同じく、単位ベクトルを表しています。

[4] 螺旋運動の画像は http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Helix.svg（パブリックドメイン）より転載。

(3)

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(-b\omega \sin \omega t\,, b\omega \cos \omega t\,, c)$$

$$= (-b\omega^2 \cos \omega t\,, -b\omega^2 \sin \omega t\,, 0) \quad \blacksquare$$

接線加速度と法線加速度は範囲外です。

やってみたい人は 1.3.2（p10～12）を参照してみて下さい。

(4)

同じく範囲外です。

(5)

$$\boldsymbol{a}(t) + \boldsymbol{v}(t) \times \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} -b\omega^2 \cos \omega t \\ -b\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b\omega \sin \omega t \\ b\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -b\omega^2 \cos \omega t \\ -b\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\omega \cos \omega t \cdot \omega - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - (-b\omega \sin \omega t) \cdot \omega \\ -b\omega \sin \omega t \cdot 0 - b\omega \cos \omega t \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -b\omega^2 \cos \omega t \\ -b\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\omega^2 \cos \omega t \\ b\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

巻末の解答にある$\boldsymbol{0}$（太字）は零ベクトルを意味しています。

［2］　※試験対策という意味では要らなさそう。

(1)

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = (1.0\ \ 3.0\ \ -2.0)\begin{pmatrix} -3.0 \\ 2.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

$$= 1.0 \cdot (-3.0) + 3.0 \cdot 2.0 + (-2.0) \cdot 1.0$$

$$= 1.0 \quad \blacksquare$$

また、

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{1.0^2 + 3.0^2 + (-2.0)^2} = \sqrt{14}$$

$$|\boldsymbol{B}| = \sqrt{(-3.0)^2 + 2.0^2 + 1.0^2} = \sqrt{14}$$

ここで、$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$より、

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}$$

$$=\frac{1.0}{\sqrt{14}\sqrt{14}}$$

$$=\frac{1.0}{14}$$

$$=0.0714\cdots$$

$$\cong 7.1\times10^{-2}\quad\blacksquare$$

数学ではなく物理なので、有効数字（今回は 2 桁。）があることに注意しましょう。

(2)

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1.0\\3.0\\-2.0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3.0\\2.0\\1.0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3.0\cdot1.0-(-2.0)\cdot2.0\\(-2.0)\cdot(-3.0)-1.0\cdot1.0\\1.0\cdot2.0-3.0\cdot(-3.0)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7.0\\5.0\\11\end{pmatrix}\quad\blacksquare$$

ここで、$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$より、

$$\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}$$

$$=\frac{\sqrt{7.0^2+5.0^2+11^2}}{\sqrt{14}\sqrt{14}}$$

$$=\frac{\sqrt{195}}{14}$$

$$=0.9974\cdots$$

$$\cong 0.997\quad\blacksquare$$

有効数字が 2 桁なので本来は1.0とすべきですが、$\theta\neq\frac{\pi}{2}$を明示するために0.997としました。なお、$\sqrt{195}$は開平法[5]を使って計算しましょう。

（ただ、試験で開平法が必要になることは無いと思います。）

---

5 http://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%96%8B%E5%B9%B3%E6%B3%95#.E7.AD.86.E7.AE.97.E3.81.AB.E3.82.88.E3.82.8B.E9.96.8B.E5.B9.B3.E6.B3.95　辺りを参照のこと。

(3)

有効数字 2 桁（3 桁）に丸め込んだ値を使うとジャスト1にはなりません。

丸め込む前の値$\frac{1.0}{14}$と$\frac{\sqrt{195}}{14}$を使って確認しましょう。

［3］

数学Ⅱでやったので省略。

［4］

(1)

図示するだけなら、

$$r(t)\text{は}\begin{cases}\text{単調増加} & (\gamma < 0)\\ a\text{で一定} & (\gamma = 0)\\ \text{単調減少} & (\gamma > 0)\end{cases}$$

より、原点から次第に遠ざかる螺旋($\gamma < 0$)、半径aの円($\gamma = 0$)、原点へと落ち込んでいく螺旋($\gamma > 0$)と分かります。回転方向は$\omega < 0$のとき右回り、$\omega > 0$のとき左回りです。$\omega = 0$のときはx軸上に留まり続けます。 ■

多分、$\gamma > 0$かつ$\omega > 0$の場合を図示するだけで十分だとは思いますが。

(2)

$\dot{r}$とは動径方向の速さ、$\dot{\theta}$は単位時間あたりの角度の変化量なので、

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr(t)}{dt}\\ &= -\gamma a \mathrm{e}^{-\gamma t} \quad ■\end{aligned}$$

（教科書では$r(t) = a\mathrm{e}^{-\gamma t}$を使って書かれていますが、$r(t)$を使わない表記の方が無難でしょう。以下同様。）

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{d\theta(t)}{dt}\\ &= \omega \quad ■\end{aligned}$$

式（50）,（51）より、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_r &= \cos\theta(t)\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta(t)\,\boldsymbol{e}_y\\ &= \cos\omega t\,(1,0) + \sin\omega t\,(0,1)\\ &= (\cos\omega t, \sin\omega t) \quad ■\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_\theta &= -\sin\theta(t)\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta(t)\,\boldsymbol{e}_y\\ &= -\sin\omega t\,(1,0) + \cos\omega t\,(0,1)\\ &= (-\sin\omega t, \cos\omega t) \quad ■\end{aligned}$$

(3)

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r(t)}{dt^2}$$
$$= \gamma^2 a \mathrm{e}^{-\gamma t}$$
$$\ddot{\theta} = \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}$$
$$= 0$$

これより、

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \gamma^2 a\mathrm{e}^{-\gamma t} - a\mathrm{e}^{-\gamma t} r\omega^2$$
$$= (\gamma^2 - \omega^2) a\mathrm{e}^{-\gamma t} \quad \blacksquare$$
$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 2 \cdot (-\gamma a\mathrm{e}^{-\gamma t}) \cdot \omega + r \cdot 0$$
$$= -2\gamma\omega a\mathrm{e}^{-\gamma t} \quad \blacksquare$$

(4)

式(47)より、

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} r(t)\cos\theta(t) \\ r(t)\sin\theta(t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos\omega t \\ a\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin\omega t \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$$
$$= \begin{pmatrix} -a\mathrm{e}^{-\gamma t}(\omega\sin\omega t + \gamma\cos\omega t) \\ a\mathrm{e}^{-\gamma t}(\omega\cos\omega t - \gamma\sin\omega t) \end{pmatrix}$$
$$= -\gamma a\mathrm{e}^{-\gamma t}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} + a\mathrm{e}^{-\gamma t} \cdot \omega \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix}$$
$$= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \quad \blacksquare$$
$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}$$
$$= \begin{pmatrix} a\mathrm{e}^{-\gamma t}\{(\gamma^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\gamma\omega\sin\omega t\} \\ a\mathrm{e}^{-\gamma t}\{(\gamma^2 - \omega^2)\sin\omega t - 2\gamma\omega\cos\omega t\} \end{pmatrix}$$
$$= (\gamma^2 - \omega^2)a\mathrm{e}^{-\gamma t}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} - 2\gamma\omega a\mathrm{e}^{-\gamma t}\begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix}$$
$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\boldsymbol{e}_\theta \quad \blacksquare$$

2. 運動法則

記号・用語の説明

「SI 単位系」

日本語では「国際単位系」とも言います。「SI」はフランス語の“Le Système International d'Unités”から来ています。

s（秒）、m（メートル）、kg（キログラム）、A（アンペア）、K（ケルビン）、mol（モル）、cd（カンデラ）の 7 つを基本単位とする単位系です。それ以外の単位はこれら 7 つを組み立てて表します。

例えば、

$$[\Omega](\text{オーム}) = [\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{A}^{-2}]$$

$$[\mathrm{Sv}](\text{シーベルト}) = [\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}]$$

のような感じです。単位の組み立て方は「次元」と言います。単位の次元を確認すると間違いに気付くことが出来たりするので、見直しのときは必ず確認しましょう。

s（秒）、m（メートル）、kg（キログラム）だけを主に使う場合は「MKS 単位系」と言うこともあります。

「テイラー展開」

関数を近似する方法の一つで、数学的には

$$f(x-a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と表されます。（この右辺をテイラー級数と言います。）なお、$a = 0$とした

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

は特にマクローリン展開（右辺はマクローリン級数）と呼ばれることもあり、物理でテイラー展開と言った場合は、大抵 1 次のマクローリン級数

$$f(x) \cong f(0) + f'(0)x \quad (x \ll 1)$$

のことを指します。

但し、どんな関数でもテイラー展開（及びマクローリン展開）出来るとは限らないので注意が必要です。（例：$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$は常に$f^{(n)}(0) = 0$となり、マクローリン級数が$0$になってしまいます。）詳しくは数学 I にて。

途中式補完

式(69)→式(70)

$$r+\sqrt{(r\cos\theta+2ae)^2+(r\sin\theta)^2}=2a$$
$$\sqrt{(r\cos\theta+2ae)^2+(r\sin\theta)^2}=2a-r$$
$$(r\cos\theta+2ae)^2+(r\sin\theta)^2=(2a-r)^2$$
$$(\cos^2\theta+\sin^2\theta)r^2+4aer\cos\theta+4a^2e^2=r^2-4ar+4a^2$$
$$r^2+4aer\cos\theta+4a^2e^2=r^2-4ar+4a^2$$
$$4a(1+e\cos\theta)r=4a(1-e^2)$$
$$r=\frac{(1-e^2)a}{1+e\cos\theta}\quad\blacksquare$$

式(83)→式(84)

使用する値は

$\pi=3.14$

$g=9.81[\mathrm{m\cdot s^{-2}}]$

$R_e=6.38\times10^6[\mathrm{m}]$

$R_m=3.84\times10^8[\mathrm{m}]$

の 4 つです。

$$\begin{aligned}T&=\frac{2\pi}{\dot{\theta}}\\&=\frac{2\pi}{\sqrt{g\frac{{R_e}^2}{{R_m}^3}}}\\&=\frac{2\pi}{\frac{R_e}{R_m}\sqrt{\frac{g}{R_m}}}\\&=\frac{2\times3.14}{\frac{6.38\times10^6}{3.84\times10^8}\sqrt{\frac{9.81}{3.84\times10^8}}}\\&=2.364\cdots\times10^6\\&=2.36\times10^6[\mathrm{s}]\quad\blacksquare\end{aligned}$$

$2.34\times10^6[\mathrm{s}]$はどういう値を使って計算したのか不明。なお、実際の月の公転周期は約27 日 7 時間 43 分 $\cong 2.36\times10^6[\mathrm{s}]$なので、こちらの方がより精度の良い値です。

演習問題

［1］

まずは加速度を調べます。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(t) &= \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{R}_0\cos[\omega(t-t_0)] \\
&= -\omega^2\boldsymbol{R}_0\sin[\omega(t-t_0)] \\
&= -\omega^2\,\boldsymbol{r}(t)
\end{aligned}
$$

ニュートンの第 2 法則より、物体の質量をmとすると、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(t) &= m\boldsymbol{a}(t) \\
&= -m\omega^2\boldsymbol{r}(t)
\end{aligned}
$$

これより、物体には大きさが原点からの距離に比例し、原点に向かう向きの力（復元力）が働いていることが分かります。　■

なお、$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{R}_0\cos[\omega(t-t_0)]$で気付いた人も多いでしょうが、これは単振動です。

［2］

(1)

速度$\boldsymbol{v}(t)$と加速度$\boldsymbol{a}(t)$は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \frac{1}{k}v_{0x}(1-\mathrm{e}^{-kt}) \\ 0 \\ -\frac{g}{k}t + \frac{1}{k}\left(v_{0z}+\frac{g}{k}\right)(1-\mathrm{e}^{-kt}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_{0x}\mathrm{e}^{-kt} \\ 0 \\ -\frac{g}{k} + \left(v_{0z}+\frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt} \end{pmatrix} \quad ■
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(t) &= \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_{0x}\mathrm{e}^{-kt} \\ 0 \\ -\frac{g}{k} + \left(v_{0z}+\frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -kv_{0x}\mathrm{e}^{-kt} \\ 0 \\ -(kv_{0z}+g)\mathrm{e}^{-kt} \end{pmatrix} \quad ■
\end{aligned}
$$

ニュートンの運動方程式より、物体の質量をmとすると、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(t) &= m\boldsymbol{a}(t) \\
&= m\begin{pmatrix} -kv_{0x}\mathrm{e}^{-kt} \\ 0 \\ -(kv_{0z}+g)\mathrm{e}^{-kt} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

さて、これだけでは何が何だか良く分かりません。

そこで、定数に注目してみましょう。常識的に考えると、gとは重力加速度のことだと思われます。となると、この物体にはz軸負の向きに重力mgが働いているのではないかと予想が付きます。そこで、重力の影響を分けてみると、

$$
\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} -kv_{0x}\mathrm{e}^{-kt} \\ 0 \\ g-(kv_{0z}+g)\mathrm{e}^{-kt} \end{pmatrix}
$$

これだけだとややこしくなっただけに見えますが、もう少しの辛抱です。

次に考えるべきことは「力が単に時間に依存するかどうか」。別に依存したって良いのですが、物体の運動と全く関係の無い変数（時間）を持ってくるのではこじつけ臭くてあまりスマートではありません。簡潔さを求めるのが物理学というものです。

そこで、「物体の運動に関係する値で、時間変化するものに依存するのではないか」と考えてみましょう。物体の運動に関係する値で、時間変化するものというと、位置$\boldsymbol{r}(t)$と速度$\boldsymbol{v}(t)$です。（加速度と力が比例するのは当然なので無視。）そういう目で見てみると、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} - mk\begin{pmatrix} v_{0x}\mathrm{e}^{-kt} \\ 0 \\ -\frac{g}{k}+\left(v_{0z}+\frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} - mk\boldsymbol{v}(t)
\end{aligned}
$$

となって凄くスッキリしました。

よって、物体にはz軸負の向きに重力、及び運動方向と逆の向きに速度に比例する力が働いていると考えられます。 ■

物体の位置が指数関数や三角関数（数回微分すると元の形に戻る関数）で表されるときは、物体に働く力が位置や速度に依存していると考えると上手く説明出来ることが多いです。

(2)

$kt \ll 1$という条件が付いているので、$kt = 0$のまわりのテイラー展開、即ちマクローリン展開を指していると思われます。

$kt = x$と置き換え、$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$とすると、$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$、$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}$なので、

$$
\begin{aligned}
f(x) &\cong f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\
&= \mathrm{e}^0 + \frac{-\mathrm{e}^0}{1!}x + \frac{\mathrm{e}^0}{2!}x^2 \\
&= 1 - x + \frac{1}{2}x^2
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \mathrm{e}^{-kt} \cong 1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2
$$

これを代入して、

$$
\begin{aligned}
x(t) &\cong \frac{1}{k}v_{0x}\left\{1 - \left(1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2\right)\right\} \\
&= v_{0x}t - \frac{1}{2}v_{0x}kt^2 \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z(t) &\cong -\frac{g}{k}t + \frac{1}{k}\left(v_{0z} + \frac{g}{k}\right)\left\{1 - \left(1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2\right)\right\} \\
&= -\frac{g}{k}t + \left(v_{0z} + \frac{g}{k}\right)\left(t - \frac{1}{2}kt^2\right) \\
&= v_{0z}t - \frac{1}{2}v_{0z}kt^2 - \frac{1}{2}gt^2 \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

(3)

まず、位置の極限値を調べてみると、

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} x(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{k}v_{0x}(1 - \mathrm{e}^{-kt}) \\
&= \frac{1}{k}v_{0x}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{t\to\infty} y(t) = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} z(t) &= \lim_{t\to\infty}\left\{-\frac{g}{k}t + \frac{1}{k}\left(v_{0z} + \frac{g}{k}\right)(1 - \mathrm{e}^{-kt})\right\} \\
&= -\infty
\end{aligned}
$$

次に、速度の極限値を調べてみると、

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{v}(t)=\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix} v_{0x}\mathrm{e}^{-kt} \\ 0 \\ -\frac{g}{k}+\left(v_{0z}+\frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{g}{k} \end{pmatrix}$$

よって、$t=\infty$に於いて物体は直線$x=\frac{1}{k}v_{0x}, y=0$上をz軸負の向きに速さ$\frac{g}{k}$で等速直線運動することが分かります。 ■

なお、知っている人が居るかも知れませんが、この問題では小さな物体[6]が流体抵抗（空気抵抗とか）を受けながら斜方投射されたときの運動を扱っています。
興味がある人は、以下の微分方程式を解いてこの問題の式が導かれることを確認してみましょう。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=-k\dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}=-k\dfrac{dz}{dt}-g \end{cases}$$

［3］

(1)

まずは地球の半径を求めます。赤道-北極は地球 4 分の 1 周分なので、地球の半径をR_e[m]とおくと、（万有引力定数、及び重力加速度と単位を揃えるために、kmではなくm単位で計算することに注意。）

$$\frac{1}{4}\times 2\pi R_e=1.0\times 10^7$$

$$R_e=\frac{4\times 1.0\times 10^7}{2\times 3.14}$$

$$R_e=6.369\cdots\times 10^6$$

$$R_e=6.37\times 10^6[\mathrm{m}]$$

※巻末の答では$R_e=6.3\times 10^6[\mathrm{m}]$となっていますが、$\pi=3.15$とでもしない限りこの値は出てきません。

[6]粘性抵抗に比べて慣性抵抗が無視できる大きさ。空気中では直径 0.1mm 以下とかそのレベル。詳しくは「レイノルズ数」でググってみよう。

式(81)より、地球の質量M_e[kg]は

$$M_e = \frac{g{R_e}^2}{G}$$

$$M_e = \frac{9.8 \times (6.37 \times 10^6)^2}{6.673 \times 10^{-11}}$$

$$M_e = 5.95 \cdots \times 10^{24}$$

$$M_e = 6.0 \times 10^{24}[\mathrm{kg}] \quad \blacksquare$$

R_eの値の違いにより、巻末の答では$M_e = 5.8 \times 10^{24}$[kg]という値が導かれていますが、実際の地球の質量は約5.97×10^{24}[kg]なので、こちらの方がより精度の良い値です。

(2)

地球の公転周期を$T[\mathrm{s}] \cong 3.15 \times 10^7[\mathrm{s}]$とおくと、式(55)とニュートンの運動方程式より、

$$F = M_e \cdot A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$= \frac{4\pi^2 M_e A}{T^2}$$

これより、地球には大きさが$4\pi^2 M_e A/T^2$で、円軌道の中心、即ち太陽に向かう向きの力（中心力）を受けていることが分かります。勿論、この力は太陽が地球に及ぼす万有引力なので、太陽の質量をM_s[kg]とおくと、式(80)より、

$$G\frac{M_e M_s}{A^2} = \frac{4\pi^2 M_e A}{T^2}$$

$$M_s = \frac{4\pi^2 A^3}{GT^2}$$

$$M_s = \frac{4 \times 3.14^2 \times (1.496 \times 10^{11})^3}{6.673 \times 10^{-11} \times (3.15 \times 10^7)^2}$$

$$M_s = 1.99 \cdots \times 10^{30}$$

$$M_s = 2.0 \times 10^{30}[\mathrm{kg}] \quad \blacksquare$$

$$\frac{M_s}{M_e} = \frac{2.0 \times 10^{30}}{6.0 \times 10^{24}}$$

$$\frac{M_s}{M_e} = 3.33 \cdots \times 10^5$$

$$\frac{M_s}{M_e} = 3.3 \times 10^5 \quad \blacksquare$$

M_eの値の違いにより、巻末の答では$M_s/M_e = 3.4 \times 10^5$という値が導かれていますが、実際の$M_s/M_e$の値は約$3.33 \times 10^5$なので、こちらの方がより精度の良い値です。

・(2) の別解

式(78), (79) より、

$$\frac{T^2}{A^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$$

$$M_s = \frac{4\pi^2 A^3}{GT^2}$$

と導き出すことも出来ます。

(3)

地球上の物体と太陽（の重心）との距離は$A = 1.496 \times 10^{11}$[m]に等しいと見做せるので、式(80) より、

$$F = G\frac{1 \cdot M_s}{A^2}$$

$$= \frac{6.673 \times 10^{-11} \times 1 \times 2.0 \times 10^{30}}{(1.496 \times 10^{11})^2}$$

$$= 5.96 \cdots \times 10^{-3}$$

$$= 6.0 \times 10^{-3} [\mathrm{N}] \quad ■$$

5.9×10^{-3}[N]はどういう値を使って計算したのか不明。

[4]

本来、角速度というのはどの点を基準にとるかを明示しないといけないのですが、この問題のように明示されていない場合は原点基準で考えれば良いと思われます。

式(47), (50), (52) より、2 次元極座標で質点の位置ベクトル$\boldsymbol{r}$と運動量$\boldsymbol{p}$を表すと、

$$\boldsymbol{r} = r(\cos\theta\, \boldsymbol{e}_x + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_y)$$

$$= r\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{p} = m(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)$$

式(98) に代入して、（原点基準なので、$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{0}$）

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

$$= mr\boldsymbol{e}_r \times (\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)$$

$$= mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z$$

$$\therefore l_z = mr^2\dot{\theta} \quad ■$$

$\boldsymbol{e}_r$と$\boldsymbol{e}_\theta$は共にxy平面上のベクトルなので、$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{0}$、$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_z$であることに気を付けましょう。

なお、「有限の値」とは「0 でも∞でもない値」という意味です。ちなみに、式からも明らかですが、$\boldsymbol{l}$のx成分、及びy成分は 0 になります。

3. エネルギー

記号・用語の説明

「保存力」

保存力のみが働いている空間では、状態 A から状態 B に変化させるのに必要な仕事量は途中の過程には関係なく、状態 A と B だけで決まります。「途中の過程には関係ない」というのが最大のポイントです。「保存力のみが働いている空間では、ある状態から色々な状態を経て元の状態に戻すのに必要な仕事量は必ず 0 である。」とも言い換えられます。

また、保存力についてはポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）を考えることが出来ます。

何故「保存」力なのかというと、保存力のみが働いている状態では力学的エネルギー保存則が成り立つからです。

保存力の例としては万有引力やクーロン力、バネの復元力などがあります。

「$\frac{\partial f}{\partial x}$」

偏微分を表す記号です。$\frac{\partial f}{\partial x}$なら「関数$f$を$x$で偏微分する」という意味です。

偏微分というのは、2 つ以上の変数を持つ関数を微分するときに、どれか 1 つの変数のみに注目して他の変数は定数として扱って無視する、という演算です。

例えば、

$$f(x,y) = x + 3xy + 2y$$

という関数fはx, yという 2 つの変数がありますが、xで偏微分するときはyを定数として扱ってしまい、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y + 1$$

となります。同様に、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 2$$

となります。詳しくは数学 I にて。

「∇」

「ナブラ」と読みます。演算子（＋とか$\frac{d}{dx}$のように、どういう計算をするのか表す記号のこと。）の一つです。$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$とか、$\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}$とかいちいち書くのは面倒臭い！ということで作られた記号です。

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

と表されます。これを見ても分かるように、∇はベクトルのような性質があります。∇の主な使い方は次の 3 つです。

$$\text{勾配：}\quad \nabla f=\mathrm{grad}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\text{発散：}\quad \nabla\cdot\vec{f}=\mathrm{div}\vec{f}=\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}$$

$$\text{回転：}\quad \nabla\times\vec{f}=\mathrm{rot}\vec{f}=\left(\frac{\partial f_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial z},\frac{\partial f_x}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial x},\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$

わざとベクトルを矢印で表して強調しましたが、∇の後に来るのはスカラー、∇･と∇×の後に来るのはベクトルです。また、計算した後の$\nabla\cdot\vec{f}$はスカラー、∇fと$\nabla\times\vec{f}$はベクトルです。
これらの演算の詳しい意味は、まだ知らなくても大丈夫だと思われます。
$\boldsymbol{F}=-\nabla U$だけ覚えておきましょう。

演習問題

［1］

(1)

仕事は式(106)より$W=\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$と表されるので、$\boldsymbol{r}_0=(0,0,0), \boldsymbol{r}_A=(R,0,0)$とすると、条件より、

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_A} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \\
&= \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_A} -k(x,0,0)\cdot(dx,dy,dz) \\
&= \int_0^R -kx dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_0^R \\
&= -\frac{1}{2}kR^2 \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

(2)

質点の位置を$\boldsymbol{r}=(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$とパラメータ（媒介変数）表示すれば、この移動は「$\theta$が0から$\frac{\pi}{2}$まで動くときの移動」として表せます。このとき、

$$
\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}=(-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)
$$

なので、$\boldsymbol{r}_B=(0,R,0)$とすると、

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -k\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}d\theta \\
&= -k\int_0^{\frac{\pi}{2}} (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)\cdot(-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)d\theta \\
&= -k\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-R^2\sin\theta\cos\theta + R^2\sin\theta\cos\theta + 0)d\theta \\
&= 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

(3)

問題文にあるように$\boldsymbol{r} = (R - Rs, Rs, 0)$とパラメータ表示すると、

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = (-R, R, 0)$$

となるので、

$$\begin{aligned} W &= \int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_0^{\boldsymbol{1}} -k\boldsymbol{r} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} ds \\ &= -k \int_0^{\boldsymbol{1}} (R - Rs, Rs, 0) \cdot (-R, R, 0) ds \\ &= -k \int_0^{\boldsymbol{1}} (-R^2 + R^2 s + R^2 s + 0) ds \\ &= -kR^2 \int_0^{\boldsymbol{1}} (2s - 1) ds \\ &= -kR^2 [s^2 - s]_0^1 \\ &= 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(2), (3) どちらの動かし方でも仕事が等しいということは、この力$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$が保存力であることをほのめかしています。（実際、保存力になっています。）

なお、この力は復元力です。

[2]

(1)

$U(\boldsymbol{r}) = K$(一定)とおいてみると、

$$\frac{1}{2} k(x^2 + y^2 + z^2) = K$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2K}{k}$$

よって、等ポテンシャル面は原点を中心とする球面になっています。　■

(2)

与えられた式より、

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r})$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2), \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2), \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)\right)$$

$$= -(k\mathrm{x}, ky, kz)$$

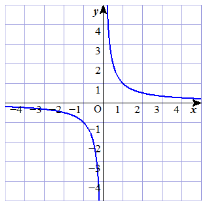
$$= -k\boldsymbol{r}$$

これは原点に向かう力（復元力）なので、原点を中心とする球面である等ポテンシャル面と直交します。　■

（ナブラというのはもともとそういう性質を持っています。）

[3]

(1)



$U(\boldsymbol{r}) = -k$を変形して、

$$-kxy = -k$$

$$xy = 1$$

よって、xy平面上での等ポテンシャル面は双曲線$xy = 1$になります。　■

(2)

与えられた式より、

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r})$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(-kxy)$$

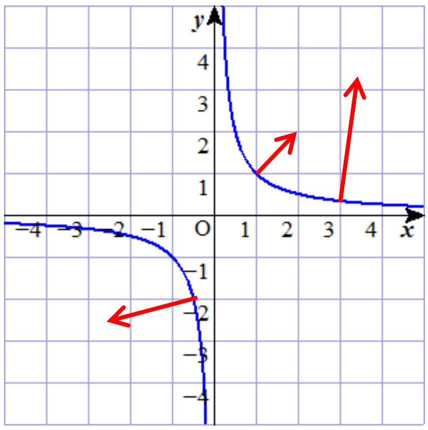
$$= (ky, kx, 0)$$

これより、

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1) = (k, k, 0)$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_2) = \left(-2k, -\frac{1}{2}k, 0\right)$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_3) = \left(\frac{1}{3}k, 3k, 0\right)$$



なので、図は右のようになります。　■

[4]

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$より、

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r})$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(-\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

ここで、合成関数の微分より、

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{kx}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$$

$$= -\frac{kx}{r^3}$$

なので、

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \left(-\frac{kx}{r^3}, -\frac{ky}{r^3}, -\frac{kz}{r^3}\right)$$

$$= -\frac{k}{r^3}(x, y, z)$$

$$= -\frac{k\boldsymbol{r}}{r^3} \quad \blacksquare$$

これは万有引力やクーロン力など、大きさが原点からの距離の 2 乗に反比例し、原点に向かう向きの力を表しています。

4. いろいろな運動

記号・用語の説明

「z^*」

共役複素数を表す記号です。$z = a + bi$のときは、

$$z^* = a - bi$$

となります。$\bar{z}$と書くことも多いですが、同じ意味です。

「完全楕円積分」

楕円の弧の長さを求めたりするときに使う関数です。

$\sqrt{\ }$の中にx^3とか三角関数とかが入っている関数を積分するときに出てきます。

ほぼ間違いなく、試験で使うことは無いと思われます。

（教科書 P64 に出てきているのは、正確には「第 1 種完全楕円積分」です。）

「$O\big(f(x)\big)$」

「ランダウの記号」や「ビッグ・オー記法」などと呼ばれるもので、「$O(x)$」は「ビッグ・オー・エックス」と読みます。

$f(x)$のところには$\log x$とかx^2とかいった関数が入ります。

詳しい説明は省きますが、例えば、

$$f(x) = g(x) + O(x^2)$$

と書かれていたら、

「係数とか細かいことは知らないけど、$f(x)$と$g(x)$の差はx^2くらいなんじゃない？」

という意味です。

なお、普通は$x \to 0$か$x \to \infty$のどちらかのときに使う記号です。

もう少し詳しく書くと、$x \to 0$で$f(x) = g(x) + O(x^2)$なら

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^2}$$

が有限の値に収束する、という意味です。

「$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$」

関数$\frac{df(x)}{dx}$に$x = a$を代入するという意味です。

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} = f'(a)$$

とも書けます。

$\frac{df(a)}{dx}$だと「$f(a)$という定数をxで微分する」という意味になるので注意して下さい。

途中式補完

式(186)

$U(x)$を$x=x_0$の周りでテイラー展開すると、

$$U(x)=U(x_0)+\frac{U'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{U''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

ここで、$U(x)$が$x=x_0$で極小になるということより、$U'(x_0)=0$なので、

$$U(x)=U(x_0)+\frac{U''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$U(x)=U(x_0)+\frac{U''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+O((x-x_0)^3)$$

$$U(x)=U(x_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2U(x)}{dx^2}\bigg|_{x=x_0}(x-x_0)^2+O((x-x_0)^3)\quad ■$$

$O((x-x_0)^3)$というのは、数学で言うところの「剰余項」のことです。

式(198)→式(199)

式(198)の両辺に$\dot{r}$をかけると、

$$\left(m\ddot{r}-\frac{mh^2}{r^3}\right)\dot{r}=-G\frac{Mm}{r^2}\dot{r}$$

$$m\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dt}-\frac{mh^2}{r^3}\frac{dr}{dt}=-G\frac{Mm}{r^2}\frac{dr}{dt}\quad\left(\because\dot{r}=\frac{dr}{dt},\ddot{r}=\frac{d\dot{r}}{dt}\right)$$

両辺を時間積分すると、

$$\int\left(m\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dt}-\frac{mh^2}{r^3}\frac{dr}{dt}\right)dt=\int -G\frac{Mm}{r^2}\frac{dr}{dt}dt$$

$$\int\left(m\dot{r}d\dot{r}-\frac{mh^2}{r^3}dr\right)dt=\int -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{mh^2}{2r^2}= G\frac{Mm}{r}+C$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2-G\frac{Mm}{r}+\frac{mh^2}{2r^2}=C$$

※不定積分なので積分定数Cが出てくるのを忘れないこと！

ここで、積分定数CをエネルギーEとすれば、

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2-G\frac{Mm}{r}+\frac{mh^2}{2r^2}=E\quad ■$$

演習問題

[1]

(1)

運動量は$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$で表され、仮定より$\boldsymbol{v} = (-144,0,0)[\mathrm{km/h}] = (-40.0,0,0)[\mathrm{m/s}]$なので、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= 0.150(-40.0,0,0)\\ &= (-6.00,0,0)[\mathrm{kg\ m\ s^{-1}}] \quad ■\end{aligned}$$

「MKS 単位系で」とあるので、gをkgに、km/hをm/sに変換してから計算しましょう。

(2)

まずは、バッターが打った直後のボールの速さv_0を求めます。仰角45°で125m先まで飛んだとあるので、式(132)より、

$$\frac{{v_0}^2}{g}\sin(2 \times 45°) = 125$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{125g}{\sin 90°}}$$

$$v_0 = \sqrt{125 \times 9.8}$$

$$v_0 = 35[\mathrm{m/s}]$$

これより、バッターが打った直後のボールの速度$\boldsymbol{v}$は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= (v_0 \cos 45°, 0, v_0 \sin 45°)\\ &= (24.7,0,24.7)[\mathrm{m/s}]\end{aligned}$$

なので、運動量は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= 0.150(24.7,0,24.7)\\ &= (3.71,0,3.71)[\mathrm{kg\ m\ s^{-1}}] \quad ■\end{aligned}$$

(3)

力積とは運動量の変化のことなので、(1), (2)より、

$$(3.71,0,3.71) - (-6.00,0,0) = (9.71,0,3.71)[\mathrm{kg\ m\ s^{-1}}] \quad ■$$

(4)

つまるところ、$144\,\mathrm{km/h} = 40.0\,\mathrm{m/s}$の速さで$10\mathrm{cm} = 0.10\mathrm{m}$進むのにかかる時間を求めれば良いので、

$$\frac{0.10}{40.0} = 2.5 \times 10^{-3}[\mathrm{s}] \quad ■$$

(5)

力（単位は$[\mathrm{N}]=[\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}]$）は力積（単位は$[\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}]$）を力を加えるのにかかった時間（単位は$[\mathrm{s}]$）で割れば求められます。力と力積はベクトルであり、時間はスカラーなので、力の大きさは力積の大きさを時間で割れば求められます。よって、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{(9.71)^2+0^2+(3.71)^2}}{2.5\times10^{-3}}&=4.15\cdots\times10^3\\&\cong 4.2\times10^3[\mathrm{N}]\quad\blacksquare\end{aligned}$$

(6)

$F=ma$より、

$$\begin{aligned}a&=\frac{F}{m}\\&=\frac{4.2\times10^3}{0.150}\\&=2.8\times10^4[\mathrm{m\,s^{-2}}]\end{aligned}$$

なので、これを（地球の）重力加速度の値で割って、

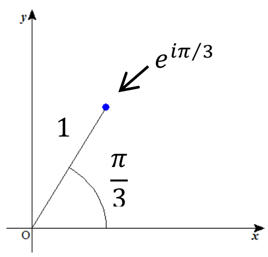
$$\begin{aligned}\frac{2.8\times10^4}{9.8}&=2.85\cdots\times10^3\\&\cong 2.9\times10^3[\text{倍}]\quad\blacksquare\end{aligned}$$

[2]

(1)

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$というのは、$e^{i\theta}$を複素平面上に表すと、原点からの距離が1（単位円上）で動径がθの位置にあるということを表しています。

よって、答は右図　■



(2)

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\varphi+i\sin\varphi)\\&=(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)+i(\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi)\\(\text{右辺})&=\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)\end{aligned}$$

$\sin\theta,\cos\theta,\sin\varphi,\cos\varphi,\sin(\theta+\varphi),\cos(\theta+\varphi)$は全て実数なので、実部と虚部を比較して、

$$\begin{cases}\sin(\theta+\varphi)=\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi\\\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi\end{cases}\quad\blacksquare$$

［3］

(1)

まずは$x(t)$の 1 階微分と 2 階微分を計算しておきます。

$$\frac{dx}{dt} = (-\omega a_1 t + a_1 - \omega a_0)e^{-\omega t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (\omega^2 a_1 t - 2\omega a_1 + \omega^2 a_0)e^{-\omega t}$$

これより、式(180)の左辺に$x(t) = (a_1 t + a_0)e^{-\omega t}$を代入すると、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\omega\frac{d}{dt} + \omega^2\right)x$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega\frac{dx}{dt} + \omega^2 x$$

$$= (\omega^2 a_1 t - 2\omega a_1 + \omega^2 a_0)e^{-\omega t} + 2\omega(-\omega a_1 t + a_1 - \omega a_0)e^{-\omega t} + \omega^2(a_1 t + a_0)e^{-\omega t}$$

$$= (\omega^2 a_1 t - 2\omega^2 a_1 t + \omega^2 a_1 t - 2\omega a_1 + 2\omega a_1 + \omega^2 a_0 - 2\omega^2 a_0 + \omega^2 a_0)e^{-\omega t}$$

$$= 0$$

より、$x(t) = (a_1 t + a_0)e^{-\omega t}$が式(180)の解であることが確かめられます。 ■

(2)

$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$なので、(1)より、

$$v(t) = (-\omega a_1 t + a_1 - \omega a_0)e^{-\omega t}$$

$x(t)$と$v(t)$の式に$x(0) = x_0, v(0) = 0$をそれぞれ代入すると、[7]

$$\begin{cases} (a_1 \cdot 0 + a_0)e^{-\omega \cdot 0} = x_0 \\ (-\omega a_1 \cdot 0 + a_1 - \omega a_0)e^{-\omega \cdot 0} = 0 \end{cases}$$

これを解いて、

$$a_0 = x_0\,, a_1 = \omega x_0 \quad ■$$

(3)

$x(t)$と$v(t)$の式に$x(0) = 0, v(0) = v_0$をそれぞれ代入すると、

$$\begin{cases} (a_1 \cdot 0 + a_0)e^{-\omega \cdot 0} = 0 \\ (-\omega a_1 \cdot 0 + a_1 - \omega a_0)e^{-\omega \cdot 0} = v_0 \end{cases}$$

これを解いて、

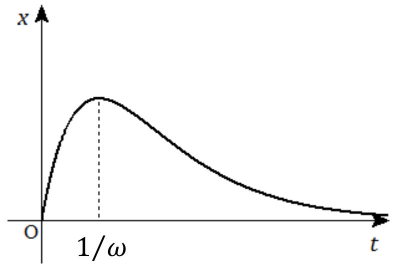
$$a_0 = 0\,, a_1 = v_0$$

[7] このように、微分方程式の解を一つに定めるような条件を「境界条件」（$t = 0$の状態を示すときは「初期条件」とも。）と言います。

このとき、$x(t) = v_0te^{-\omega t}$、$x'(t) = v(t) = (1 - \omega t)v_0e^{-\omega t}$となるので、増減表を書くと、

t	0	$\cdots$	$1/\omega$	$\cdots$
$x'(t)$	v_0	$+$	0	$-$
$x(t)$	0	↗	$v_0/e\omega$	↘

よって、 $x(t)$は下図のようになる。 $x(t)$が最大となるのは$t = 1/\omega$のとき ■



凹凸や変曲点まで求める必要は無いと思われます。

(4)

$x(t)$の式に$x(0) = x_0x(1/\omega) = 0$をそれぞれ代入すると、

$$\begin{cases} (a_1 \cdot 0 + a_0)e^{-\omega \cdot 0} = x_0 \\ \left(a_1 \cdot \dfrac{1}{\omega} + a_0\right)e^{-\omega \cdot \frac{1}{\omega}} = 0 \end{cases}$$

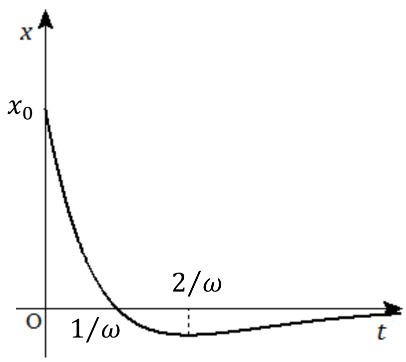
これを解いて、

$$a_0 = x_0\,, a_1 = -\omega x_0$$

このとき、$x(t) = (-\omega t + 1)x_0e^{-\omega t}$、$x'(t) = v(t) = (\omega t - 2)\omega x_0e^{-\omega t}$となるので、増減表を書くと、

t	0	$\cdots$	$2/\omega$	$\cdots$
$x'(t)$	$-2\omega x_0$	$+$	0	$-$
$x(t)$	x_0	↗	$-x_0/e^2$	↘

よって、 $x(t)$は下図のようになります。 ■



[4]

(1)

与えられた式より、

$$U'(x) = a - \frac{b}{x^2}$$

$U(x)$が最低になるとき、$U'(x) = 0$となるので、[8]

$$a - \frac{b}{{x_0}^2} = 0$$

$$x_0 = \sqrt{b/a} \quad \blacksquare \quad (\because x > 0)$$

(2)

微小振動であるということより、質点の位置をxとすると、$x - x_0 \ll 1$になるので、$U(x - x_0)$を2次の項までテイラー展開して、

$$U(x - x_0) = U(x_0) + \frac{U'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{U''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)$$

$$\cong U(x_0) + \frac{U''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \quad (\because U'(x_0) = 0)$$

計算してみると、$U''(x_0) = \frac{2b}{{x_0}^3}$なので、

$$U(x_0 + h) \cong U(x_0) + \frac{b}{{x_0}^3}(x - x_0)^2$$

これより、$\boldsymbol{F} = -\nabla U$を使うと、（$x$のみを考えているので、$\nabla$は$\frac{d}{dx}$と見做せます。）

$$F = -\frac{d}{dx}\left\{U(x_0) + \frac{b}{{x_0}^3}(x - x_0)^2\right\}$$

$$= -\frac{2b}{{x_0}^3}(x - x_0) \quad \left(\because U(x_0)\text{は定数}\right)$$

これを単振動の運動方程式$ma = -kx$と比較することにより、質点は$x = x_0$を振動の中心とする角振動数$\sqrt{\frac{2b}{m{x_0}^3}}$の単振動をすることが分かるので、一般解は、

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{2b}{m{x_0}^3}}t + \omega_0\right) + x_0 \quad (A, \omega_0 \in \boldsymbol{R}) \quad \blacksquare$$

なお、Aは振幅、ω_0は角振動数の初期値を表しています。

---

[8] 正確には、$U'(x_0) = 0$は$U(x_0)$が極値であることの必要条件に過ぎません。厳密性を求める人は$U''(x_0) > 0$を示して$U(x_0)$が極値（極小値）であることを示しましょう。

[5]

(1)

$\boldsymbol{F} = -\nabla U$を使います。$x$成分を計算すると、

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}U(\boldsymbol{r})$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\frac{k(x^2+y^2+z^2)}{2}$$

$$= -kx$$

y成分、z成分についても同様なので、

$$\boldsymbol{F} = (-kx, -ky, -kz)$$

$$= -k\boldsymbol{r}$$

よって、質点には中心力が働きます。 ■

中心力（原点に向かう向き、または原点から遠ざかる向きの力）は位置ベクトル$\boldsymbol{r}$の定数倍として表されます。

(2)

(1)より、$F_r = -kr$。$a_r = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{e}_r} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$と合わせて、$r$方向の運動方程式は、

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -kr \quad ■$$

（原点を基準にした）角運動量$\boldsymbol{L}$は$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$で表されます。

これと$\boldsymbol{v}_\theta = r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_r = 0$、$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_z$より、

$$\boldsymbol{L} = mr\boldsymbol{e}_r \times (\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)$$

$$= mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z$$

$$\therefore L_z = mr^2\dot{\theta} \quad ■$$

(3)

$L_z = mr^2\dot{\theta}$より、$h = r^2\dot{\theta}$なので、

$$m\left\{\ddot{r} - r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2\right\} = -kr$$

$$m\left(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}\right) = -kr \quad ■$$

(4)

(3)の運動方程式の両辺に$\dot{r}$をかけると、

$$m\left(\ddot{r}-\frac{h^2}{r^3}\right)\dot{r}=-kr\dot{r}$$

$$m\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dt}-\frac{mh^2}{r^3}\frac{dr}{dt}=-kr\frac{dr}{dt}\quad\left(\because\dot{r}=\frac{dr}{dt},\ddot{r}=\frac{d\dot{r}}{dt}\right)$$

両辺をtで不定積分すると、

$$\int\left(m\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dt}-\frac{mh^2}{r^3}\frac{dr}{dt}\right)dt=\int -kr\frac{dr}{dt}dt$$

$$\int m\dot{r}d\dot{r}-\int\frac{mh^2}{r^3}dr=-k\int rdr$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{mh^2}{2r^2}=-\frac{1}{2}kr^2+E$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{mh^2}{2r^2}+\frac{1}{2}kr^2=E$$

（Eは積分定数です。質点の全エネルギーを表しています。）

これがエネルギー保存則の式になります。

$\dot{r}$はrをtで微分したもの、即ちr方向の速度なので、$\frac{1}{2}m\dot{r}^2$は運動エネルギーと見做せます。よって、有効ポテンシャルU_{eff}は、

$$U_{eff}=\frac{1}{2}kr^2+\frac{mh^2}{2r^2}\quad■$$

(5)

(4)より、

$$U_{eff}{}'=kr-\frac{mh^2}{r^3}$$

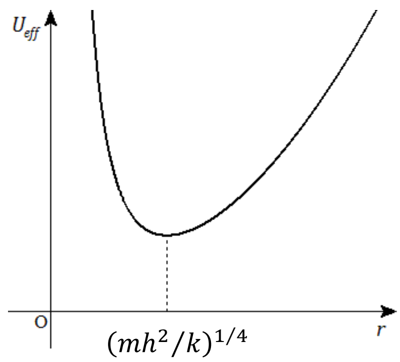
$$=\frac{kr^4-mh^2}{r^3}$$

これより、増減表を書くと、

r	(0)	$\cdots$	$(mh^2/k)^{1/4}$	$\cdots$
$U_{eff}{}'$		$-$	0	$+$
U_{eff}	$(+\infty)$	↘	$h\sqrt{mk}$	↗

よって、$r_0=(mh^2/k)^{1/4}$　■

U_{eff}は右図のようになります。



(6)

まず、角運動量保存則より、hの値は一定です。(5)の答より、r_0の値も一定であることが分かります。これより、「$r(t) = r_0$の運動」の意味ですが、「$r(t)$がr_0で一定である運動」、即ち「半径r_0の円運動」のことだと分かります。

r_0の式に$h = r^2\dot{\theta}$、$r = r_0$を代入すると、

$$r_0 = \left\{\frac{m\left({r_0}^2\dot{\theta}\right)^2}{k}\right\}^{1/4}$$

$${r_0}^2 = \sqrt{\frac{m}{k}}{r_0}^2\dot{\theta}$$

$$\therefore \dot{\theta} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \blacksquare$$

(7)

振動の中心をr_0とすると、角振動数は$\sqrt{U''(r_0)/m}$と表されます。(教科書 4.5.1 節やこのシケプリの p.28[4](2)を参照して下さい。) ${U_{eff}}''(r_0)$を計算すると、

$$\begin{aligned} {U_{eff}}''(r_0) &= k + \frac{3mh^2}{{r_0}^4} \\ &= k + \frac{3mh^2}{mh^2/k} \\ &= 4k \end{aligned}$$

よって、角振動数は、

$$\sqrt{\frac{U''(r_0)}{m}} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \blacksquare$$

5. 運動座標系

記号・用語の説明

「ガリレイ変換」

所謂、普通の座標変換です。重要なのは「ガリレイ変換によって（ニュートンの）運動方程式は変わらない」という部分です。このような性質を「共変性」[9]と言います。共変性があるお蔭で、どんな基準で見ても同じ運動方程式が使えることが保障される訳です。

「x'」

時間微分ではなく、「新しい座標系から見た（観測した）ときの値」という意味です。x'なら新しい座標系から見たときのx座標、$\boldsymbol{v}'$なら新しい座標系から見たときの速度ベクトルを表します。

「$||$」

平行であることを表す記号です。例えば、$\vec{a}||\vec{b}$なら$\vec{a}$と$\vec{b}$とが平行であることを表しています。これは欧米式の記法で、日本式では$\vec{a}//\vec{b}$と書きます。

「コリオリ力」

見かけの力の代表例のような「力」です。実際には、力など全く働いていません。
地表基準で静止している質点を、地表に対して回転している（自己中な）観測者から見ると、「あいつは俺の周りを回っている！」と思うことでしょう。回転運動をしているからには向心力が働いていなければなりません。そこで、この観測者が質点に働いていると（自分勝手に）考える力がコリオリ力です。
地動説を正当化するような力ですが、回転している基準から見た運動を考えるときに必要になってきます。

---

9 相対論で特に重要になってくる概念。相対論ではガリレイ変換ではなくローレンツ変換を使うので、共変性を成り立たせるために運動方程式を修正する必要がある。ちなみに、ガリレイ変換はローレンツ変換の近似。

「遠心力」

これも見かけの力の代表例のような「力」です。

地表基準で円運動している質点を、地表に対して質点と同じ角速度で回転している（自己中な）観測者から見ると、「あいつは静止している！」と思うことでしょう。しかし、地表基準で円運動しているということは質点には向心力が働いているので、もし質点が「静止している」なら、向心力と釣り合う何らかの力が働いていなければなりません。そこで、この観測者が質点に働いていると（自分勝手に）考える力が遠心力です。

ごっちゃになりやすいコリオリ力と遠心力ですが、以下のように覚えましょう。

地表基準で静止→コリオリ力が働いているように見える

回転座標系で静止→遠心力が働いているように見える

途中式補完

式(222), (223)

次の形の方が覚え易いです。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_x \\ \boldsymbol{e}'_y \end{pmatrix}$$

（$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_x \\ \boldsymbol{e}'_y \end{pmatrix}$の順番に注意！ここではベクトルではなく「座標」を回転させます。）

この行列は数学でもお馴染みの回転行列です。

一般的に、座標変換というのは行列によって表されます。

式(224)

$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$（静止した座標系の単位ベクトル）は時間変化しないので、$\dot{\boldsymbol{e}}_x = \dot{\boldsymbol{e}}_y = \boldsymbol{0}$（零ベクトル）です。これより、積の微分をして、

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{e}}'_x &= \frac{d}{dt}\left(\cos\omega t\,\boldsymbol{e}_x + \sin\omega t\,\boldsymbol{e}_y\right) \\
&= -\omega\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_x + \omega\cos\omega t\,\boldsymbol{e}_y \\
&= \omega\left(-\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_x + \cos\omega t\,\boldsymbol{e}_y\right) \\
&= \omega\boldsymbol{e}'_y \\
&= \omega(\boldsymbol{e}'_z \times \boldsymbol{e}'_x) \\
&= \omega\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}'_x \quad (\because \boldsymbol{e}'_z = \boldsymbol{e}_z) \\
&= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_x \quad (\because \omega\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{\omega})
\end{aligned}$$

式(225)についても同様です。$\boldsymbol{e}'_y = \boldsymbol{e}'_z \times \boldsymbol{e}'_x$がミソです。

式(228)

回転座標系での質点の座標を(x', y', z')とすると、質点の位置ベクトル$\boldsymbol{r}$は

$$\boldsymbol{r} = x'\boldsymbol{e}'_x + y'\boldsymbol{e}'_y + z'\boldsymbol{e}'_z$$

と表されるので、これを時間微分すると、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \dot{\boldsymbol{r}} \\
&= \frac{d}{dt}\left(x'\boldsymbol{e}'_x + y'\boldsymbol{e}'_y + z'\boldsymbol{e}'_z\right) \\
&= \dot{x}'\boldsymbol{e}'_x + \dot{y}'\boldsymbol{e}'_y + \dot{z}'\boldsymbol{e}'_z + x'\dot{\boldsymbol{e}}'_x + y'\dot{\boldsymbol{e}}'_y + z'\dot{\boldsymbol{e}}'_z \\
&= \dot{x}'\boldsymbol{e}'_x + \dot{y}'\boldsymbol{e}'_y + \dot{z}'\boldsymbol{e}'_z + x'\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_x + y'\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_y + z'\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_z \\
&= \dot{x}'\boldsymbol{e}'_x + \dot{y}'\boldsymbol{e}'_y + \dot{z}'\boldsymbol{e}'_z + \boldsymbol{\omega} \times \left(x'\boldsymbol{e}'_x + y'\boldsymbol{e}'_y + z'\boldsymbol{e}'_z\right) \\
&= \dot{x}'\boldsymbol{e}'_x + \dot{y}'\boldsymbol{e}'_y + \dot{z}'\boldsymbol{e}'_z + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}
\end{aligned}$$

$\left(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'\right)$というのは回転座標系から見た質点の座標の時間変化、即ち、回転座標系から見た質点の速度なので、$\dot{x}'\boldsymbol{e}'_x + \dot{y}'\boldsymbol{e}'_y + \dot{z}'\boldsymbol{e}'_z$は回転座標系から見た質点の速度ベクトル$\boldsymbol{v}'$を表していることが分かります。

これより、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

教科書の式変形では$z'\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_z$の項が書かれていませんが、これは$\boldsymbol{e}'_z$が$\boldsymbol{e}_z$に等しく、時間変化しないので$\dot{\boldsymbol{e}}'_z = \boldsymbol{0}$となるからです。$\boldsymbol{\omega} || \boldsymbol{e}'_z$より、$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_z = \boldsymbol{0}$になるから、という説明も出来ます。（教科書ではこちらで説明をしています。）

式(229)も同様にして計算出来ます。

この式の意味はこんな感じです。

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

（静止した座標系から見た）質点の速度　　回転座標系そのものの速度

回転座標系から見た質点の速度

演習問題

［1］

(1)

レコードの回転速度と、テントウムシのレコード盤に対する移動速度を足せば良いです。反時計回りを正方向としているので、テントウムシの居る地点でのレコードの回転速度は$-\omega R$、テントウムシのレコード盤に対する移動速度はvとなることより、

$$v_0 = v - \omega R \quad ■$$

勿論、$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$を使っても計算出来ます。

この場合は$|\boldsymbol{v}'| = v$、$|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}| = \omega R$となり、$\boldsymbol{v}'$と$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$は互いに逆方向を向きます。

(2)

テントウムシは回転運動しているので合力としてレコード盤の中心に向かって大きさ$m(v - \omega R)^2/R$の向心力が働いています。（$v = \omega R$ならば静止しますが、その場合は向心力が 0 になります。）向心力になる力として考えられるのは摩擦力でしょう。あとは重力と、それに釣り合うレコード盤からの垂直抗力を忘れなければＯＫです。

摩擦力：大きさ$m(v - \omega R)^2/R$、レコード盤の中心に向かう方向

重力：大きさmg、鉛直下向き

垂直抗力：大きさmg、鉛直上向き　■

(3)

回転座標系から見ると、テントウムシは速さvで回転運動しているので、合力としてレコード盤の中心に向かって大きさmv^2/Rの向心力が働いています。

大きさmv^2/R、レコード盤の中心に向かう方向　■

(4)

静止座標系から見たときに働いている力（真の力）は回転座標系でもそのまま働き、回転座標系ではそれに加えてコリオリ力と遠心力（見かけの力）が働きます。

$\boldsymbol{v}' \perp \boldsymbol{\omega}$なので、コリオリ力の大きさは、

$$\begin{aligned} |-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'| &= 2m\omega v \sin 90° \\ &= 2m\omega v \end{aligned}$$

$\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{\omega}$なので、遠心力の大きさは、

$$\begin{aligned} |-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})| &= m\omega(\omega r \sin 90°) \sin 90° \\ &= m\omega^2 r \end{aligned}$$

よって、(2)の答に以下の力を加えましょう。向きは外積の定義から考えます。

コリオリ力：大きさ$2m\omega v$、レコード盤の中心に向かう方向

遠心力：大きさ$m\omega^2 r$、レコード盤の中心から離れる方向　■

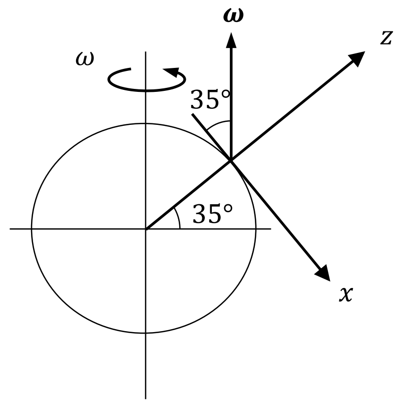
[2]

(1)

地球は自転によって 1 日（$= 60 \times 60 \times 24[\mathrm{s}]$）で 1 回転（$= 2\pi[\mathrm{rad}]$）するので、

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\pi}{60 \times 60 \times 24} \\ &= 7.272 \cdots \times 10^{-5} \\ &= 7.27 \times 10^{-5}[\mathrm{rad/s}] \quad \blacksquare\end{aligned}$$

(2)



教科書 p. 84 の例 3 と同様に、鉛直上方にz軸、
南方向にx軸、東方向にy軸をとります。（右図参照）
図より、地球の角速度ベクトル$\boldsymbol{\omega}$は、

$$\boldsymbol{\omega} = (-\omega\cos 35°, 0, \omega\sin 35°)[\mathrm{rad/s}]$$

（教科書の例 3 とは角度の測り方が違うので、
$\cos$と$\sin$が逆になっています。）
空気はxy平面上（地表面上）で地表（回転座標系）に対して
半径$500[\mathrm{km}]$、速さ$15[\mathrm{m/s}]$の円運動をしているので、
この座標系から見た速度$\boldsymbol{v}'$は、

$$\boldsymbol{v}' = (15\cos\theta, 15\sin\theta, 0)[\mathrm{m/s}]$$

これより、空気の質量をmとしてコリオリ力を計算すると、

$$\begin{aligned}-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' &= -2m(-15\omega\sin 35°\sin\theta, 15\omega\sin 35°\cos\theta, -15\omega\cos 35°\sin\theta) \\ &= 30m\omega(\sin 35°\sin\theta, -\sin 35°\cos\theta, \cos 35°\sin\theta)\end{aligned}$$

となるので、コリオリ力の地表に平行な成分、即ちxy成分の大きさは、

$$|30m\omega(\sin 35°\sin\theta, -\sin 35°\cos\theta)| = 30\,m\omega\sin 35°$$

これより、コリオリ力による加速度の地表に平行な成分の大きさは、

$$\begin{aligned}\frac{30\,m\omega\sin 35°}{m} &= 30 \times 7.27 \times 10^{-5} \times 0.5736 \\ &= 1.250 \cdots \times 10^{-3} \\ &= 1.25 \times 10^{-3}[\mathrm{m/s^2}] \quad \blacksquare\end{aligned}$$

地表に対して半径$500[\mathrm{km}]$、速さ$15[\mathrm{m/s}]$の円運動をしているので、向心力による加速度の大きさは、

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{r} &= \frac{15^2}{500 \times 10^3} \\ &= 4.5 \times 10^{-4}[\mathrm{m/s^2}] \quad \blacksquare\end{aligned}$$

コリオリ力による加速度の方が向心力による加速度より大きく、台風に於いてコリオリ力は無視できない存在になっていることが分かります。

(3)

北緯何度なのかについての指定が一切ありませんが、問題文中には北緯 35 度という値しか出てきていないので、これを使うことにしましょう。

(2) での計算がそのまま使えるので、水流の速さをv[m/s]とすると、コリオリ力による加速度の大きさは$2v\omega\sin 35°$ [m/s^2]、向心力による加速度の大きさはv^2/r [m/s^2]なので、両者が等しくなるとき、

$$\frac{v^2}{r} = 2v\omega\sin 35°$$

$$v = 2\omega r\sin 35°$$

$$v = 2 \times 7.27 \times 10^{-5} \times 0.10 \times 0.5736$$

$$v = 8.34 \times 10^{-6}[\mathrm{m/s^2}] \quad \blacksquare$$

ちなみに、水流の速さが0.10[m/s]だったとすると、コリオリ力は向心力の8.34×10^{-5}倍（12, 000 分の 1 くらい）になります。完全に無視出来る大きさですね。

地球の自転によるコリオリ力は台風[10]くらいの大きなスケールでないと、向心力が強くなり過ぎて感じることが出来ません。台風以外だと、大砲で打ち出した砲弾の軌道などもコリオリ力を考慮して計算します。

ISS009E21526

[10] 台風の画像は http://eol.jsc.nasa.gov/scripts/sseop/photo.pl?mission=ISS009&roll=E&frame=21526 より転載。

6. 質点系

途中式補完

式(271)

2 行目から 3 行目への式変形はただの分配法則です。ここでは 3 行目から 4 行目への式変形を扱います。$\boldsymbol{R}$と$\boldsymbol{V}$は重心の位置ベクトルと速度ベクトルであり、iによらない定数なので、総和記号の外に出すことが出来ます。

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}+m_i\boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{V}+m_i\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v}'_i+m_i\boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{v}'_i)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\right)\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}+\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}'_i\right)\times\boldsymbol{V}+\boldsymbol{R}\times\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}'_i\right)+\sum_{i=1}^{n}(m_i\boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{v}'_i)$$

ここで、

$$\sum_{i=1}^{n}m_i=M$$

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}'_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}'_i=\boldsymbol{0}$$

なので、

$$(\text{与式})=M\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}+\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{V}+\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{0}+\sum_{i=1}^{n}(m_i\boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{v}'_i)$$

$$=M\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V}+\sum_{i=1}^{n}(m_i\boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{v}'_i)$$

式(272)

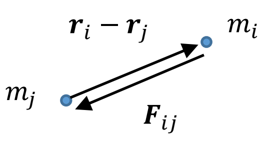
4 行目以降の式変形を扱います。$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\neq j}^{n}\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_{ji}$より、

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\neq j}^{n}\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_{ji}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\neq j}^{n}\boldsymbol{r}_j\times(-\boldsymbol{F}_{ij})\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}_{ij}$$

この総和はiとjのそれぞれについて1からnまで、
$i=j$の場合を除いて和をとるというもので、
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}$ と$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\neq j}^{n}$ は本質的には同じものなので
一緒くたにして大丈夫です。あとは$\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j \| \boldsymbol{F}_{ij}$より、
$(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}_{ij}=\boldsymbol{0}$であることを使えば式(272)が得られます。



演習問題

[1]

運動量保存則より、

$$m\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_2 \quad \cdots ①$$

弾性衝突なので、運動エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + \frac{1}{2}m{v_2}^2 \quad \cdots ②$$

①より、$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1$なので、これを②に代入して、

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1)^2$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}{v_1}^2 + \frac{1}{2}(v^2 - 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_1 + {v_1}^2)$$

$${v_1}^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_1$$

$${v_1}^2 = v_0 v_1 \cos\theta$$

$$v_1 = v_0\cos\theta \quad ■$$

これと$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1$より、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_2 &= (v_0, 0) - (v_0\cos^2\theta, v_0\cos\theta\sin\theta) \\ &= v_0(1-\cos^2\theta, -\sin\theta\cos\theta) \\ &= (v_0\sin^2\theta, -v_0\sin\theta\cos\theta) \quad ■\end{aligned}$$

②の代わりに、衝突の法則より$|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1|$であることを使っても導き出せます。

弾性衝突でない場合は、エネルギー保存則ではなく衝突の法則を使いましょう。

[2]

(1)

全質量は個々の質量を足し合わせることによって求められます。

$$\begin{aligned}M &= m_1 + m_2 + m_3 \\ &= 10.0[\mathrm{kg}] \quad ■\end{aligned}$$

定義より、重心位置と重心速度は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} &= \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3}{M} \\ &= (1.5, 0.4, 1.5)[\mathrm{m}] \quad ■\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V} &= \dot{\boldsymbol{R}} \\ &= \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3}{M} \\ &= (0.5, 2.1, 1.0)[\mathrm{m/s}] \quad ■\end{aligned}$$

これより、重心の運動エネルギーと角運動量は、

$$\frac{1}{2}MV^2 = 28.3[\mathrm{J}] \quad ■$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_G &= M\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V} \\ &= (-27.5,-7.5,29.5)[\mathrm{J\ s}] \quad ■\end{aligned}$$

(2)

$\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}$より、

$$\boldsymbol{r}'_1 = (3.5,-0.4,-1.5)[\mathrm{m}]$$

$$\boldsymbol{r}'_2 = (-1.5,1.6,-1.5)[\mathrm{m}]$$

$$\boldsymbol{r}'_3 = (-1.5,-0.4,1.5)[\mathrm{m}] \quad ■$$

この値を代入すれば、$\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i = 0$はすぐ示せますが、ここでは重心の定義から一般的な場合についての証明を（教科書とは少し違う形で）したいと思います。

重心の定義より、$\boldsymbol{R} = \sum_j m_j\boldsymbol{r}_j / \sum_k m_k$なので、

$$\begin{aligned}\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i &= \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}) \\ &= \sum_i m_i\left(\boldsymbol{r}_i - \frac{\sum_j m_j\boldsymbol{r}_j}{\sum_k m_k}\right) \\ &= \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i - \frac{\sum_j m_j\boldsymbol{r}_j}{\sum_k m_k}\sum_i m_i \\ &= \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i - \frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i}\sum_i m_i \\ &= \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i - \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i \\ &= 0 \quad ■\end{aligned}$$

(3)

$\boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}$より、

$$\boldsymbol{v}'_1 = (-0.5,-0.1,-1.0)[\mathrm{m/s}]$$

$$\boldsymbol{v}'_2 = (-0.5,-2.1,4.0)[\mathrm{m/s}]$$

$$\boldsymbol{v}'_3 = (0.5,0.9,-1.0)[\mathrm{m/s}] \quad ■$$

この値を代入すれば、$\sum_i m_i\boldsymbol{v}'_i = 0$はすぐ示せます。

一般的な場合についての証明は、$\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i = 0$の証明と全く同じです。

(4)

(1)、(3)で求めた値より、

$m_1{v_1}^2/2 = 6.0[\mathrm{J}]$

$m_2{v_2}^2/2 = 25.0[\mathrm{J}]$

$m_3{v_3}^2/2 = 25.0[\mathrm{J}]$

$m_1{v_1'}^2/2 = 1.89[\mathrm{J}]$

$m_2{v_2'}^2/2 = 20.66[\mathrm{J}]$

$m_3{v_3'}^2/2 = 5.15[\mathrm{J}]$ ■

これより、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} m_i{v_i}^2/2 &= 56.0 \\ &= 28.3 + 27.7 \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \sum_{i=1}^{3} m_i{v_i'}^2/2 \quad ■\end{aligned}$$

(5)

$\boldsymbol{l}_i$は基準についての言及が無いので、原点から見た角運動量$m_i\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i$でしょう。

(1)～(3)で求めた値より、

$\boldsymbol{l}_1 = (0.0,0.0,30.0)[\mathrm{J\ s}]$

$\boldsymbol{l}_2 = (20.0,0.0,0.0)[\mathrm{J\ s}]$

$\boldsymbol{l}_3 = (-45.0,15.0,0.0)[\mathrm{J\ s}]$

$\boldsymbol{l}_1' = (0.75,12.75,-1.65)[\mathrm{J\ s}]$

$\boldsymbol{l}_2' = (6.5,13.5,7.9)[\mathrm{J\ s}]$

$\boldsymbol{l}_3' = (-4.75,-3.75,-5.75)[\mathrm{J\ s}]$ ■

これより、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{l}_i &= (-25.0,15.0,30.0) \\ &= (-27.5,-7.5,29.5) + (2.5,22.5,0.5) \\ &= \boldsymbol{L}_G + \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{l}_i' \quad ■\end{aligned}$$

7. 剛体

記号・用語の説明

「自由度」

その物体がどれだけ自由に状態を変えられるか、言い換えると「幾つパラメータを決定すればその物体の状態を完璧に決められるか」を表す数です。

例えば、2 次元の空間に於ける位置の自由度は「2」ですが、これはx座標とy座標という「2 つ」の値を決めれば、位置が一つに定まるということを示しています。

（直交座標を使うx座標とy座標ではなく、極座標を使って動径rと偏角θで表しても、やはり 2 つの値で位置を一つに定められます。）

「（2 階の）テンソル」

行列で表される物理量で、「行方向にも、列方向にもベクトルになっている」と説明されることがあります。どういう意味かというと、何らかの座標変換をしたときにベクトル$(a,b),(a,c),(b,d),(c,d)$がそれぞれ$(a',b'),(a',c'),(b',d'),(c',d')$になるなら、（2 階の）テンソル$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$は$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$になる、つまり、行と列をそれぞれベクトルと見て座標変換し、元に戻せば行列そのものの変換になるようなものが（2 階の）テンソルという訳です。

0 階のテンソルはスカラー、1 階のテンソルはベクトルなので、単にテンソルというと 2 階のテンソルを指します。

電磁気学[11]で重要になってくる概念なので覚えておきましょう。

力学Ａでは、回転軸に対して平行でも垂直でもない軸に於ける剛体の角運動量を求める際に慣性テンソルが必要になってきます。

11 磁場はベクトルではなく、テンソルで表される。また、相対論的な電磁気学では電場（ベクトル）と磁場を融合し、電磁テンソルとして扱う。

途中式補完

式(288)

2 行目から 3 行目への式変形はベクトル 3 重積の性質$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$を使っています。ここでは 3 行目から 4 行目への式変形を扱います。

$\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega),\boldsymbol{r}=(x,y,z)$より、

$$\begin{aligned} r^2\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}) &= (x^2+y^2+z^2)(0,0,\omega)-z\omega(x,y,z) \\ &= \omega(-zx,-yz,x^2+y^2) \end{aligned}$$

これのz成分は$\omega(x^2+y^2)$なので、

$$\int\rho(\boldsymbol{r})[r^2\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})]_z dV$$

$$=\int\rho(\boldsymbol{r})\omega(x^2+y^2)dV$$

$$=\omega\int\rho(\boldsymbol{r})(x^2+y^2)dV$$

ωは剛体内の位置によらない値なので、積分の外に出すことが出来ます。

式(297)

3 行目から 4 行目への変形で使われている $\int(x'X+y'Y)\rho(\boldsymbol{r})dV=0$を示します。

重心の定義より、

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-\frac{\int\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV}{\int\rho(\boldsymbol{r})dV}$$

これより、

$$\begin{aligned} \int\boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r})dV &= \int\left(\boldsymbol{r}-\frac{\int\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV}{\int\rho(\boldsymbol{r})dV}\right)\rho(\boldsymbol{r})dV \\ &= \int\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV-\frac{\int\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV}{\int\rho(\boldsymbol{r})dV}\int\rho(\boldsymbol{r})dV \\ &= \int\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV-\int\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

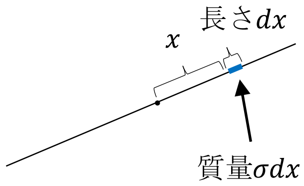
$\int\boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r})dV$の$x$成分が$\int x'\rho(\boldsymbol{r})dV$、$y$成分が$\int y'\rho(\boldsymbol{r})dV$なので、

$$\int x'\rho(\boldsymbol{r})dV=\int y'\rho(\boldsymbol{r})dV=0$$

よって、

$$\begin{aligned} \int(x'X+y'Y)\rho(\boldsymbol{r})dV &= X\int x'\rho(\boldsymbol{r})dV+Y\int y'\rho(\boldsymbol{r})dV \\ &= 0 \end{aligned}$$

式(298)



重心からの距離が$x \sim x + dx$である棒の

微小部分の質量は$dx \cdot \sigma$で求められます。

（線密度×長さ＝質量）

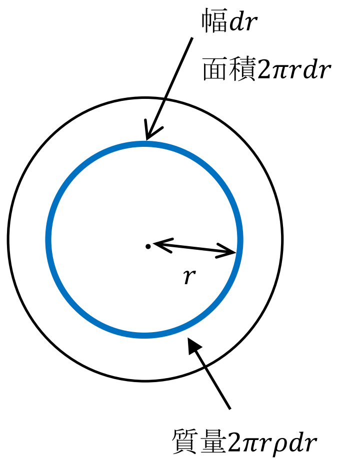
つまり、$\rho(\boldsymbol{r})dV = \sigma dx$なので、

$$I = \int_{-a}^{a} x^2 \sigma dx$$

あとは普通の定積分です。

$2a\sigma = M$（棒の全質量）に注意しましょう。

式(300)



中心からの距離が$r \sim r + dr$である円板の

微小部分の質量は$2\pi r dr \cdot \rho$で求められます。

（面密度×面積＝質量）

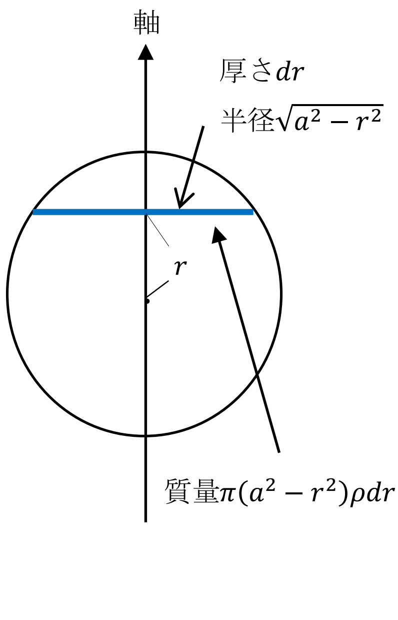
つまり、$\rho(\boldsymbol{r})dV = 2\pi r\rho dr$なので、

$$I = \int_{0}^{a} r^2 \cdot 2\pi r\rho dr$$

あとは普通の定積分です。

$\pi a^2 \rho = M$（円板の全質量）に注意しましょう。

式(301)



教科書のやり方（3 次元極座標）は試験範囲外です。

なので、範囲内での計算例を示します。

球の中心からの距離がrの部分に中心がある

厚さdrの薄い円板の質量は$\pi(a^2 - r^2)\rho dr$で求められます。

（密度×体積＝質量）

式(300)より、この薄い円盤の慣性モーメントは

$\frac{1}{2}\pi(a^2 - r^2)^2 \rho dr$です。

球を薄い円盤が積み重なったものとして近似し、

円盤の慣性モーメントを足し合わせれば、

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}\pi(a^2 - r^2)^2 \rho dr$$

あとは普通の定積分です。

$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho = M$（円板の全質量）に注意しましょう。

演習問題

［1］

（1）

つまるところ、問題文は「$\rho(\boldsymbol{r})dV = \rho(\boldsymbol{r})dxdy$である」ということを言っています。$z$軸から点$(x, y, 0)$までの距離は$\sqrt{x^2 + y^2}$なので、慣性モーメントの定義より、

$$I_z = \int (x^2 + y^2)\rho(\boldsymbol{r})dV$$

$$= \iint (x^2 + y^2)\rho(\boldsymbol{r})dxdy \quad ■$$

（2）

x軸から点$(x, y, 0)$までの距離はyなので、慣性モーメントの定義より、

$$I_x = \int y^2\rho(\boldsymbol{r})dV$$

$$= \iint y^2\rho(\boldsymbol{r})dxdy \quad ■$$

同様にして、

$$I_y = \iint x^2\rho(\boldsymbol{r})dxdy \quad ■$$

以上のことより、

$$I_z = \iint (x^2 + y^2)\rho(\boldsymbol{r})dxdy$$

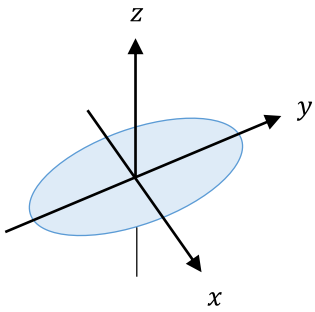
$$= \iint \{y^2\rho(\boldsymbol{r}) + x^2\rho(\boldsymbol{r})\}dxdy$$

$$= \iint y^2\rho(\boldsymbol{r})dxdy + \iint x^2\rho(\boldsymbol{r})dxdy$$

$$= I_x + I_y \quad ■$$

[2]

(1)



直径は剛体板（円盤）と同じ平面にあるので、

[1]で言うところのx軸またはy軸に相当します。

円は対称性があるので、x軸、y軸のどちらでも

慣性モーメントは変わりません。

円盤の重心を通るようにz軸をとり、

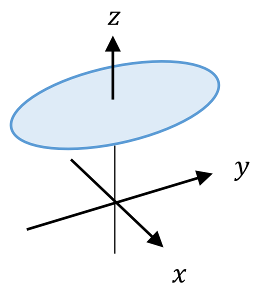
直径を軸としたときの慣性モーメントをIとすると、

[1] (2) の結果と式(300) より、

$$2I = \frac{1}{2}Ma^2$$

$$I = \frac{1}{4}Ma^2 \quad ■$$

(2)



重心を通り、x軸に平行な軸からのx軸の距離はzなので、

式(297) と (1) の結果より、

$$I_x = \frac{1}{4}Ma^2 + Mz^2 \quad ■$$

(3)

円柱を、厚さdzの薄い円盤が積み重なったものと考え、

円柱の単位厚さあたりの質量（密度）をσとします。

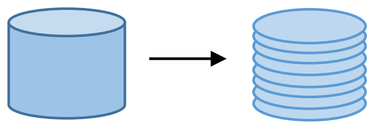
このとき、円盤の質量はσdzとなり、

かつ$\int_0^b \sigma dz = b\sigma = M$となることに注意し、

(2) の結果を使うと、

$$I_x = \int_0^b \left(\frac{1}{4}\sigma dz \cdot a^2 + \sigma dz \cdot z^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}a^2 \int_0^b \sigma dz + \int_0^b \sigma z^2 dz$$



$$= \frac{1}{4}Ma^2 + \frac{1}{3}b^3\sigma$$

$$= M\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}b^2\right) \quad ■$$

(4)

式(302)と(3)の結果より、周期$T = 2\pi/\omega$は

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{Mgd}{\frac{1}{4}Ma^2 + \frac{1}{3}Mb^2}}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{gd}{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}b^2}}}$$

ここで、aは腕の半径、bは腕の長さです。dは肩から腕の重心までの距離なので、$a/2$として良いでしょう。

シケプリの筆者の場合、$a = 0.04[\mathrm{m}], b = 0.70[\mathrm{m}]$だったので、代入すると、

$$T = \frac{2 \times 3.14}{\sqrt{\frac{9.8 \times 0.35}{\frac{1}{4} \times 0.04^2 + \frac{1}{3} \times 0.70^2}}}$$

$$= 1.37 \cdots$$

$$= 1.4[\mathrm{s}] \quad ■$$

腕に全く力を入れないで歩くと、このくらいの周期で腕が振れます。

ちなみに、歩幅を$0.70[\mathrm{m}]$として腕と同じ周期で脚を動かすと、

歩く速さは$(0.70 \times 2)/1.4 = 1.0[\mathrm{m/s}] = 3.6[\mathrm{km/h}]$となります。

8. おまけ

過去問予想問題

これは､ネット上に落ちていた平成 20 年度夏学期の吉岡大二郎教員の試験の｢解答例｣から、問題を予想して構成したものです。

実際に出題された問題や、出題形式（特に、問題文の言い回し）がこれとは大きく違う可能性は大いにあります。使用は自己責任でお願いします。

[1]

(1)仕事の定義を、高校 3 年生にも分かる程度に説明せよ。

(2)その定義から、仕事は物体の運動エネルギーの差に等しいことを示せ。

[2]時計回りに角速度ωで回転する滑らかな円盤と、円盤の中心から距離rの位置に、円盤に固定されているボールがある。ある時刻にその固定が静かに外され、ボールは動き始めた。

(1)静止した人から見ると、ボールにはどのような力が働き、どう動いているように見えるか。

(2)円盤上の人から見ると、ボールにはどのような力が働き、どう動いているように見えるか。

[3]z軸を軸として、角速度ωで回転する剛体がある。

(1)この剛体の角運動量のz成分L_zと運動エネルギーKを､z軸周りの慣性モーメントI_zと角速度ωを使って表せ。

(2)始め、この剛体は角速度がω_1、慣性モーメントがI_1であった。剛体が外力を加えられることなく変形し、z軸周りの慣性モーメントがI_2になったとき、変形後の角速度ω_2と運動エネルギーKを求めよ。

[4]xyz空間上に於いて、$-a/2 < x < a/2$、$-b/2 < y < b/2$、$-c/2 < z < c/2$を占める、質量Mの密度が一様な剛体がある。但し、$a > b > c$とする。

(1)x軸、y軸、z軸周りのこの剛体の慣性モーメントI_x、I_y、I_zを求め、それらの大小を比較せよ。

(2) x軸、y軸、z軸のどれかを軸としてこの剛体が回転するとき、安定な回転になるものを選べ。

[5]授業に対する感想を 2 行程度書け。

過去問予想問題 略解

[1]

(1) $W=\int_{\boldsymbol{r}_A}^{\boldsymbol{r}_B}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$

(2) ニュートンの運動方程式$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$の両辺に$\boldsymbol{v}$を内積で掛け、変形する。
教科書 p43 を参照。

[2] ボールの質量をmとする。

(1) 重力mgと垂直抗力mgが打ち消しあい、ボールは初速度$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$で接線方向に等速直線運動していくように見える。

(2) まず、重力mgと垂直抗力mgが打ち消しあう。ボールは初速度 0 なので、始めは中心から遠ざかる向きに遠心力$m\omega^2\boldsymbol{r}$のみが働いているように見え、中心から離れ始める。すると、進行方向右向きにコリオリ力$-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$が働いているように見えるようになり、ボールは右向きの螺旋を描きながら中心から離れていくように見える。

第 5 章の演習問題[1]がほぼ同じ内容です。

[3]

(1) $L_z=I_z\omega$、$K=\frac{1}{2}I_z\omega^2$　（教科書 p. 103～104 を参照。）

(2) $\omega_2=\frac{I_1}{I_2}\omega_1$、$K=\frac{1}{2}\frac{{I_1}^2}{I_2}{\omega_1}^2$　（角運動量保存則を使って計算する。）

[4]

(1) $I_x=\frac{1}{12}M(b^2+c^2)$、$I_y=\frac{1}{12}M(c^2+a^2)$、$I_z=\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$
$I_x>I_y>I_z$

（計算式は$I_x=\int_{-b/2}^{b/2}dy\int_{-c/2}^{c/2}dz(y^2+z^2)\rho$といった感じになります。）

(2) x軸とz軸　（教科書 p. 128 を参照。）

[5]

りきがくのことがとってもよくわかるすばらしいじゅぎょうでした。とくに、だいじろうすぴんにはかんどうしました。りきがくってすごいなあ。

尚、授業内で触れたのに教科書には載っていないものとして、「年周視差による恒星までの距離の測定」、「宇宙探査機ボイジャーのスイングバイ」などがあります。
計算問題で出てくることは考えにくいですが、感想に入れておくと授業聞いてますアピールになるかも知れません。