金４経済１（竹野）（グラフはレジュメを参照してください）

消費者の理論

消費者の行う消費対象の選択について考える。

・合理的選択の公理

消費者は最も好ましい選択肢を消費対象として選択する。

・選好関係

２つの要素（選択肢）x,x'に関して、x>x'　ならば、x は x'より好まれる。
（ある人の選好関係が　リンゴ＞ミカン　ならば、この人はミカンよりリンゴを選好する。）

選好関係に関する公理（合理的な消費者の選択を考察するための公理）

１．　完備性

X をすべての財の集合としたとき、x,x'　が X に属するならば、　x<x' または　x'<x　または　x~x'（x と x'は無差別）　が成り立つ。

２．　推移性

x,x',x"　が X に属するとし、x<x'　かつ　x'<x"　ならば、x<x"　が成り立つ。

３．　顕示選好の弱公理

２つの要素 x,x' から成る X において x<x' が成り立つならば、３つの要素 x,x',x" から成る X' においても x<x' が成り立つ。

４．　連続性（よくわかりませんが、レジュメから推測）

X に属するひとつの要素 x ほどは選好されないが、X に属する別の要素 x' よりは選好されるある財 x"があるとき、x"は X に属する。

・ 効用関数

消費者の消費による満足の程度を効用といい、効用を数値で表したものを効用関数という。ある財の消費量を x、得られる効用を u で表す。

効用関数の存在に関する定理

完備性、推移性、連続性が与えられるとき、連続関数（1 本の線で表される関数）U が存在する。U は、ベクトル X から実数への写像であり、X に属する要素　x,x' について、x<x' が成り立つとき、u(x)<u(x')が成り立

つ。

効用について

限界効用

財の消費量を一単位増加させたときの効用の増加分。効用関数では u’(x)の値（グラフの傾き）である。この値は常に正である（非飽和の前提）が、徐々に小さくなる（限界効用逓減の法則）。

非飽和の前提

同じ財であれば、消費者は消費できる量が多いことを選好する（ハンバーガー１個より２個のほうがいい）。（u’(x)>0）

限界効用逓減の法則

消費量が増加するにつれて、効用の増加率は減少する（ハンバーガーを何個も食べると満腹になり、もう食べたいとは思わなくなる）。(u”(x)<0)

まとめ

消費者は、効用が最大になるような選択をする。つまり、効用関数が最大値をとるような座標が消費者の選択である。

効用最大化問題を解く

$$\underset{x1,x2}{Max}\ u(x_1,x_2)$$

s.t.　$p_1x_1+p_2x_2=y$　　s.t.=such that(そのような),p=price,y=可処分所得

↑

予算制約式　$p_1x_1+p_2x_2 \leqq y$　の範囲で消費可能。

効用が最大のとき、消費者の選択は予算制約式上にある。

無差別曲線

同じ水準の効用が得られる財の組み合わせの集合。

性質 1.一般に右上の無差別曲線ほど効用が高い。

2.同じ効用関数の無差別曲線は決して交わらない。

3.無差別曲線は線である。(幅はない)

最適化の条件

　無差別曲線と予算制約式が接する座標が解。

コブダグラス型効用関数での最大化問題

$$\underset{x1,x2}{Max}\ x_1^a x_2^{1-a}$$

　s.t.　$p_1 x_1 + p_2 x_2 = y$

コブダグラス型効用関数とは

　一次同次関数であり、扱いやすいのでよく使われる効用関数

　→t>0　の条件で、消費量が t 倍になったとき

　　$u(tx_1, tx_2) = (tx_1)^a \times (tx_2)^{1-a} = t\, x_1^a x_2^{1-a}$　となり、得られる効用も t 倍になる。

解法１．予算制約式の傾きと無差別曲線の傾きが等しいことに着目

　予算制約式　$p_1 x_1 + p_2 x_2 = y$

$$\rightarrow x_2 = \frac{y}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \qquad 傾き - \frac{p_1}{p_2}$$

　無差別曲線　$u = x_1^a x_2^{1-a}$　　$\frac{dx_2}{dx_1}$ を求めればよい

　　$u(x_1, x_2)$を全微分すると、　$\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = 0$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2}$$

この絶対値を限界代替率(MRS)という。

　　ここでの MRS は、$\frac{\partial u}{\partial x_1} = a x_1^{a-1} x_2^{1-a}$ ，$\frac{\partial u}{\partial x_2} = (1-a) x_1^a\ x_2^{1-a}$

　　よって、$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2} = -\frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1}$　となる。

　　これが予算制約式の傾きと等しいので、

$$-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1}$$

　　これを x_1, x_2 について解くと、

$$x_1 = \frac{ay}{p_1} \qquad x_2 = \frac{(1-a)y}{p_2}$$

$(p_1 x_1 + p_2 x_2 = y)$を使用

　　　この解を Warlas または Marshal の需要関数という。

解法２． Lagrange 乗数法

制約つき最大化問題を制約なし最大化問題に置き換える。

Lagrangean を Set up する

$L \equiv x_1^a x_2^{1-a} + \lambda(y - p_1 x_1 - p_2 x_2)$　　λ：ラムダ

$P_1 \ \underset{x1,x2,\lambda}{Max} \ x_1^a x_2^{1-a} + \lambda(y - p_1 x_1 - p_2 x_2)$

P_1 は P_2：$\underset{x1,x2,\lambda}{Max} \ a\ln x_1 + (1-a)\ln x_2 + \lambda(y - p_1 x_1 - p_2 x_2)$

としても解は同じ。

P_2 を解くには、選択変数である x_1, x_2 と

ラグランジュ乗数λで偏微分して 0 とおけばよい。

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{a}{x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{1-a}{x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

これを解いて、

$$x_1 = \frac{ay}{p_1}, \quad x_2 = \frac{(1-a)y}{p_2}, \quad \lambda = \frac{1}{y}$$

双対性

効用最大化問題の解と支出最小化問題の解は一致する。

支出最小化問題

$$\underset{x1,x2}{Min} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2$$

s.t.　$u(x_1, x_2) = \bar{u}$　(任意の効用水準)

$$\underset{x1,x2,\mu}{Min} \ p_1 x_1 + p_2 x_2 + \mu(\bar{u} - u(x_1, x_2))$$

x_1, x_2, μ について偏微分し、解いたものをヒックスの需要関数といい、$h(p, \bar{u})$で表す。

これを予算制約式に代入すると、

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = p_1 h_1(p_1, p_2, \bar{u}) + p_2 h_2(p_1, p_2, \bar{u})$$

e は価格が p_1, p_2 のとき効用 $\bar{u}$ を維持するのに必要な最低限の支出であ

り、支出関数という。

間接効用関数　与えられた価格と所得で達成できる最高の効用水準であり、所得を y として、$v(p_1, p_2, y)$で表す。

$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$ のとき、ワルラスの需要関数より、

$$v(p_1, p_2, y) = \left(\frac{ay}{p_1}\right)^a \left(\frac{(1-a)y}{p_2}\right)^{1-a} = \bar{u}$$

y について解くと、$y = \frac{p_1^a p_2^{1-a}}{a^a (1-a)^{1-a}} \bar{u} = e(p_1, p_2, \bar{u})$となり、ワルラスの需要関数とヒックスの需要関数が対応していることがわかる。

ワルラスの需要関数とヒックスの需要関数の双対性に関する恒等式

$e(p, v(p,y)) = y$　　効用 v を与える最小の支出は y

$v(p, e(p,u)) = u$　　支出 e により得られる最大効用は u

$x(p,y) = h(p, v(p,y))$　　所得 y のときのワルラスの需要関数は、効用 v のときのヒックスの需要関数に等しい

$h(p,u) = x(p, e(p,u))$　　効用水準 u のときのヒックスの需要関数は、支出 e のときのワルラスの需要関数に等しい

生産者の理論

企業は利潤が最大になるよう行動する

$\pi = py - wx$

(π：利潤　p：価格　y：生産量　w：賃金　x：投入量(労働者をどれだけ雇うか、など))

$y=f(x)$　とおくと、$f'(x)>0$, $f''(x)<0$(限界生産性逓減の法則)　が成り立つ。

利潤最大化問題

$$\max_x \; py - wx$$

$$\text{s.t.} \quad y = f(x)$$

FOC は、$\frac{\partial \pi}{\partial x} = pf'(x) - w = 0$

より、$f'(x) = \frac{w}{p}$ ←実質賃金(財 1 単位を基準としたときの賃金)

$\pi = py - wx$　より、$y = \frac{\pi}{p} + \frac{w}{p}x$

$y=f(x)$と $y = \frac{\pi}{p} + \frac{w}{p}x$　が接したときの x の値が求める投入量である。

例） $\underset{x}{Max}$ px^a －wx (y= x^a)

FOCは、$\frac{\partial \pi}{\partial x}$=pa$x^{a-1}$ －w=0

これを x について解くと、x(p,w)=$(\frac{w}{ap})^{\frac{1}{a-1}}$ これを生産要素需要関数（どれだけの生産要素を必要とするか）という。

また、y=$(\frac{w}{ap})^{\frac{a}{a-1}}$ これを供給関数という。

このときπ=w$(\frac{1-a}{a})(\frac{w}{ap})^{\frac{1}{a-1}}$ これを利潤関数という。この関数ででる数値は、企業の最適値関数である。

ホテリングの補題

生産要素需要関数、供給関数、利潤関数が与えられたとき、

$\frac{\partial \pi}{\partial p}$=y , $\frac{\partial \pi}{\partial w}$=－x が成り立つ。

双対性

利潤最大化問題の解と費用最小化問題の解は一致する。

完全競争市場下での企業の行動

利潤最大化問題から供給曲線を求める

$\underset{y}{Max}$ py－c(y)

FOCは、p－c'(y)=0 価格pは正なので、c'(y)>0である。

SOCは、最大値では負なので（レジュメp2(若干の数学のところ)参照）

－c"(y)<0 よってc"(y)>0

FOCより、p= c'(y) pとyの関係をy(p)で表す

両辺をpについて微分すると、

1=c"(y(p))y'(p)

c"(y)>0 より、y'(p)>0

よって、企業の供給曲線は右上がりである。

費用について

総費用＝可変費用＋固定費用(生産量がゼロでも発生、土地代など)

企業が製品を生産する条件

生産したときの利益＞生産しないときの利益

$py - c^v$(可変費用)－F(固定費用)$\geq -F$

$p \geq \frac{c^v(y)}{y}$ ←平均可変費用（AVC）

市場の供給

例）$c(y)=y^2+1$　$\rightarrow c^v = y^2$, F=1　である。

MC=c'(y)=2y , AVC=y　よって MC＞AVC なので製品を生産する。

p=MC=2y　より、$y=\frac{p}{2}$

N の企業があり、費用関数が同一ならば、

総供給 $Y(p)=\sum_{n=1}^{N} y_i(p) = n\frac{p}{2}$

市場の均衡

X(p)=Y(p)

例）X(p)=a－bp　(a,b>0)

$Y(p)= n\frac{p}{2}$

均衡価格は、

$a - bp = n\frac{p}{2}$

$p=\frac{a}{b+\frac{n}{2}}$

消費者余剰（CS）

消費者が支払ってもよいと考えていた価格と実際支払った価格の差を市場全体で合計したもの。

例）110 万で車を買おうと思っていたひとが 100 万で買えたとき、10 万円分この消費者の購買意欲は余っている。

生産者余剰（PS）

取引価格と生産者の限界費用との差額を市場全体で合計したもの。

例）車を売るとき、限界費用が 90 万の企業が 100 万で車を売れたとき、この企業は 10 万円利益を得る。

総余剰（TS）

消費者余剰と生産者余剰を加えたもの。社会構成水準のひとつの基準。

完全市場のどこがよいのか？

市場に依らない社会と比較するため、市場に依らない代表的代理人(Agent)の効用最大化問題を考える。

Agent の効用　u(x,y)=u(x)+y　y：x 以外の全ての財

Agent は富 W を持ち、c(x)+y=W を満たすとする。c(x):x をつくるための費用

$\underset{x,y}{Max}$ u(x)+y

s.t.　c(x)+y

y を消去して、$\underset{x}{Max}$ u(x)+W－c(x)

FOC は、u'(x)－c'(x)=0　よって、u'(x)=c'(x)

一方、TS=CS+PS　より、

TS=u(x)－c(x)　（レジュメ p9 参照）

FOC は　u'(x)－c'(x)=0　となり、これは Agent の効用最大化問題の条件の FOC と一致する。

また、市場経済では、u'(x)=p , c'(x)=p　が成立(レジュメ p6,7 参照)

よって、完全競争市場での均衡価格は、TS を最大化させるものであり、市場に依存しない Agent の効用最大化の結果でもある。よって、完全競争市場は望ましいといえる。

不完全競争市場

独占

企業は価格を自由に設定することができる。→p≡p(y) , p'(y)<0

独占企業の最大化問題

$\underset{y}{Max}$ p(y)y－c(y)

FOC は　$\frac{\partial \pi}{\partial y}$=p+p'y－c'=0

SOC は　$\frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2}$=2p'+p''y－c''<0

FOC より、p+p'y=c'

(限界収入)=(限界費用)

p(1+$\frac{dp}{dy}\frac{y}{p}$)=c'　(p'=$\frac{dp}{dy}$)

ここで、$\varepsilon=-\frac{dy}{dp}\frac{p}{y}$　とすると、　p(1－$\frac{1}{\varepsilon}$)=c'

ε は弾力性(elasticity)であり、ある変数の変化率と別のある変数の変化率の比

ここでは、価格を変化させたときの生産量への影響

$|\varepsilon|<1$ のとき　　非弾力的（生産量への影響小）

$|\varepsilon|>1$ のとき　　弾力的（生産量への影響大）

例）p(y)=a－by , c(y)=cy　(a,b,c)>0

利潤最大化

$$\underset{y}{Max}\ (a-by)y-cy$$

FOC は y で偏微分して 0 とおけばよいので、a－2by－c=0

MR(限界収入)=a－2by=c=MC(限界費用)

生産量 y=$\frac{a-c}{2b}$ ，価格 p=$\frac{a+c}{2}$

利潤最大化の条件　MR=MC

これを満たすとき、独占企業は(P*－MC)Y*の利益を得る(レジュメ p10 参照)。しかしこのとき、完全競争下での生産量よりも独占市場の生産量は下回っているため、社会厚生水準は最大化されない。

ゲーム理論

共有知識

すべてのプレイヤーは G(Player,Strategies,Payoff)を知っており、その(皆がGを知っているという)事実も共有する。

支配戦略均衡

すべてのプレイヤーが相手の戦略に関わらずより大きい利得を得ることができる戦略（支配戦略）を選択している状態。

ナッシュ均衡

どのプレイヤーも自分の戦略を変更することによって、より大きい利得を得ることができない戦略の組み合わせ。

クールノー競争

同様の製品 y を生産する２つの企業を考える。２つの企業は生産量によって競争し、相手の生産量を予想して自己の生産量を決定する。独占よりは効率的であるが、完全競争よりは非効率的。企業数が多くなれば効率化が進む。最適反応関数の傾きは負である。

ベルトラン競争

２つの企業は価格によって競争する。

同一製品を供給する場合

価格は限界費用まで下がる。

同一ではないが代替ができる製品(Windows と Mac など)を供給する場合

最適反応関数の傾きは正である。→どちらかの企業の製品の価格が上がれば、もう片方の企業の製品の価格も上がる。

シュタッケルベルグ競争

企業１が先に生産量を決定する(変更不可)。企業２は企業１の生産量を確認した後、自己の生産量を決定する。（これを Stage Game という）

企業１は企業２の最適反応を考慮に入れ生産量を決定する。

企業２は企業１の実際の生産量に反応して生産量を決定する。

結果、企業１が得をする。

談合

企業１と２が競争せず利潤を追求したとき

$$\underset{y1,y2}{Max} \quad \Pi \ (\equiv \pi_1 + \pi_2)$$

$$\underset{y1,y2}{Max} \quad p(Y)Y - c_1(y_1) - c_2(y_2) \qquad Y = y_1 + y_2$$

ＦＯＣは

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_1} = 0 \quad かつ \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y_2} = 0$$

しかしこのとき、

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial y_1} = p(Y) + p'(Y)y_1 - c'_1(y_1) = -p'(Y)y_2 > 0 \quad となり、$$

企業１の利潤最大化の FOC である $\frac{\partial \pi_1}{\partial y_1} = 0$　を満たさない。(レジュメ p17)

よって、談合を守らないほうが得であり、談合は守られない。

では、談合が成立するのはどんなときか？

繰り返しゲーム

一方が約束を破ったなら、それ以降は競争(クールノー競争)に戻る。

有限回繰り返しのとき

最後の年は談合を守らないほうが得であり、談合は守られない。すると最後の年は考えなくてもよいことになり、その前の年が最後の年ということになる。結局、最初の年にも守られないということになる。

→有限回繰り返しのとき、談合は不成立。

無限回繰り返しのとき

約束を守ったときの利潤を π^c　とする。

時間を t とし、t=0 を現在、t=1 を 1 年後、t=2 を 2 年後…とする。

このとき、t=1 での利得 π^c は t=0 においてどの程度の価値があるか？

（今いくらあれば１年後π^cになるか？）←割引現在値（ＰＶ）という

約束を守り続けるとき

$$PV^c=\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t\pi^c=\frac{1}{1-\delta}\pi^c \qquad \delta=\frac{1}{1+r} \qquad (\delta：割引因子)$$

約束を破るとき

約束を破った年だけ$\pi^d>\pi^c$となる利得π^dが得られる。しかし、その後は競争による利潤しか得られない。

t=0 において約束を破ったとき、

$$PV^d=\pi^d+\sum_{t=1}^{\infty}\delta^t\pi^n=\pi^d+\frac{\delta}{1-\delta}\pi^n \qquad \pi^n：競争による利潤$$

約束が守られるためには

$PV^d<PV^c$　が成立すればよい。　（了）