振動・波動論

2013年度　冬学期　金曜3限　担当教員：吉岡大二郎
作：理一14組　糟谷直孝・渡邊省吾

- 学生の単位キラーこと吉岡大二郎先生の「振動・波動論」のシケプリです。
- 授業で使われている教科書は「振動と波動」（吉岡大二郎著、東京大学出版会）です。
- このシケプリは手書きですので字が汚いこと、また文章が拙いこと等はご容赦ください。
- 構成は全6章からなっていますが、そもそも上記の教科書が要点が論理的に美しく述べられているので、このシケプリは“教科書を読んでいる時間がない人”や“教科書が細かすぎて逆に理解不能に陥った人”などが使ってください。一応、まじめに学習してきた方も満足できるよう努力しましたが。
- 吉岡大二郎先生の期末試験の過去問を見る限り、教科書がほとんどまんま出るので（だからといって決して簡単ではありません。教科書を理解するのが困難なのですから。）このシケプリも教科書にかなり準じました。
- 試験に出ないと思われる範囲は飛ばしました。
- 振動・波動論は身近に存在する“波”を扱っているだけでなく、量子力学にもつながる重要な学問です。がんばりましょう。

構成

範囲めちゃくちゃ広いな（泣）

※ 数式の横に記入されている番号（例：(6.42)）はいきなり飛ぶことがあります。
教科書の式番号に合わせてあるだけなので気にしないでください。

第1章 1つの質点の振動

1.1 単振動

ここは夏学期の力学で既に学んでいると思うので軽めに。
x軸上を運動する質量mの物体に力$F=-kx$のみが働いているとすると、運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -kx \tag{1.1}$$

と表される。この2階線形微分方程式の一般解は、角振動数を$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$とすると

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \tag{1.2}$$

となる。この運動を単振動または調和振動という。

A：振幅 , $\omega_0 t + \alpha$：位相 (phase) , α：初期位相.

$f \equiv \frac{\omega_0}{2\pi}$：振動数（周波数）[Hz] , $T \equiv \frac{1}{f}$：周期 [s]

→ 単振動の周期は運動方程式によって決定し、初期条件とは無関係である。これを等時性という。

↓

単振動のエネルギーの考察.

運動エネルギー $E_{K.E.} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha)$ (1.4)

ポテンシャルエネルギー（基準は$x=0$）

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \alpha)$$
$$= \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) \tag{1.5}$$

全エネルギー $E_{K.E.} + U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \mathrm{const.}$

→ 一定に保存される.

※ 具体例として、「バネに吊された物体」,「振り子」,「任意のポテンシャル下での微小運動」「電気回路」,「ビンの空気の振動」がありますが、どれも重要（出題されやすい）ので教科書を参照してください。以降、具体例は極力割愛します。

1.2 減衰振動

現実世界では空気抵抗や摩擦力があり、振幅は減少していく。

→ そこで今回は、速度に比例する抵抗力が働くときの運動を考える。

⇓

球状の物体には、半径をa，空気の粘性係数をηとすると，vに比例する$6\pi a\eta v$の抵抗力が働くことが知られている。

→ 運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx - 6\pi a\eta\dot{x} \tag{1.29}$$

ここで $6\pi a\eta \equiv 2\gamma m$ とすると、式(1.29)は

$$m\ddot{x} = -kx - 2\gamma m\dot{x} \qquad \therefore \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1.32}$$

という形になる。

⇓

Cは初期条件で決まるので この段階では任意。

[重要] 線形微分方程式の一般解法 ： $x = Ce^{\lambda t}$ と仮定し、λを求める

$x = Ce^{\lambda t}$，$\dot{x} = \lambda Ce^{\lambda t} = \lambda x$，$\ddot{x} = \lambda^2 Ce^{\lambda t} = \lambda^2 x$ より式(1.32)は

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)x = 0 \tag{1.36}$$

となる。このとき $x=0$ を「自明な解」または「つまらない解」という。

$x \neq 0$ のとき，$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$ となり

$$\lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{1.37}$$

の2つの解が求まる。

これを $\gamma > \omega_0$（過減衰），$\gamma = \omega_0$（臨界減衰），$\gamma < \omega_0$（減衰振動）に分けてそれぞれの具体的な解$x(t)$を求めていく。

(i) $\gamma > \omega_0$ のとき．(過減衰解)

式(1.37) $\lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ は 負の実数 となり

$$x(t) = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t} \qquad (1.38)$$

が一般解となる。(C_+, C_- は任意定数)

※ ここでは ① 線形微分方程式の解は定数倍しても解となる，② 2つの解の和もまた解となる． という"重ね合わせ"を用いた．

→ x と $\dot{x}$ の $t=0$ での条件(初期条件)から C_+ と C_- は求まる．

→ 指数関数的に減少していくので"過減衰"と呼ばれる．

(ii) $\gamma = \omega_0$ のとき．(臨界減衰解)

式(1.37) は $\lambda_\pm = \lambda = -\gamma = -\omega_0$ となり解は $x = Ce^{-\omega_0 t}$ となってしまうが，「2階の微分方程式は2つの任意定数を含む」という数学的事実を用いると，改めて $x = A(t)e^{-\omega_0 t}$ とおいてみた方がよい。つまり $A(t)$ を 2つの任意定数を含んだ形にしてみるのだ。 このとき 式(1.32) に $x = A(t)e^{-\omega_0 t}$ を代入して，整理すると．

$$\ddot{A} = 0 \qquad (1.47)$$

が得られる。よって $\dot{A} = a_0$, $A = a_1 t + a_0$ (a_1, a_0 は任意定数) となるから，一般解は

$$x(t) = (a_1 t + a_0)e^{-\omega_0 t} \qquad (1.50)$$

となる．このときが最も速く減衰する。

番号が前後していますが気にしないでください．

(iii) $\gamma < \omega_0$ のとき (減衰振動解)

式(1.37) は．

$$\lambda_\pm = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \qquad (1.39)$$

となり 複素数解となる。オイラーの公式 $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$ を用いると

$$\begin{aligned} e^{\lambda_\pm t} &= e^{-\gamma t} \cdot e^{\pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t} \\ &= e^{-\gamma t} \cdot \left(\cos\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t \pm i \sin\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t\right) \qquad (1.41) \end{aligned}$$

と変形できる。

→ 今回は複素数解なので過減衰解と同様に $C_\pm$ を掛けて足し合わせるときに注意が必要。一般解は

$$x(t) = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t} \qquad (1.42)$$

となるが、$x(t)$ は実数でなければならない。換言するなら、$x(t)$ は複素共役 $x^*(t)$ に等しくなければいけない。

→ $\lambda_\pm^* = \lambda_\mp$ だから、$x^*(t) = C_+^* e^{\lambda_- t} + C_-^* e^{\lambda_+ t}$ (1.43) となり、

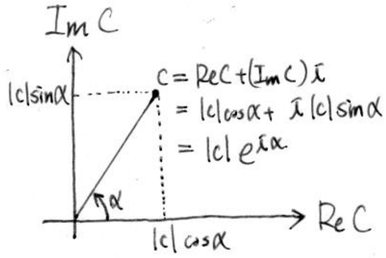
$x(t) = x^*(t) \Longrightarrow C_\pm = C_\mp^*$ が得られる。

→ $C_\pm \in \mathbb{R}$ としてしまうと、2つの任意定数は等しくなり、一般解を表すのに任意定数が足りない。

→ $C_\pm$ は複素数と考えるべき。

[重要] 一般の複素数はその絶対値と偏角を用いて $C = |C| e^{i\alpha}$ と表せる。

そこで $C_\pm = A e^{\pm i\alpha}$ とおいて、式(1.42)は、



$$\begin{aligned}
x(t) &= C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t} \\
&= A e^{i\alpha} e^{(-\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})t} + A e^{-i\alpha} e^{(-\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})t} \\
&= A(\cos\alpha + i\sin\alpha) e^{-\gamma t} \left(\cos\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t + i\sin\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t\right) \\
&\quad + A(\cos\alpha - i\sin\alpha) e^{-\gamma t} \left(\cos\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t - i\sin\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t\right) \\
&= 2A e^{-\gamma t} \left(\cos\alpha \cos\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t - \sin\alpha \sin\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t\right) \\
&= 2A e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t + \alpha\right) \qquad (1.44)
\end{aligned}$$

となりこれが一般解である。これは

$$x(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(C_+ e^{\lambda_+ t}\right) \qquad (1.45)$$

とも書ける。(これ覚えた方が楽ですね。)

1.4 強制振動

今度は外力が働くときの運動、すなわち強制振動を考える。
バネに付けた物体に力 $f(t)$ が働くときの運動方程式は、

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = f(t) \tag{1.62}$$

→ $f(t)$ は任意だが、周期的でない力もフーリエ級数（後述）を用いて

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \cos(\omega_i t + \alpha_i) \tag{1.64}$$

と表せるので 以下では $f(t) = F\cos\omega t$ として考えていく。
（線形微分方程式の解の重ね合わせから、$F_i\cos(\omega_i t+\alpha_i)$ のときの解を x_i とすると $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ となる）

⇓

以降でも頻繁に使うので覚えてもらいたい。それは「複素数の範囲に拡張して解を求め、最後に実数に戻す」というものだ。

→ $z = x + iy$ とする。解 $z(t)$ を求めにいく。(1.62) は

$$m\ddot{z} + 2m\gamma\dot{z} + m\omega_0^2 z = Fe^{i\omega t} \tag{1.65}$$

であり、実部と虚部は、

$$\left.\begin{aligned} &(\text{実})\quad m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = F\cos\omega t \\ &(\text{虚})\quad m\ddot{y} + 2m\gamma\dot{y} + m\omega_0^2 y = F\sin\omega t \end{aligned}\right\} \text{位相をずらせば同じ。}$$

⇓

z の一般解は「特解」（方程式は満たすが、任意定数が足りてない）と $F=0$ のときの解の和で与えられる。 $F=0$ のときは減衰振動解なので、これから特解を求めにいく。

⇓

『強制振動は時間が十分に経てば外力の振動数で運動する。』

→ $z(t) = Ae^{i\omega t}$ とおいてみる。式(1.65)に代入すると、

$$(-m\omega^2 + 2im\gamma\omega + m\omega_0^2)Ae^{i\omega t} = Fe^{i\omega t} \tag{1.68}$$

従って A が求まる。

$$A = \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} \tag{1.69}$$

従って変位と速度は

$$z(t) = \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} e^{i\omega t} \equiv \frac{1}{i\omega Z} F e^{i\omega t} \qquad (1.70)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{Z} F e^{i\omega t} \qquad (1.71)$$

$\left(Z \equiv \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)}{i\omega} \right.$: 力学的インピーダンス，力と速度の比((1.71)より))

zとZをまちがわないでね〜

⇓

最終目標は $x(t) = \mathrm{Re}(z(t))$ を求めることだから、$i\omega Z$ を絶対値と偏角を用いて表してみる。

$c = a + bi$ とすると $|c| = \sqrt{c \cdot c^*}$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad i\omega Z &= m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega) \\ &= \sqrt{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega) \times m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}\, e^{i\phi} \\ &= m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\, e^{i\phi} \qquad (1.73) \end{aligned}$$

$$\left(\tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

→ これより

$$z(t) = \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} e^{i(\omega t - \phi)} \qquad (1.75)$$

なので求めるべき一般解と速度は

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{Re}(z(t)) = \dfrac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \phi) & (1.76) \\ \dot{x}(t) = -\dfrac{F\omega}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \sin(\omega t - \phi) & (1.77) \end{cases}$$

となる。

⇓

強制振動の一般解は特解と減衰振動解を足し合わせればよいが、十分に時間が経った後の振る舞いならこの特解だけでよい。

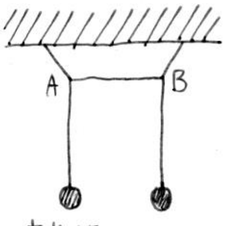
→ 最大振幅は、$\mathrm{Min}\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right)$ となる ω、つまり $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ で実現。

これは共振または共鳴という。

※ 教科書要参照 ：「1.5.2 エネルギー吸収」「1.6 単振動と複素平面での回転」

第2章 連成振動

2.1 2つの調和振動子の系



連成振り子.

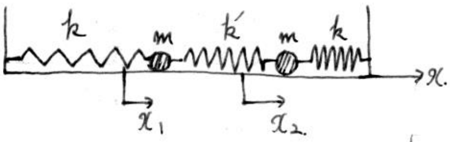
左図は連成振動子の典型である。

初めに一方を振る → 振動は次第に他方に移り、初めの振り子は止まる

→ 初めの振り子が再び振動し始める → 他方は止まっていく。→ ……

⇓

このように連成振動では、振動のエネルギーが行ったり来たりするのである。



本来、観測には適さないが定式化しやすいので左図のバネにつながれた物体の系で運動方程式を立てる.

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \end{cases} \qquad (2.1)$$

⇓

$\boxed{\text{和と差を作って解く}}$

和： $$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2) \qquad (2.5)$$

→ $\omega_1^2 = \dfrac{k}{m}$ として.

$$x_1 + x_2 = A\cos(\omega_1 t + \alpha) \qquad (2.7)$$

差： $$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -(k + 2k')(x_1 - x_2) \qquad (2.8)$$

→ $\omega_2^2 = \dfrac{k + 2k'}{m}$ として.

$$x_1 - x_2 = B\cos(\omega_2 t + \beta) \qquad (2.9)$$

→ (2.7) と (2.9) により

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{A}{2}\cos(\omega_1 t + \alpha) + \dfrac{B}{2}\cos(\omega_2 t + \beta) & (2.11) \\ x_2(t) = \dfrac{A}{2}\cos(\omega_1 t + \alpha) - \dfrac{B}{2}\cos(\omega_2 t + \beta) & (2.12) \end{cases}$$

と、2つの振動数の単振動の和で表せた。

⇓

一般に2つの異なる振動数をもった単振動の重ね合わせは"うなり"という現象を起こす。 $k' \ll k$ として解の様子を考える。

$k' \ll k$, $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$, $\omega_2^2 = \frac{k+2k'}{m}$ より　$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ とすると $\Delta\omega \ll \omega_1$ である。

このときの x_1 の時間変化を複素変数 z_1 の助けを借りて見てみる。

⇓

$$
\begin{cases}
x_1(t) = \mathrm{Re}[z_1(t)] & (2.13)\\
z_1(t) = z_A(t) + z_B(t) & (2.14)\\
z_A(t) = \frac{A}{2} e^{i(\omega_1 t+\alpha)} & (2.15)\\
z_B(t) = \frac{B}{2} e^{i(\omega_2 t+\beta)} = \frac{B}{2} e^{i[(\omega_1+\Delta\omega)+\beta]} & (2.16)
\end{cases}
$$

となり、これより

$$
z_1(t) = \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} e^{i(\Delta\omega t+\beta-\alpha)}\right) e^{i(\omega_1 t+\alpha)} \qquad (2.17)
$$

$$
\equiv C(t) e^{i(\omega_1 t+\alpha+\phi(t))} \qquad (2.18)
$$

$$
※\begin{cases}
C(t) e^{i\phi(t)} \equiv \frac{A}{2} + \frac{B}{2} e^{i(\Delta\omega t+\beta-\alpha)} \quad (\text{絶対値と偏角で表示})\\
C(t) = \sqrt{\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\cos(\Delta\omega t+\beta-\alpha) + i\frac{B}{2}\sin(\Delta\omega t+\beta-\alpha)\right)\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\cos(\Delta\omega t+\beta-\alpha) - i\frac{A}{2}\sin(\Delta\omega t+\beta-\alpha)\right)}\\
\quad = \frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(\Delta\omega t-\alpha+\beta)}\\
\tan(\phi(t)) = \dfrac{B\sin(\Delta\omega t-\alpha+\beta)}{A+B\cos(\Delta\omega t-\alpha+\beta)}
\end{cases}
$$

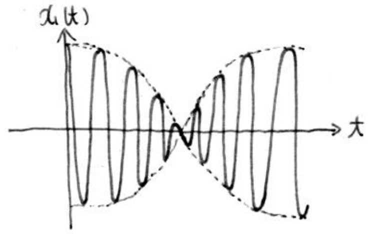
と表せる。この結果、

$$
x_1(t) = C(t)\cos[\omega_1 t+\alpha+\phi(t)] \qquad (2.21)
$$

となる。

⟶ $C(t)$ と $\phi(t)$ は角振動数 $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ でゆっくり変化するので、速い振動の1周期 $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ の間ではほぼ一定とみなせる。

⟶ $x_1(t)$ はほぼ ω_1 で振動し、その振幅 $C(t)$ は $\Delta\omega$ でゆっくりと増減する。



⇓

「うなり」

2.2 基準振動と基準座標

連成振動子の考察を続け、基準振動という概念を導入する。

式(2.11)、(2.12)は例えば$B=0$とすると、

$$x_1 = \frac{A}{2}\cos(\omega_1 t+\alpha) \quad , \quad x_2 = \frac{A}{2}\cos(\omega_1 t+\alpha)$$

となる。このように連成振動子の全体が1つの振動数で振動するとき、その様子を基準振動、その振動数を基準振動数と呼ぶ。

→ 今後明らかになるが、一般解はすべての基準振動の和で表せる。

⇓

変位の和と差に対して次のように新しい表記を導入する。

$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2) = \dfrac{A}{\sqrt{2}}\cos(\omega_1 t+\alpha) & (2.24) \\ Q_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2) = \dfrac{B}{\sqrt{2}}\cos(\omega_2 t+\beta) & (2.25) \end{cases}$$

→ $Q_1(t)$と$Q_2(t)$は基準座標と呼ばれる。基準座標の運動方程式は、

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 = -\omega_1^2 Q_1 & (2.26) \\ \ddot{Q}_2 = -\omega_2^2 Q_2 & (2.27) \end{cases}$$

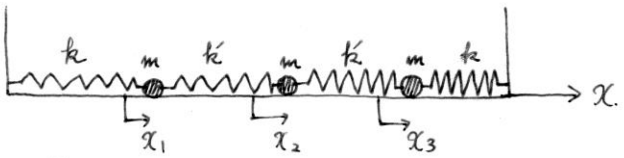
となりそれぞれ単振動型となる。

※ $E_{K.E.}$とUをQ_1とQ_2を経由して表記しても明らかだがx_1とx_2が従属であるのに対し、Q_1とQ_2は互いに独立である。

※ x_1とx_2をQ_1とQ_2で表すこと（運動を別の角度から見ること）は、座標回転に対応する。すなわち、x_1, x_2のままだとうなりのような複雑な運動をしているように見えるが、基準座標Q_1とQ_2に直すと単振動をしているのである。

2.3 3質点系

2質点系の連成振動が基準座標の和で書けることが分かったので、次に3質点系の連成振動を考える。



運動方程式は、

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) + k'(x_3 - x_2) \\ m\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_2) - kx_3 \end{cases} \tag{2.35}$$

→ 2質点系のときのように和と差をつくっても解けない。そこで一般の質点数でも解ける強力な方法を用いる。

→ その方法とは『この場合にも基準振動が現れることを想定し、$x_j = C_j e^{i\omega t}$ $(j=1,2,3)$ とおく』ことである。(ただし解を複素数にまで拡張している)

↑ ωは $j=1,2,3$ に共通。

式(2.35)に $x_j = C_j e^{i\omega t}$ に代入すると次のようになる。

$$\begin{cases} (k + k' - m\omega^2) C_1 - k' C_2 = 0 \\ -k' C_1 + (2k' - m\omega^2) C_2 - k' C_3 = 0 \\ -k' C_2 + (k + k' - m\omega^2) C_3 = 0 \end{cases} \tag{2.36}$$

→ C_j を求めればよいので、$C_j \neq 0$ の解の存在条件は、係数行列の行列式が0になること、すなわち、

$$\begin{vmatrix} k + k' - m\omega^2 & -k' & 0 \\ -k' & 2k' - m\omega^2 & -k' \\ 0 & -k' & k + k' - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.37}$$

$$\therefore \quad (k + k' - m\omega^2)^2 (2k' - m\omega^2) - 2(k + k' - m\omega^2) k'^2 = 0$$

$$\therefore \quad (k + k' - m\omega^2)\left[(k + k' - m\omega^2)(2k' - m\omega^2) - 2k'^2\right] = 0$$

これにより ω に対する条件は

$$\begin{cases} m\omega^2 = k + k' & (2.39) \\ \text{or} \\ (k+k'-m\omega^2)(2k'-m\omega^2) = 2k'^2 & (2.40) \end{cases}$$

であり、3つの基準振動数 ω が得られる.

$$\omega = \sqrt{\frac{k+k'}{m}} \qquad (2.41)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k+3k' \pm \sqrt{k^2-2kk'+9k'^2}}{2m}} \qquad (2.42)$$

$\Downarrow$

これら3つを小さい方から $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ とする。今度はそれぞれの ω での C_i の比を求める。簡単のため $k'=k$ として、ω を式(2.36)に代入すると C_i 間の関係式が得られる。

(i) $\omega_1 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{m}k} \Longrightarrow \sqrt{2}C_1 = C_2 = \sqrt{2}C_3$ より基準振動は

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \qquad (2.46)$$

(ii) $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \Longrightarrow C_1 = -C_3,\ C_2 = 0$ より基準振動は.

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \qquad (2.47)$$

(iii) $\omega_3 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{m}k} \Longrightarrow \sqrt{2}C_1 = -C_2 = \sqrt{2}C_3$ より基準振動は.

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) A_3 \cos(\omega_3 t + \alpha_3) \qquad (2.48)$$

$\Downarrow$

係数行列の固有値

右辺に現れた定ベクトルは各基準振動数(=固有値)に対する固有ベクトルであり、これらを

$$\mathbb{e}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad (2.49)$$

$$\mathbb{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad (2.50)$$

$$\mathbb{e}_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad (2.51)$$

と表す。

P13

さらに2質点系のように基準座標 $Q_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \alpha_i)$ $(i=1,2,3)$ を導入する。一般解は基準振動の重ね合わせで表せるから

$$(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} Q_i(t)\, \mathbb{e}_i \qquad (2.52)$$

と書ける。固有ベクトル表記にしないなら

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}Q_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}Q_2(t) + \frac{1}{2}Q_3(t) \\ x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}Q_1(t) \qquad\qquad - \frac{1}{\sqrt{2}}Q_3(t) \\ x_3(t) = \frac{1}{2}Q_1(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}Q_2(t) + \frac{1}{2}Q_3(t) \end{cases}$$

となる。（A_j, α_j $(j=1,2,3)$ は $x, \dot{x}$ の初期条件で定める）

ここまでの解法を整理すると、3質点系では、

①	運動方程式の記述	
②	$x_j = C_j e^{i\omega t}$ と仮定し代入	← 基準振動と想定
③	$C_j \neq 0$ の条件式から ω を求める。	← 固有値の確定
④	ω を求めたら C_j を求める	← 固有ベクトルの確定
⑤	足し合わせる	→「固有ベクトルと基準座標の積」の和が得られる。

となる。

⇓

ところで、固有ベクトルをなぜ上記の数値に設定したのか？（固有ベクトルは無数にある）

$$\mathbb{e}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \quad \mathbb{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathbb{e}_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

とすると

$$\mathbb{e}_1\cdot\mathbb{e}_1 = \mathbb{e}_2\cdot\mathbb{e}_2 = \mathbb{e}_3\cdot\mathbb{e}_3 = 1 \quad \Rightarrow \text{規格化}$$

$$\mathbb{e}_1\cdot\mathbb{e}_2 = \mathbb{e}_2\cdot\mathbb{e}_3 = \mathbb{e}_3\cdot\mathbb{e}_1 = 0 \quad \Rightarrow \text{直交性}$$

つまり固有ベクトルに規格直交性（直交性は元々あるので規格化を加えた）をもたせたのだ。

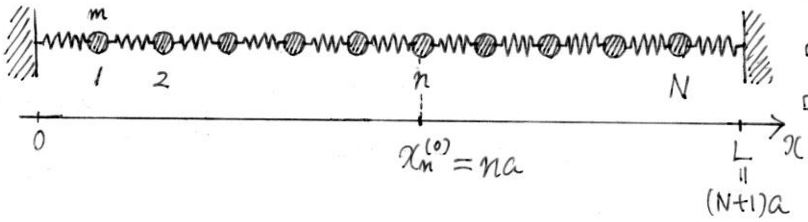
⇓

固有ベクトルの規格直交性により基準座標は次のように表せる。

$$\underline{Q_i(t) = (x_1, x_2, x_3)\cdot\mathbb{e}_i} \qquad (2.58)$$

第3章 弦の振動

3.1 N個の質点の連成振動



□ バネ定数 K (k と K は異なるので注意)

□ バネの自然長 $a-l$

□ 平衡状態でのバネの伸び l

上図のような系を考える。縦波と横波が生じ得るがまず縦波を考える。
縦波が生じているときの各質点の x 座標の時間変化は、

$$x_n(t) = \underbrace{x_n^{(0)}}_{\text{静止時の位置}} + \xi_n(t) = na + \xi_n(t) \qquad (3.1)$$

となる。最終目標は一般解 $x_n(t)$、つまり $\xi_n(t)$ を求めることである。

$\longrightarrow$ 前章と同じように N 次元ベクトルを用いて

$$\left(\xi_1(t),\ \xi_2(t),\ \cdots,\ \xi_n(t)\right) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{e}_j Q_j(t) \qquad (3.2)$$

$$Q_j(t) = A_j \cos(\omega_j t + \alpha_j) \qquad (3.3)$$

の形に求めることを目指す。

$\Downarrow$

前章を参考にすると、式(3.2)の形を求めるには、

(1) 運動方程式を導出して、

(2) 基準振動数 ω_j を求め、

(3) 各基準振動数に対する固有ベクトル $\mathbf{e}_j$ を決める

を行えばよい。

それでは一般解を求めていこう。

(1) 運動方程式

□ n番目の質点の速度と加速度：$\dot{x}_n(t) = \dot{\xi}_n(t)$，$\ddot{x}_n(t) = \ddot{\xi}_n(t)$

□ 〃 の左側のバネの弾性力 $F_{n,n-1}$：

$$x_n(t) - x_{n-1}(t) = na + \xi_n - (n-1)a - \xi_{n-1} = a + \xi_n - \xi_{n-1} \qquad (3.4)$$

より $$F_{n,n-1} = -k\left[a + \xi_n - \xi_{n-1} - (a - l)\right] = -k(\xi_n - \xi_{n-1} + l) \qquad (3.5)$$

□ n番目の質点の右側のバネの弾性力 $F_{n+1,n}$：

$$F_{n+1,n} = +k(\xi_{n+1} - \xi_n + l) \qquad (3.6)$$

⟶ 以上より求める運動方程式は．

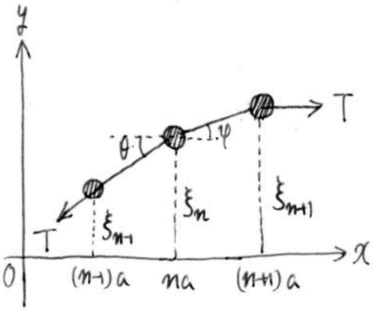
$$m\ddot{\xi}_n = F_{n,n-1} + F_{n+1,n} = k(\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}) \qquad (3.7)$$

（$n=1$ 及び $n=N$ は異なる）

※ ここで先ほど後回しにしていた横波について考察してみる．

このとき変位の方向を y方向とする。

n番目の質点の左側のバネによる y方向の力は．



$$F_{n,n-1} = T\sin\theta = T \cdot \frac{\xi_{n-1} - \xi_n}{\sqrt{a^2 + (\xi_n - \xi_{n-1})^2}}$$

$$\simeq \frac{T}{a}(\xi_{n-1} - \xi_n) \qquad (|\xi_n - \xi_{n-1}| \ll a \text{ により分母} \fallingdotseq a)$$

このとき，バネの長さも $\sqrt{a^2 + (\xi_n - \xi_{n-1})^2} \simeq a$ となるので $T \fallingdotseq kl$。

右側のバネによる力も同様の計算をしてあげて，運動方程式を立てると次のようになる。

$$m\ddot{\xi}_n = \frac{T}{a}(\xi_{n-1} - 2\xi_n + \xi_{n+1}) = k \cdot \frac{l}{a} \cdot (\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}) \qquad (3.9)$$

これは $K' = K \cdot \frac{l}{a}$ とすると縦波の運動方程式と同型である。

⟶ 横波の変位は，縦波の変位の式に含まれる K を $K \cdot \frac{l}{a}$ に置換することで得られる。

さて、もう1度縦波の議論に戻る。

(2) 基準振動数 ω_J を求める。

→ と、その前に....。さっきの式(3.7)は $n=1, N$ では少し異なる。

→ そこで $n=1,2,\cdots,N$ で(3.7)が成り立つように、"0番目"と"N+1番目"の質点を導入する。ただし、このとき $x_0(t)=0$, $\xi_0(t)=0$, $x_{N+1}(t)=(N+1)a$, $\xi_{N+1}(t)=0$ である。(要はかべ)

→ こうして N個の微分方程式(3.7)と2個の条件式 $\xi_0=\xi_{N+1}=0$ が得られ、これらを用いて ω_J 等を求めていく。このとき $\xi_0=\xi_{N+1}=0$ を「境界条件」という。

⇓

3質点系のときと同様に、「式を複素数まで拡張」し、「基準振動が現れることを想定」して、$\xi_n(t)=\eta_n e^{i\omega t}$ とおく。

□ 境界条件 : $\xi_0=\xi_{N+1}=0$ より $\eta_0=\eta_{N+1}=0$ (3.12)

□ (連立)微分方程式 : $-K\eta_{n-1}+2K\eta_n-K\eta_{n+1}=m\omega^2\eta_n$ (3.13)

↳ この置換で連立代数方程式になる.

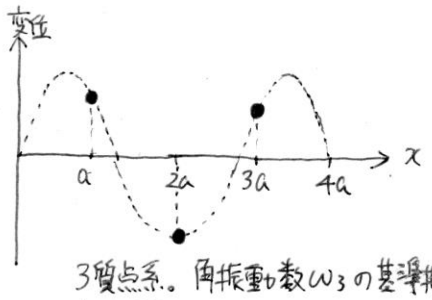
→ 3質点系はここから「η_n $(n=1,2,3)\neq 0$ となる条件」として係数行列の行列式を用いたが、今回は困難。

⇓

教科書P50〜P52「2.3.6 固有ベクトル再考」にもあるように、基準振動の様子は座標方向で正弦波のようである。
η_n は 3質点系での C_n と同様、固有ベクトルに相当するから、ここでは η_n は波のようになると想定して

$$\eta_n = Ce^{ikna} \qquad (3.14)$$

とおく。($K\neq k$ に注意)



3質点系。角振動数ω_3の基準振動の固有ベクトルは

$e_3=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{3}{4}\pi,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{6}{4}\pi,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{9\pi}{4}\right)$

となっている。

$$\eta_{n\pm1} = Ce^{ik(n\pm1)a} \qquad (3.15)$$

に注意すると、n番目の方程式は、

$$-\kappa e^{ik(n-1)a} + (2\kappa - m\omega^2)e^{ikna} - \kappa e^{ik(n+1)a} = 0 \qquad (3.16)$$

$$\therefore \quad 2\kappa - m\omega^2 - 2\kappa\cos ka = 0 \qquad (3.17)$$

が得られる。これにより基準振動数はkを用いて、

$$m\omega^2 = 2\kappa(1-\cos ka) = 4\kappa\left(\sin\frac{ka}{2}\right)^2 \qquad (3.18)$$

$$\therefore \quad \omega = 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right| \qquad (3.19)$$

→ こうして ω（いわゆる固有値）が得られたわけだが…。

→ kが与えられないと ωもηも定まらないのである。

⇓

3質点系にはなかったkという概念を、N質点系では「境界条件」から求めていく。

→境界条件 $\eta_0 = \eta_{N+1} = 0$ より $\eta_0 = Ce^{i0} = C = 0 \ \therefore C = 0$ とすると、これはつまらない解となってしまう。

→ そこで式(3.13)の線形性から、「k, $-k$の解の和」もまた解になることを利用し、$\eta_n = C_+e^{ikna} + C_-e^{-ikna}$ とおいてみる。

→ $\eta_0 = 0$ より $C_+ + C_- = 0 \quad \therefore \ C_- = -C_+$ を得る。

n番目の変位は、

$$\eta_n = C_+e^{ikna} - C_+e^{-ikna} = 2iC_+\sin(kna) \qquad (3.20)$$

これを $\eta_{N+1} = 0$ に代入する。

$$2iC_+\sin[k(N+1)a] = 0$$

$$\therefore \quad ka(N+1) = j\pi \quad (j\text{は任意の整数})$$

以上をまとめる。N質点系では.

(1) j番目の基準振動（n番目の質点の振動ではない）は実数 $k = k_j$ を用いて表され.
その k_j の値は

$$k_j = \frac{j\pi}{a(N+1)} \quad (j \in \mathbb{Z}) \qquad (3.22)$$

(2) そのときの基準振動数は

$$\omega_j = 2\sqrt{\frac{K}{m}}\sin\left|\frac{j\pi}{2(N+1)}\right| \qquad (3.23)$$

(3) 各質点の振幅 $\eta_n^{(j)}$ は.

$$\eta_n^{(j)} = 2i C_+ \sin(k_j n a) \qquad (3.24)$$

したがって各質点の運動は.

$$\xi_n^{(j)}(t) = 2i C_+ \sin(k_j n a)\, e^{i\omega_j t} \qquad (3.25)$$

最終的に,実数に戻すと,「j番目の基準振動でのn番目の質点の変位」は.

$$\xi_n^{(j)}(t) = A_j' \sin(k_j n a)\cos(\omega_j t + \alpha_j) \qquad (3.26)$$

（$2iC_+ \equiv A_j' e^{i\alpha_j}$ として実数に戻した。）

を得る。（ただし一般解ではない。あくまで基準振動解。）

⇓

ここで基準振動の総数について考えてみる。

$j=0 \Rightarrow \xi_n^{(0)}=0 \longrightarrow$ つまらない解

$j=1 \sim j=N \longrightarrow$ 基準振動得られる。

$j=N+1 \longrightarrow$ つまらない解.

$j>N+1$, $j<0 \longrightarrow j=1 \sim j=N$ と全く同じ式が得られるのでノーカウント。

$\longrightarrow$ 基準振動はN個（全て異なっている。）

一般解は基準振動解の線形結合で表せるから、

$$\begin{cases} \xi_n(t) = \sum_{j=1}^{N} A_j' \sin(k_j n a)\cos(\omega_j t + \alpha_j) \\ k_j = \dfrac{j\pi}{a(N+1)} \\ \omega_j = 2\sqrt{\dfrac{K}{m}}\sin\left(\dfrac{k_j a}{2}\right) \end{cases} \tag{3.28}$$

となる。（目標達成！！！） （もちろん初期条件で A_j' と α_j は求める）

3.2 固有ベクトルと基準座標

さてさて、一般解が得られたので、今度はそれを「固有ベクトルと基準座標の積」の形にしてみる。例によってN次元ベクトルにする。

$$\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} A_j' \cos(\omega_j t + \alpha_j)\left(\sin(k_j a), \sin(2k_j a), \cdots, \sin(Nk_j a)\right) \tag{3.30}$$

$\longrightarrow$ これを $\boldsymbol{\xi}(t) = \sum_{j=1}^{N} Q_j(t)\boldsymbol{e}_j$ にする。N次元固有ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ は規格化しておくとよい。

$\longrightarrow$ そこで $\boldsymbol{e}_j = C_j\left(\sin(k_j a), \sin(2k_j a), \cdots, \sin(Nk_j a)\right)$ とおき、

「規格化定数」C_j を調節して $|\boldsymbol{e}_j| = 1$ にする。

$$\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_j = C_j^2\sum_{n=1}^{N}\sin^2(nk_j a) = C_j^2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\left[1-\cos(2nk_j a)\right]$$

$$= C_j^2\left[\frac{N}{2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\left(e^{2ni k_j a} - e^{-2ni k_j a}\right)\right]$$

等比数列

$$= C_j^2\left(\frac{N}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{2ik_j a} - e^{2(N+1)ik_j a}}{1-e^{2ik_j a}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{-2ik_j a} - e^{-2(N+1)ik_j a}}{1-e^{-2ik_j a}}\right)$$

$$= \frac{N+1}{2}C_j^2. \tag{3.32}$$

よって規格化定数は $e_j \cdot e_j = 1$ より

$$C_j = \sqrt{\frac{2}{N+1}}$$

とすればよい。

⇓

これに伴い、$\sqrt{\frac{N+1}{2}} A'_j \cos(\omega_j t + \alpha_j) \equiv A_j \cos(\omega_j t + \alpha_j) = Q_j(t)$ (3.33)

とすると、一般解は固有ベクトルと基準座標を用いて、

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^{N} Q_j(t) e_j \quad (3.34)$$

となる。

⇓

例によって、固有ベクトルの直交性を確認する。

と言いたいところだが、割愛。大した計算ではないので（だけどスペースとる）

教科書P64,65を参照してもらいたい。結果を述べると、固有ベクトルの

直交性は保証されていて、

$$e_j \cdot e_l = \delta_{j,l} \quad (3.47)$$

と表せる。$\delta_{j,l}$は「クロネッカーのデルタ」といい、$j=l$のとき$\delta_{j,l}=1$、

$j \neq l$のとき$\delta_{j,l}=0$となる大変便利な関数である。

→ 直交性を用いると、基準座標は、もともとの座標系で表せる。

$$Q_j(t) = \xi(t) \cdot e_j \quad (3.49)$$

→ (3.34)に(3.49)を代入してみると、 （$(e_j)_n$はe_jの第n成分）

$$\xi_n(t) = \sum_{j=1}^{n} (\xi(t) \cdot e_j)(e_j)_n = \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \xi_m(t)(e_j)_m(e_j)_n$$
$$= \sum_{m=1}^{N} \xi_m(t) \sum_{j=1}^{N} (e_j)_m (e_j)_n \quad (3.50)$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{N} (e_j)_m (e_j)_n = \delta_{m,n} \quad (3.51)$$

であればよく、これを「完全性」という。N個の質点のどのような運動も

基準振動の和で完全に記述できることが保証されるのだ。

3.5 弦

(教科書 3.3「ピアノの弦の運動」〜 3.4「弦の強制振動」は割愛したが、読んでおくことを強く勧める。)

まずある程度 N の大きな "鎖" の ゆっくりした 振動を考える。

$\omega_j \propto j$ なので N に比べて j が 十分に小さいときの 基準振動 のみの重ね合わせで

できる振動である。

$\longrightarrow$ この場合, 隣り合った質点の変位はほとんど等しいので $\xi_n(t)$ を $\xi(x,t)$

と書いて, 平衡位置 $x=na$ の連続関数 とみなしてよい。

この $\xi(x,t)$ に関する 運動方程式 を求める。 縦波の場合の運動方程式 (3.7)

$$m\ddot{\xi}_n = k(\xi_{n-1} - 2\xi_n + \xi_{n+1})$$

で 左辺の 2階時間微分は,

$$\ddot{\xi}_n(t) = \frac{d^2}{dt^2}\xi_n(t) \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi(x,t) \qquad (3.95)$$

一方, 右辺の $\xi_{n\pm1}(t)$ は,

$$\xi_{n\pm1} \longrightarrow \xi(a(n\pm1), t) = \xi(x\pm a, t)$$

$$\simeq \xi(x,t) \pm a\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2} \pm \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\partial^3\xi(x,t)}{\partial x^3} + \cdots$$

このテイラー展開の a^4 以上の項を無視すると,

$$\xi_{n-1} - 2\xi_n + \xi_{n+1} \simeq a^2\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2} \qquad (3.97)$$

となり 運動方程式は,

$$m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi(x,t) = ka^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi(x,t) \qquad (3.98)$$

弦を伝わる 波の速度 v を用いて $\frac{ka^2}{m} = v^2$ と書けるから,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi(x,t) = v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi(x,t) \qquad (3.99)$$

を得る。 これを (1次元の) 波動方程式 という。

$N' \ll N$ として 基準振動の和を N' までに制限した鎖の解

$$\xi(x,t) = \sum_{j=1}^{N'} A_j \sin(k_j x)\cos(\omega_j t + \alpha_j) \qquad (3.100)$$

は この波動方程式の解の1つである。

P22.　全長Lを一定にしたまま，$N \to \infty$，$a = \frac{L}{N+1} \to 0$（質点数を増やし、間隔を縮める）とする。また，線密度ρは一定値$\frac{m}{a}$に保つ。

この$N \to \infty$，$a \to 0$の極限では，(3.96)でのテイラー展開での近似は正当化される。$N \to \infty$とすると$N' \to \infty$とできるから，波動方程式の解は，

$$\begin{cases} \xi(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j' \sin(k_j x) \cos(\omega_j t + \alpha_j) & (3.103) \\ k_j = \frac{\pi}{L} j & (3.104) \\ \omega_j = v k_j & (3.105) \end{cases}$$

である。これは，波動方程式に境界条件$\xi(0,t) = \xi(L,t) = 0$を付けたときの一般解である。

$\Downarrow$

鎖の質点数を無限大にすると弦となる。

このとき鎖の各点の変位を表すN次元ベクトル$\boldsymbol{\xi}(t)$は弦の変位を表すxとtの関数$\xi(x,t)$となった。

さらに，鎖の連成振動のj番目の固有ベクトル$\boldsymbol{e}_j$はxの関数$e_j(x)$になり，固有関数とよばれるようになる。

$\longrightarrow$ 規格直交化した固有関数系をつくり、弦の変位$\xi(x,t)$を固有関数と基準座標を用いて表していく。

・固有ベクトルの規格直交性を表す式

$$\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l = \frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^{N} \sin(k_j n a) \sin(k_l n a) = \delta_{j,l}$$

は，$N \to \infty$，$a \to 0$の極限で区間$0 \leqq x \leqq L$における積分として表せる。

微小区間dx中に含まれるnの数は$\frac{dx}{a}$個だから，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l &= \frac{2}{N+1} \int_0^L \frac{dx}{a} \sin(k_j x) \sin(k_l x) \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \sin(k_j x) \sin(k_l x)\, dx \\ &= \delta_{j,l} \qquad (3.107) \end{aligned}$$

したがって j 番目の固有関数として

$$e_j(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_j x) \tag{3.108}$$

を定義すると、$e_j(x)$ と $e_l(x)$ は次の規格直交性を満たす.

$$\int_0^L e_j(x) e_l(x)\, dx = \delta_{j,l} \tag{3.109}$$

→ これを用いると……。

$$\xi(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} e_j(x) Q_j(t) \tag{3.110}$$

$$Q_j(t) = A_j \cos(\omega_j t + \alpha_j) \tag{3.111}$$

となる。また 逆に 弦の変位が与えられたとき、基準座標 $Q_j(t)$ を求める式は.

$$Q_j(t) = \int_0^L \xi(x,t) e_j(x)\, dx \tag{3.112}$$

である。

3.4 波動方程式の解法

前述の波動方程式の解 は 境界条件を付けたが、ここでは、境界条件を付けない場合の 波動方程式の解法 を学んでいく。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi(x,t) - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi(x,t) = 0 \tag{3.99}$$

(1) 因数分解法

(3.99) を 次のように"因数分解"する。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} \mp v\frac{\partial}{\partial x}\right)\xi(x,t) = 0 \quad (\text{複号同順}) \tag{3.113}$$

この 結果、$\xi(x,t)$ が 波動方程式を 満たすには.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\xi(x,t) = 0 \tag{3.114}$$

または

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)\xi(x,t) = 0 \tag{3.115}$$

となればよい。 この 1階の 偏微分方程式 はすぐに 解ける。

式(3.114)の場合には

$$\xi(x,t) = f(x - vt) \tag{3.116}$$

式(3.115)の場合には

$$\xi(x,t) = g(x + vt) \tag{3.117}$$

となる。ここで f と g は微分可能な任意の関数である。この2つの解の和

$$\xi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt) \tag{3.118}$$

もやはり波動方程式の一般解である。

⟶ $f(x - vt)$ は右向きの進行波解，$g(x + vt)$ は左向きの進行波解という。

⟶ この因数分解法はダランベールの解法ともいう。

(2) 変数分離法

波動方程式の解が変数 x と t それぞれの関数の積で $\xi(x,t) = X(x)T(t)$ と書けると仮定する。波動方程式に代入すると

$$X(x)\frac{d^2}{dt^2}T(t) = v^2 T(t)\frac{d^2}{dx^2}X(x) \tag{3.119}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{T(t)}\frac{d^2}{dt^2}T(t) = \frac{v^2}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) \tag{3.120}$$

⟶ 各辺がそれぞれ他方の変数に依存しない。それでいて両辺が等しい。したがって両辺はある一定値となっている。それを $-v^2k^2$ とすると

$$\begin{cases} \ddot{T}(t) = -v^2k^2 T(t) & (3.121) \\ \ddot{X}(x) = -k^2 X(x) & (3.122) \end{cases}$$

⟶ 単振動型ゆえ，解は $T(t) \propto e^{\pm ikvt}$，$X(x) \propto e^{\pm ikx}$ である。よって

$$\begin{aligned} \xi(x,t) &= \sum_k \left(A_k e^{ik(x-vt)} + A_k^* e^{-ik(x-vt)} + B_k e^{ik(x+vt)} + B_k^* e^{-ik(x+vt)}\right) \\ &= 2\sum_k \left\{|A_k|\cos[k(x-vt)+\alpha_k] + |B_k|\cos[k(x+vt)+\beta_k]\right\} \end{aligned} \tag{3.123}$$

以上の式変形は、X,Tの積4通りが実関数になるよう組み合わせ切えた。

この解を因数分解法での進行波解と比較すると

$$f(x) = 2\sum_k |A_k| \cos(kx + \alpha_k) \qquad (3.124)$$

$$g(x) = 2\sum_k |B_k| \cos(kx + \beta_k) \qquad (3.125)$$

であれば解は一致する。

⟶ 任意の微分可能な関数 f や g はさまざまな「波数」k の三角関数の和で表せる。

3.5 波の透過と反射

進行波の透過や反射について学ぶ。端が固定された弦を考える前に、より一般的な状況として、2つの弦が $x=0$ でつながれていて、$x<0$ での波の速さが v_1，$x>0$ での速さが v_2 の場合を考える。（固定端は一方の速さを0にすればよい）

波動方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v_1^2 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (x<0) & (3.126) \\ \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v_2^2 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (x>0) & (3.127) \end{cases}$$

今左側から $\xi(x,t) = f_1(x - v_1 t)$ (3.128)

という波が入射してくる場合を考える。

⇓

この波が $x=0$ に到達すると、$x>0$ を進む透過波

$$f_2(x - v_2 t) \qquad (3.129)$$

と、入射方向に戻る反射波

$$g_1(x + v_1 t) \qquad (3.130)$$

ができる。これらの大きさは、$x=0$ での境界条件で決まる。

⇓

境界条件は、$x=0$で (i) 弦がつながっていること，(ii) 左右の張力が等しいことである。これらを式で表す。

$x<0$では 2つの波 f_1とg_1が共存し、$x>0$では 1つの波f_2しかないから、条件(i)と(ii)を表す式はそれぞれ、($x=0$を代入するだけ)

$$f_1(-v_1t)+g_1(v_1t)=f_2(-v_2t) \quad (3.131)$$

$$f_1'(-v_1t)+g_1'(v_1t)=f_2'(-v_2t) \quad (3.132)$$

← xで微分 (勾配ゆえ)

となる。((3.132)は (ii)が「$x=0$での勾配が連続である」ということから得られる。)

⇓

式(3.132)を時間tで積分すると

$$-\frac{1}{v_1}f_1(-v_1t)+\frac{1}{v_1}g_1(v_1t)=-\frac{1}{v_2}f_2(-v_2t)+C \quad (3.133)$$

入射波がないときは、全ての波がないから $C=0$。

⟶ 式(3.131)と(3.133)を用いると、透過波と反射波は、入射波を用いて

$$\begin{cases} \text{反射波}: g_1(v_1t)=\dfrac{v_2-v_1}{v_1+v_2}f_1(-v_1t) & (3.134)\\ \text{透過波}: f_2(-v_2t)=\dfrac{2v_2}{v_1+v_2}f_1(-v_1t) & (3.135)\end{cases}$$

となる。

⟶ 光のように屈折率を $n\equiv\dfrac{v_1}{v_2}$ と定義すると

$$\begin{cases} \text{反射波}: g_1(x)=\dfrac{1-n}{1+n}f_1(-x) & (3.136)\\ \text{透過波}: f_2(x)=\dfrac{2}{1+n}f_1(nx) & (3.137)\end{cases}$$

となる。

⇓

この境界での接続の極限として、固定端と自由端がある。

P27

(1) 固定端 ： $x>0$ には質量無限大の弦があり、動かないとすればよい。

$v_2 \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}} \to 0$ となり屈折率 $n \to \infty$ となる。よって

反射波 $g_1(x) = -f_1(-x)$ （，透過波 $f_2(x) = 0$） (3.138)

高校で学習した「上下の反転」

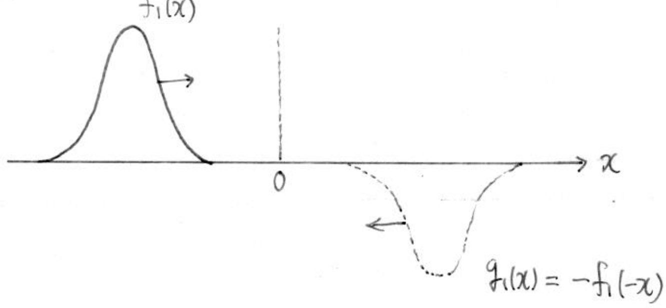
(2) 自由端 ： $x>0$ の弦の線密度を 0 にすればよい。（とは言いつつ困難。気柱など。）

$n=0$ となるので

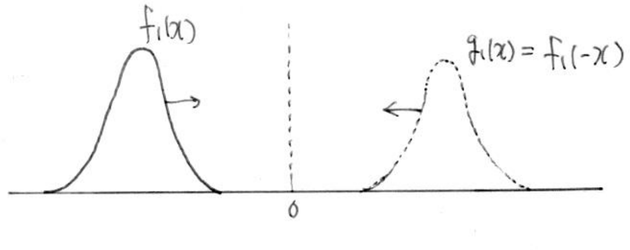
反射波 $g_1(x) = f_1(-x)$ ，（透過波 $f_2(x) = 2f_1(0)$） (3.139)

※ 教科書 P91～P92 の「3.7.2 両端が固定された弦」についても読んでおくことを勧める。

(1) 固定端



(2) 自由端



第4章 フーリエ級数・フーリエ積分

ふう…。やっとここまできましたね。今までの章での考察から、基準振動は三角関数で表され、基準振動の重ね合わせでどんな弦の状態でも表せることが分かったと思います。つまり、任意の連続関数は三角関数で表せる。これは、数学では「フーリエ級数の定理」として知られています。この章では、このフーリエ級数と、関数の変域を無限大にしたときのフーリエ積分について触れていきます。フーリエ積分は、第6章の回折を理解するのに役立ちます。（急にですます調になったあたり疲れが見えてる。）

4.1 フーリエ級数

$x=0$ から $x=L$ まで張られた弦の振動は次のようになることを前章で示した。

$$\xi(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \sin(k_j x)\cos(\omega_j t + \alpha_j), \quad k_j = \frac{\pi}{L} j$$

特に $t=0$ とすれば、 $$\xi(x,0) = \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos\alpha_j)\sin(k_j x)$$

である。境界条件 $\xi(0,0)=\xi(L,0)=0$ さえ満たせば任意の初期条件を設定することができる。

⟶ 任意の連続関数が $\sin(k_j x)$ の和で表せる。

定理

$-l \leq x \leq l$ の範囲で定義された有界な関数 $f(x)$ があり、極値をとるのは有限回であれば、

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right] \qquad (4.4)$$

と表せる。これをフーリエ級数という。

※ 関数は不連続な点がある区分的に連続なものであってもよい。不連続な点では、右辺は平均値になる。

※ 関数に課せられた条件はディリクレ条件という。

ある関数の有限区間が無限個の三角関数の和で表せる。

フーリエ級数は一種の無限次元での座標変換である。

N 質点系の変位をベクトルで表してみる。

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \xi_1(t)\acute{\boldsymbol{e}}_1 + \xi_2(t)\acute{\boldsymbol{e}}_2 + \cdots + \xi_N(t)\acute{\boldsymbol{e}}_N = \sum_{j=1}^{N} Q_j(t)\boldsymbol{e}_j \tag{4.8}$$

つまり $\acute{\boldsymbol{e}}_n = (0,\cdots 0,\underset{(n\text{番目})}{1},0\cdots,0)$ を $\boldsymbol{e}_n = \sqrt{\frac{2}{N+1}}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{N+1}\right),\ \sin\left(\frac{2n\pi}{N+1}\right),\ \cdots,\ \sin\left(\frac{Nn\pi}{N+1}\right)\right]$

へと変換している。 $N\to\infty$ とすると、鎖 → 弦，N 次元変位ベクトル → 無限次元変位ベクトル

つまり $\boldsymbol{\xi}(t)\to\xi(x,t)$。 そしてこの無限次元ベクトル $\xi(x,t)$ を弦の固有ベクトルで展開したものがフーリエ級数である。

以下では、関数 $f(x)$ を無限次元ベクトルとみなすとき、$\boldsymbol{f}$ と表記。

⇓

フーリエ級数のとき、固有ベクトル $\boldsymbol{e}_i$，すなわち固有関数は次の $e_i(x)$ となる。

$$
\begin{aligned}
&e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \\
&e_1(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right), \quad e_2(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&e_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad e_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

これらに対して内積を次のように定義すると、これらの固有関数は規格直交性を満たす。

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j \equiv \int_{-l}^{l} e_i^*(x)\,e_j(x)\,dx = \delta_{i,j} \tag{4.16}$$

($e_i^*(x)$ は $e_i(x)$ の複素共役)

□ 前述した通り、ベクトル $\boldsymbol{f}$ が規格直交化された固有ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ により

$$\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\boldsymbol{e}_i$$

と表されているなら、展開係数 c_i は、

$$c_i = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{f}$$

と表せた。

全く同様にして、固有関数を用いて表したフーリエ級数の展開係数も、固有関数の規格直交性を用いて表せる。

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right]$$

$$= \sqrt{\frac{l}{2}} A_0 e_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{l} \left[A_n e_{2n-1}(x) + B_n e_{2n}(x) \right] \qquad (4.17)$$

$$e_0 \cdot f = \int_{-l}^{l} dx\, e_0^*(x) f(x) = \sqrt{\frac{l}{2}} A_0 = \sqrt{2l} \cdot \frac{A_0}{2} \qquad (4.18)$$

$$e_{2n-1} \cdot f = \sqrt{l} A_n \qquad (4.19)$$

$$e_{2n} \cdot f = \sqrt{l} B_n \qquad (4.20)$$

より、

$A_0/2$ は $f(x)$ の平均値.

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_{-l}^{l} dx\, e_0^*(x) f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} dx\, f(x) \qquad (4.21)$$

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^{l} dx\, e_{2n-1}^*(x) f(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} dx \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) f(x) \qquad (4.22)$$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^{l} dx\, e_{2n}^*(x) f(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} dx \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) f(x) \qquad (4.23)$$

$$\Downarrow$$

ここでの事実をいくつかまとめる。

数学では区間は有限だが、「波」という分野では $(-\infty, \infty)$ でもよい。

(1) $f(x)$は本来、$-l \leq x \leq l$ で定義されているが、フーリエ級数表示 (4.17) の右辺には、任意の実数 x を代入できる。このように $f(x)$ の定義域を $(-\infty, \infty)$ に拡張すると、$f(x)$ は周期 $2l$ の周期関数となる。つまり、$f(x+2l) = f(x)$.

(2) 奇関数、つまり $f(x) = -f(-x)$ のとき、$A_0 = A_1 = \cdots = 0$ で B_n のみ残る.

(3) 偶関数、つまり $f(x) = f(-x)$ のとき、$B_0 = B_1 = \cdots = 0$ で A_n のみ残る.

三角関数は、指数関数で表せる。したがって、固有関数も指数関数で表せる。

$\cos kx = \mathrm{Re}(e^{ikx})$, $\sin kx = \mathrm{Im}(e^{ikx})$

$$\longrightarrow \quad e_n = e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{ik_n x} \qquad (4.24)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (4.25)$$

とすると、

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{\sqrt{2l}} e^{ik_n x} \qquad (4.26)$$ と書ける。

$$C_n = e_n \cdot f = \int_{-l}^{l} e_n^* f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_{-l}^{l} e^{-ik_n x} f(x)\, dx \qquad (4.29)$$

↑規格直交性から。

$\longrightarrow$ これにより (4.21), (4.22), (4.23) が (4.29) の1つで表せる。

4.2 完全性とδ関数

ディリクレ条件を満たす関数は、フーリエ級数で式(4.26)のように表せる。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e_n(x). \qquad \left(e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{ik_n x}\right)$$

$\longrightarrow$ 右辺の和で $f(x)$ は"完全"に表される。

$\longrightarrow$ この完全性が保証される条件を考える。

直交性から得られた式 (4.29) を (4.26) に代入して和と積分の順序を入れ替えてみる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-l}^{l} e_n^*(y) f(y)\, dy \quad e_n(x) \\ &= \int_{-l}^{l} dy \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n^*(y)\, e_n(x)\, f(y) \\ &\equiv \int_{-l}^{l} dy\, \delta(x-y)\, f(y) \qquad (4.30) \end{aligned}$$

ここで $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n^*(y)\, e_n(x) = \delta(x-y) \qquad (4.31)$

これは $f(x)$ とは無関係な関数。

つまり、フーリエ級数の定理が成り立つには、e_nが このような関数$\delta(x-y)$をもたらすことが必要。

⟶ この関数をδ関数（デルタ関数）と呼ぶ。

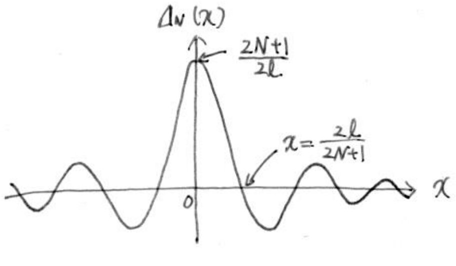
⟶ 完全性はひとまず置いといて、このδ関数は何なのか調べてみる。

$$
\begin{aligned}
\delta(x-y) &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n^*(y)\, e_n(x) \\
&= \frac{1}{2l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[i k_n (x-y)\right] \\
&= \frac{1}{2l} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \exp\left[i \cdot \frac{\pi}{l}(x-y)n\right]
\end{aligned}
$$

等比数列

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2l} \lim_{N\to\infty} \frac{\exp\left[-i\cdot\frac{\pi}{l}(x-y)N\right] - \exp\left[i\cdot\frac{\pi}{l}(x-y)(N+1)\right]}{1-\exp\left[i\cdot\frac{\pi}{l}(x-y)\right]} \\
&= \frac{1}{2l} \lim_{N\to\infty} \frac{\exp\left[-i\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}(x-y)\right] - \exp\left[i\left(N+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{l}(x-y)\right]}{\exp\left[-i\cdot\frac{\pi}{2l}(x-y)\right] - \exp\left[i\cdot\frac{\pi}{2l}(x-y)\right]} \\
&= \frac{1}{2l} \lim_{N\to\infty} \frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{l}(x-y)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2l}\cdot(x-y)\right]} \\
&\equiv \lim_{N\to\infty} \Delta_N(x-y) \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

ここで $$\Delta_N(x) \equiv \frac{1}{2l}\cdot\frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{l}x\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)} \qquad (4.33)$$



$N\to\infty$とすると、$\Delta_N(x) \to \delta(x)$となり

$$
\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases} \qquad (4.34)
$$

となる。

また δ関数はピークのまわりで積分すると1になる（教科書P104）

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\,dx = 1 \qquad (\varepsilon>0) \qquad (4.35)$$

$$\Downarrow$$

δ関数を含む積分は容易に実行できる。これにより任意のf(x)で(4.30)が成り立つことをただちに示せる。δ(x−y)は x=y 以外で0なので

$$\int_{-l}^{l} dy\,\delta(x-y)f(y) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} dy\,\delta(x-y)f(y)$$

$x-\varepsilon \leq y \leq x+\varepsilon$ だけ残る。

$$= f(x) \qquad (4.36)$$

となる。

$$\Downarrow$$

話を戻して、完全性が保証されるための条件は、

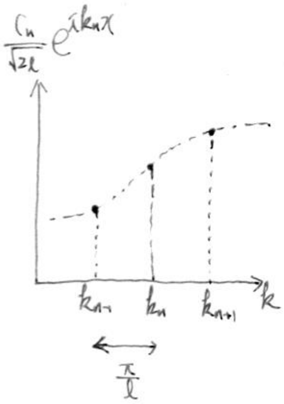
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n^*(y)\,e_n(x) = \delta(x-y)$$

である。

4.3 フーリエ積分

$-l<x<l$ の関数はフーリエ級数で表せる。$l\to\infty$ とすると、$-\infty<x<\infty$ での関数 $f(x)$ を指数関数 e^{ik_nx} の和で表せる。この極限で和はどうなるのだろうか？

有限区間： $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2l}} e^{ik_nx}.$



$k_n = \frac{n\pi}{l}$ より $\Delta k_n \equiv k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{l}$。

$[k, k+dk]$ では高さはほぼ不変で近似でき、幅 dk には $\frac{dk}{\frac{\pi}{l}}$ 個の k_n が有る。その値（面積？）は近似的に

$$\frac{c(k)}{\sqrt{2l}}\,e^{ikx}\,\frac{l}{\pi}\,dk$$

となる。

$l\to\infty$, $dk\to 0$ の極限により、$f(x)$のフーリエ級数表示は、すべての区間での和として、次のように積分表示できる. $f(x)$の定義域は$(-\infty,\infty)$。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{c(k)}{\sqrt{2l}}e^{ikx}\frac{l}{\pi}dk \equiv \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(k)e^{ikx}dx}\qquad(4.55)$$

$$\left(g(k)\equiv\sqrt{\frac{l}{\pi}}\,c(k)\qquad(4.56)\right)$$

これを$f(x)$のフーリエ積分表示という。またc_nを求める式(4.29)を使えば、

$$g(k) = \lim_{l\to\infty}\sqrt{\frac{l}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2l}}\int_{-l}^{l}e^{-ikx}f(x)dx = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx}\qquad(4.57)$$

となる。

→ $g(k)$は$f(x)$のフーリエ変換であり、$f(x)$は$g(k)$のフーリエ変換である。

⇓

フーリエ級数のとき同様、フーリエ積分での完全性と直交性を確かめておこう。式(4.55)に(4.57)を代入すると

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}dy\,e^{ik(x-y)}f(y)\qquad(4.63)$$

であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}e_k^*(y)e_k(x)dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{ik(x-y)} = \delta(x-y)$$

が成り立つはずであり、実際、成り立つ。(教科書P111参照)

次に固有関数の直交性(フーリエ級数なら $\int_{-l}^{l}e_n^*(x)e_m(x)dx=\delta_{m,n}$)を調べる。

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dk'\,g(k')e^{i(k'-k)x}\qquad(4.68)$$

(フーリエ級数でc_nを求める式と同じ)。この式が常に成り立つ条件は、

$$\int_{-\infty}^{\infty}e_{k'}^*(x)e_k(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{i(k'-k)x} = \delta(k-k')$$

であればよいということだが、実際成立。

ただしフーリエ級数と違い、クロネッカーのデルタではなくδ関数である。

第5章 3次元の波動

5.1 空気の振動

この章からは、1次元の波ではなく、3次元の波を考えていく。その代表例が音である。

そこでまず、空気中の音波の満たす波動方程式を導出し、解を考察する。

⇓

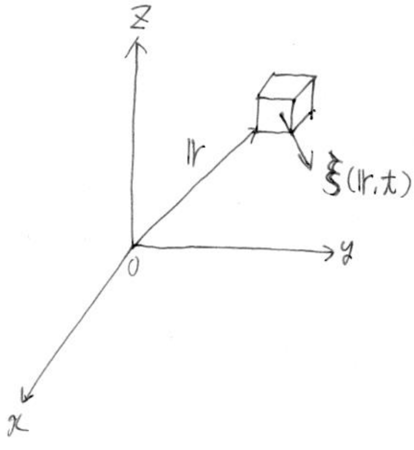
圧力の増減には気体の変位が伴う。それでは立式のために空間の各点で圧力と変位を定義できるのだろうか? 熱力学的には圧力というのは巨視的な物理量だし、分子間距離スケールで見ると分子は個々に自由すぎて何も定まらない。

⟶ そこで、圧力・変位などを考えるときは、ある点のまわりのある程度の体積を考える。

⟶ 領域の大きさは、平均分子間距離($\simeq 3.3$ nm)より十分に大きく、音の波長($0.77 \sim 0.017$ m)より十分に小さくなければいけない。

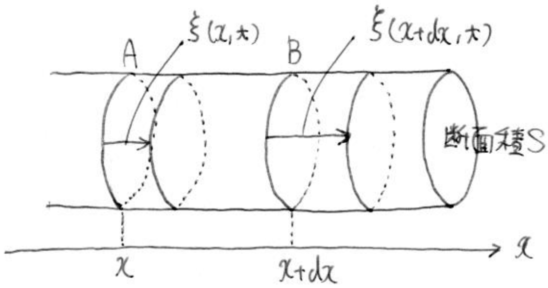
⟶ 領域の大きさ l は $1\,\mu m$ 程度にすれば、これらの条件を十分に満たしている。

※ なお、これまでの弦と違い、空気の変位 $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t)$ はベクトル量である。



5.2 長い管の中の音波

さあ、それではいよいよ波動方程式を導いていこう。簡単のため、図のようなx軸方向に伸びる円筒形の管の中の空気の振動を考える。
空気はx軸方向にのみ変位するとして、x軸に垂直な断面内では変位はすべて等しいとする。
（1辺1μm程度の領域内の分子の重心がx方向のみに運動すると考える）



このとき変位は、 $\xi(x,y,z,t)=(\xi(x,0,0,t),0,0)$ (5.1)
であり変位の大きさはy,zによらずxで決まる。

⇓

体積変化

場所(x)に依存する変位ξは密度変化を引き起こし、そして圧力変化が生じて、次の瞬間の空気の変位をもたらす。 この変位から次の変位に移る過程を定式化すると波動方程式が得られる。

(1) AB間の体積の変化

空気の変位がないときの体積： $V=Sdx$.

変位ξに伴う体積変化

$$V+dV = S\left[\xi(x+dx,t)+dx-\xi(x,t)\right]$$

テイラー展開(1次)

$$= S\left[dx+dx\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}\right] \qquad (5.2)$$

$$\therefore\ dV = V\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}. \qquad (5.3)$$

P37　(2) AB間の領域の圧力の変化

次に体積変化を起因とする圧力変化を定式化する。

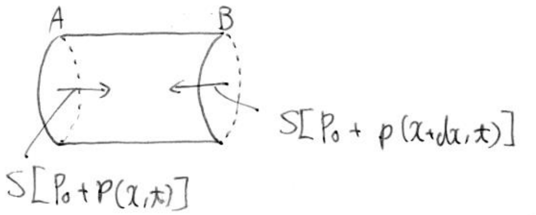
・平衡状態での圧力をP_0とし、変位があるときの圧力を$P = P_0 + p$とする。

熱力学によれば、体積変化と圧力変化は比例関係にあるから

$$p = -K\frac{dV}{V} = -K\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} \qquad (5.4)$$

（K：体積弾性率，$\frac{1}{K}$は圧縮率とよばれる）

(3) AB間の領域中の空気に働く力．



$$
\begin{aligned}
\text{合力} &= SP(x,t) - SP(x+dx,t) \\
&= -S\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}dx \\
&= SK\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}dx \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

(4) ニュートン方程式（運動方程式）

以上(1)〜(3)により、AB間の空気に働く合力が求められたので、あとは変位の2階時間微分である加速度を求めるつもりで運動方程式を立てる。

AB間の質量は、密度をρとして$V\rho = Sdx\rho$。よって運動方程式は、

$$V\rho\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = SK\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}dx \qquad (5.6)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} \qquad (5.7)$$

圧力変化pに対しては、

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \qquad (5.8)$$

← 同形!!

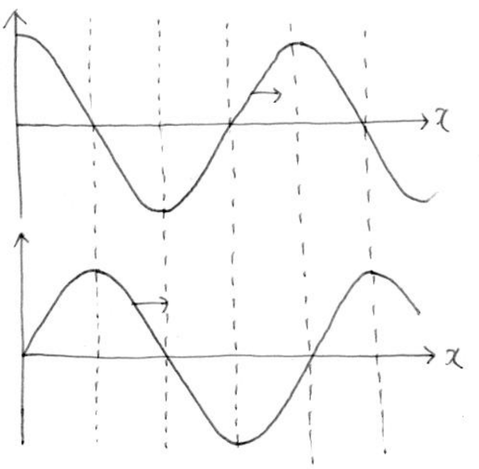
つまり、管内では音波は速度 $v=\sqrt{\frac{K}{\rho}}$ で伝わる。

※ 教科書P117〜P125は割愛するが、以上の議論の応用例なので読んでおこう。

NHKの時報で聞くことのできる音は $\sin(\omega t+\alpha)$ と単一の角振動数で振動し、これを純音という。ここでは円筒中のそのような純音を表す波動方程式の解の様子を見ておこう。進行波型の解は波数 k と $\omega=kv$ を用いて

$$\xi(x,t) = A\cos(kx-\omega t) + B\cos(kx+\omega t) \qquad (5.15)$$

$$p(x,t) = -K\frac{\partial \xi}{\partial x} = KAk\sin(kx-\omega t) + KBk\sin(kx+\omega t) \qquad (5.16)$$



⇒ 圧力変化と変位は $\frac{1}{4}$ 波長ずれる。

5.3 3次元の波動方程式

ここまで円筒について考察したが、円筒であることは、「1つの断面内では変位と圧力が全て等しい」ということだけに使われてきた。

⇓

「進行方向に垂直な面内では変位 ξ の大きさや圧力変化 p が場所によらない」という条件を保ったまま円筒の半径を無限に大きくしてもこれまでの考察は成り立つ。

P39　このようにして得られる、無限に広い空間での解は平面波解と呼ばれる。

（例）x軸方向に進む純音の平面波．

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t) = (\xi_x(\mathbf{r},t),0,0) = (A\cos(kx-\omega t),0,0) & (5.26) \\ p(\mathbf{r},t) = AKk\sin(kx-\omega t) \quad (\omega = kv) & (5.27) \end{cases}$$

$\Downarrow$

平面波の定義：進行方向に垂直な平面内で振動の位相が等しいこと。

→ 3次空間を伝播する波では、等しい位相をもつ面を定義でき、これを波面と呼ぶ。

$\Downarrow$

それでは、一般の進行方向の平面波はどのように表せるのか？

→ ベクトルを用いると座標軸の取り方に依存せずに表せる。

→ 進行方向を表すベクトル、波数ベクトルを導入する。

今さらながら復習。
波数k[m⁻¹]：
2πを波長λで割った量であり、単位長さあたりの波の周期の数とみてもよい。

波数ベクトル：大きさは波数に等しく、進行方向を向いたベクトル$\mathbf{k}$.

具体的には、式(5.26)、(5.27)のときには、$\mathbf{k} = (k,0,0)$であり、これを用いて、波の位相に含まれるkxは内積$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$で置き換えられる。
また$\boldsymbol{\xi}$は$\mathbf{k}$に平行だから、式(5.26)、(5.27)は次のようになる。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t) = A\dfrac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t) & (5.28) \\ p(\mathbf{r},t) = AKk\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t) & (5.29) \end{cases}$$

→ この形は座標軸の取り方とは無関係。

※ $\mathbf{k}^2 v^2 = \omega^2$, $\mathbf{k}^2 v^2 = (k_x^2+k_y^2+k_z^2)v^2 = \omega^2$.

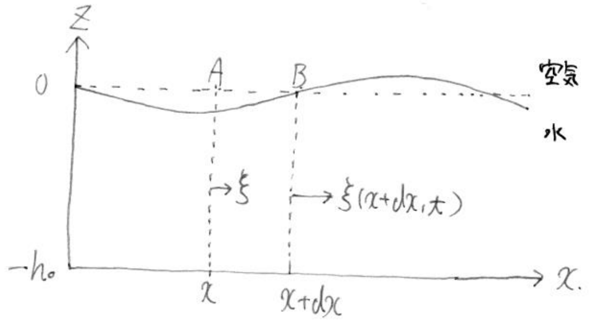
教科書P131.「5.4.4 球面波」はここでは割愛するが、非常に大切なので必ず読んでもらいたい。

5.4 水の波

空気中同様，水中でも縦波が伝わる。しかし水面の近くでは，これとは違う波，「表面波」が存在する。そこで水の表面波について考察する。

⇓

ここでは考察が比較的容易で，波動方程式で記述できる浅い水路での波を考える。



(進行方向(x軸)、鉛直方向(z軸)双方と垂直なy方向には単位長さの範囲があるとする。)

▫ 仮定

(i) 水の変位は進行方向であるx軸方向に起こり，その大きさはxと時間tにのみ依存して，深さにはよらず，$\xi(x,t)$と書ける。

(ii) 水は非圧縮性であり，密度は変化しない。このため，両側から押された場所では水面が盛り上がる。

(iii) 水中の圧力は水面からの深さで決まる。

※この仮定の是非は結果に基づいて後で吟味する。

それでは水の表面波の波動方程式を作っていこう。

- 音波：変位ξと圧力の変化分pで現象を記述．
- 水面波(今回)：変位ξと水面の高さ$\eta(x,t)$ (→圧力が求められるから)で現象を記述．

ただし、微小振幅として$|\eta(x,t)| \ll h_0$とする。

⇓

音波のときのように 変位→次の変位に到る過程を定式化する。

(1) 変位による水面の変化

波がないときのAB間の体積 $V = h_0 dx$ (5.60)

変位があるとき，非圧縮性からAB間の水の体積がVのままであることに注意すると，水面の高さは次のようになる。

$$[h_0 + \eta(x,t)][dx + \xi(x+dx,t) - \xi(x,t)] = h_0 dx \qquad (5.61)$$

$$\therefore [h_0 + \eta][dx + dx\frac{\partial \xi}{\partial x}] = h_0 dx$$

$$\therefore h_0 dx + \eta dx + h_0 dx \frac{\partial \xi}{\partial x} + \underbrace{\eta dx \frac{\partial \xi}{\partial x}}_{\text{ムシ}} = h_0 dx$$

$$\therefore \eta(x,t) = -h_0 \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} \qquad (5.62)$$

(2) 水面の変化による圧力の変化

水面の高さが$\eta(x,t)$のときの水面下で高さzの地点での圧力

$$p(x,z,t) = \underbrace{P_0}_{\text{大気圧}} + \rho g[\eta(x,t) - z] \qquad (5.63)$$

⇓

仮想的な膜Aに左側の水が及ぼす力は　圧力に面積かけてる．

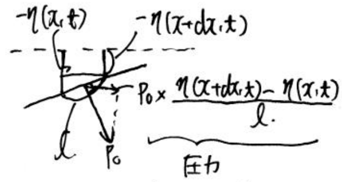
$$F(x,t) = \int_{-h_0}^{\eta(x,t)} p(x,z,t)\,dz$$

$$= P_0[h_0 + \eta(x,t)] + \frac{1}{2}\rho g[h_0 + \eta(x,t)]^2$$

$$\simeq \underline{P_0 h_0 + \frac{1}{2}\rho g h_0^2 + (P + \rho g h_0)\eta(x,t)} \qquad (5.64)$$

膜Bの右側の水による力も同様に計算できる。

水にはこの他に AB間の水面に大気圧が働いている。水面が傾いているから、この力は水平方向の成分をもつ。その大きさは



$$F_s(x,t) = P_0\left[\eta(x+dx,t)-\eta(x,t)\right]$$

$$\simeq P_0\,dx\,\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} \qquad (5.65)$$

圧力

(面積は $l \times 1$)

⇓

力は

$P_0 \times \frac{\eta(x+dx,t)-\eta(x,t)}{l} \times l \times 1$

(3) 運動方程式

AB間の水の質量は $\rho h_0 dx$ なので、運動方程式は、

$$\rho h_0 dx \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = F(x,t) - F(x+dx,t) + F_s(x,t)$$

$$= -\rho g h_0 \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} dx \qquad (5.66)$$

これに (5.62) を代入すると、波動方程式

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = g h_0 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} \qquad (5.67)$$

が得られる。

⇓

浅い水の表面波は 波動方程式に従い、波の速さは $v = \sqrt{g h_0}$ である。

⇓

それでは結果を考察してみよう!!

初め表面波で当然起こる水面の上下を無視し、水の移動はx方向のみに制限したが、どのような場合に上下運動を無視できるのか？

→ 波動方程式の解として

$$\xi(x,t) = A\cos(kx-\omega t) \qquad (5.68)$$

とすると、水面付近の水の変位$\eta(x,t)$は式(5.62)より

$$\eta(x,t) = -h_0 \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} = Ah_0 k \sin(kx-\omega t) \qquad (5.69)$$

となる。

→ ηの振幅$Ah_0k \ll \xi$の振幅A ならば上下運動は無視できる。

→ $kh_0 \ll 1$ すなわち 波長$\lambda = \frac{2\pi}{k}$にくらべて水深h_0が十分に浅ければよい。

ところで、この波動方程式は$|\eta| \ll h_0$を前提としている。しかし、普通、海などの水面で目にする波は、波長と上下方向の振幅が同程度のように見える。

→ 水深が深い場合の考察が必要。

⇓

式(5.68)、(5.69)によれば、波長にくらべて浅い水路では、表面付近の水は上下につぶれた楕円軌道に沿って運動する。

→ ところが、水路の深さh_0が増す or 波長が短くなると楕円は上下に膨らみ、これまでの近似は不適。

→ 水面付近の動きは、水深の増加に合わせて連続的に円軌道に近づいていくと考えられる。

→ 一方、底付近はもともと上下に動かないし、水深が深いと表面の動きの影響は受けない。

→ 軌道半径は、波数kの波では表面からの深さに対して$e^{-k|z|}$という形で減少する

⇒ 詳しくは教科書の付録[H]で!!

第6章 波の干渉

(さあ、いよいよ最終章です。長かったですね〜。
ちなみに第6章のスタートは教科書では P163。ということはこのシケプリはおよそ本くらいですか？
なかなかコンパクトに収まってますね〜。というわけでラストです!! もうひとふんばりです!!)

波は重ね合わせることができるが、そのとき起こる現象を総称して干渉という。
干渉によって余分な場所の波が消えてしまうので、有限の長さの波ができる。
逆に単色波でも有限の長さにすると、必然的に違う波数の波を含むことになる。
平面波の波面は無限に広がった平面であるが、この広がりを制限すると、斜め方向の波数ベクトルの波が混ざることになる。これが回折という現象である。

6.1 波束と群速度

有限の長さの波は、狭い範囲の波数の波の重ね合わせで作られる。
そのように作った波が進む速さは、一般的には、元の波とは別の速度をもつ。

話を簡単にするため、再び1次元の波に限る。

⇓

まず、直感的な説明からしていく。1次元の波として表せる弦の変位、空気の変位、電磁波の成分の1つなどを進行方向にx軸をとり、$\xi(x,t)$と書く。最も カンタンな波は

$$\begin{aligned}\xi(x,t) &= A\cos(kx-\omega_k t)\\ &= A\,\mathrm{Re}\left(e^{i(kx-\omega_k t)}\right)\end{aligned} \tag{6.1}$$

である。(単一の波数kをもち、単一の振動数ω_kで振動する単色波)

時空間的には $-\infty<t<\infty$, $-\infty<x<\infty$ で存在するが、時間はビッグバンを$t=0$としているし、宇宙空間全土にまたがる波などない。

$\longrightarrow$ 現実の波は有限の時空。そのような波は単色波の重ね合わせで作られている。

P45 実際、x軸方向に進む波は $t=0$ で $\xi(x,0)$ と xのみの関数で表せるし、
この $\xi(x,0)$ がどのようなものであれ、フーリエ積分で表せることは第4章で示した。

$$\xi(x,0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, g(k)\, e^{ikx} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} dk\, g(k)\, e^{ikx}\right] \quad (6.2)$$

この波の時間発展は次式のように単色波の重ね合わせで与えられる。

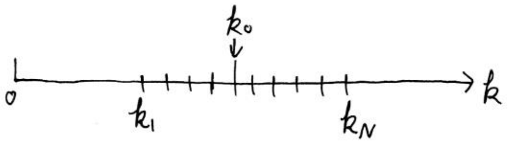
$$\xi(x,t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} dk\, g(k)\, e^{i(kx-\omega_k t)}\right] \quad (x>0) \quad (6.3)$$

$\Downarrow$

このような一般の波はあらゆる波数の波が重ね合わされている場合もあるが、
そうではなくて狭い範囲の波数のみの和からできている波を特に波束と呼ぶ。
$\longrightarrow$ そこでこれから波束について調べていく。

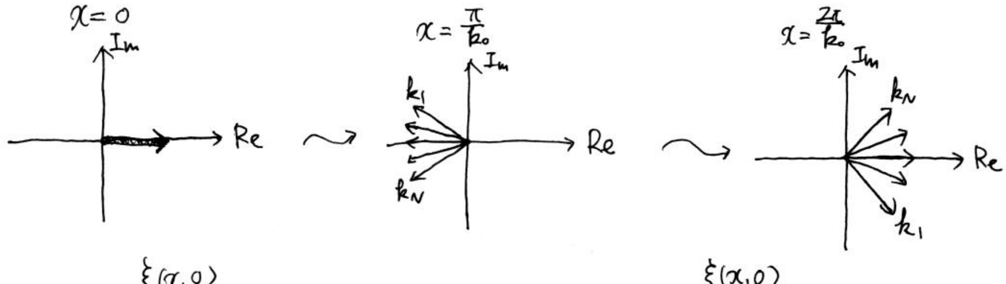
$\Downarrow$

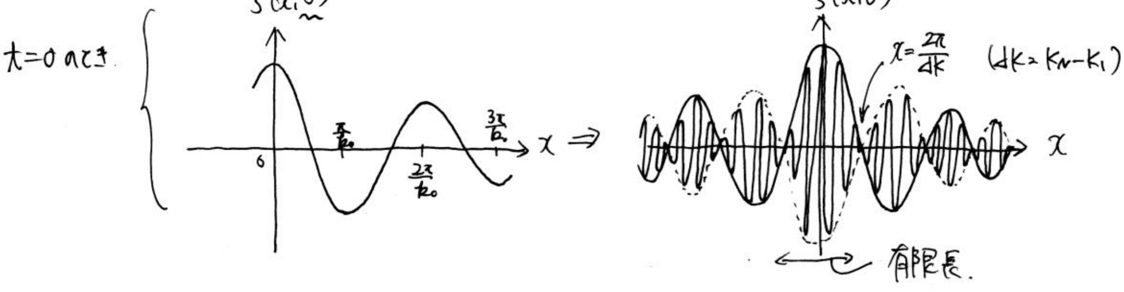
まずフーリエ積分の代わりに、波数k_0を中心とする、N個の単色波の和を考える。



$$\xi(x,t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} A_n e^{i(k_n x-\omega_n t)}\right) \quad (6.4)$$

簡単のため全$A_n=1$とする。各$e^{i(k_n x-\omega_n t)}$を複素平面上のベクトルとすると
有限のxでは$(x>0)$、個々の波を表すベクトルは反時計回りに複素平面上を回転する。
$\longrightarrow$ xが大きいほど位相のばらつきが大きくなる。





次に $t \neq 0$ のときを考える。個々の単色波の速度 $v_n = \frac{\omega_n}{k_n}$ が一定値 v に等しければ、個々の波は $e^{ik_n(x-vt)}$ と書けるから、波全体が v で走ることは自明。

⇓

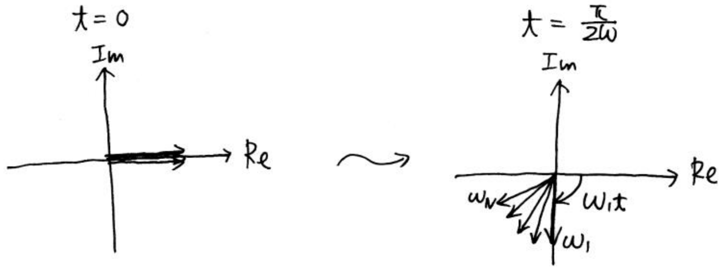
水の表面波のように $v(k) = \frac{\omega(k)}{k}$ が一定でない場合は、少々面白いことが起こる。

→ 個々の波の速度が異なる波の振る舞いを見るために、まず $x=0$ で時間変化を見る。

→ $\xi(0,t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{-i\omega_n t}\right)$ であり ω_n はそれぞれ異なる。

→ 今度は個々の波は複素平面上の半径1の円周上を時計回りに動き、時間経過に伴って波の位相はばらける

→ 重ね合わせた波は時間とともに小さくなっていく。



⇓

それでは $x=0$, $t>0$ でばらけていた波は他の地点 x ではどうなっているのか？

$\xi(x,t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{i(k_n x - \omega_n t)}\right)$ の x 依存性を調べてみる。

→ x が大きくなると個々の波を示す矢印（ベクトル）は反時計回りに回転するが（$\because k_n x - \omega_n t > 0$）このとき遅れていた位相は大きな波数 k をもつので（$\because k_n x - \omega_n t$ が小さいのは ω_n が大きい、つまり k_n が大きいから）、徐々に前の矢印に追いつき、適当な距離 x で、ばらけていたのが戻ってくる。

⇓

それならば、いつ位相がそろうのか？ それは全ての構成波の位相 $k_n x - \omega_n t$ がれたよらなくなったときである。

P47. それでは n によらないときを調べる。

$$k_n = k_0 + \Delta k_n \qquad (6.5)$$

とすると 波束ならば $|\Delta k_n| \ll k_0$（ご狭い範囲）なので ω_n は次のように近似できる.

$$\omega_n = \omega_0 + \frac{d\omega}{dk}\Delta k_n \qquad (6.6)$$

要はテイラー展開.

これより,

$$k_n x - \omega_n t = (k_0 x - \omega_0 t) + \Delta k_n \left(x - \frac{d\omega}{dk} t\right) \qquad (6.7)$$

→ $x - \frac{d\omega}{dk}t = 0$ で位相は n によらなくなり、これが波束の振幅が一番大きいところになる。この式から分かるように、波の中心は

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad (6.8)$$

で移動し、この移動速度を群速度と呼ぶ。

⇓

一方で、個々の単色波の進む速さ

$$v_p = \frac{\omega_n}{k_n} \simeq \frac{\omega_0}{k_0} \qquad (6.9)$$

を位相速度と呼ぶ。位相速度は波束の位相が常に一定の場所が進む速度である。(例: $\xi = 0$ の点が進む速度)

⇓

さてさて、それでは数式を用いてもう少し具体的に見ていく。

(1) 数式による取り扱い（その1）: 2つの進行波の合成.

初めに簡単な例として, $k \pm \frac{1}{2}\Delta k$, $\omega \pm \frac{1}{2}\Delta\omega$ の2つの波の合成を考える（うなりと同じ）

クザイ　ゼータ

$$\xi(x,t) = \mathrm{Re}\left[\zeta(x,t)\right]$$

とする。

P48.　このとき ζ は 次のようになる.

$$\zeta(x,t) = ae^{i[(k+\frac{1}{2}\Delta k)x-(\omega+\frac{1}{2}\Delta\omega)t]} + ae^{i[(k-\frac{1}{2}\Delta k)x-(\omega-\frac{1}{2}\Delta\omega)t]}$$
$$= ae^{i(kx-\omega t)}\left(e^{i(\frac{1}{2}\Delta kx-\frac{1}{2}\Delta\omega t)} + e^{-i(\frac{1}{2}\Delta kx-\frac{1}{2}\Delta\omega t)}\right)$$
$$= 2a\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)e^{i(kx-\omega t)} \qquad (6.10)$$

⟶ $2a\cos(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t)$ は Δk と $\Delta\omega$ が小さいことから、時間・空間的にゆっくり変化する量で、この部分は振幅と見なせる。(包絡関数)

⟶ 波は、この振幅で押さえられた範囲で $e^{i(kx-\omega t)}$ による速い振動を行う。

⟶ この振幅の進行速度(群速度)は

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} \qquad (6.12)$$

であるが、波のゼロ点や極値をとる場所は $e^{i(kx-\omega t)}$ の位相次第なので

位相速度 $v_p = \frac{\omega}{k}$ で進む。(⟶ v_p も v_g より不思議な進み方をする) ← 任史的な?

(2) 数式による取り扱い(その2) : N個の進行波の合成.

直感的な説明のとき、$k_1 \le k \le k_N$ の範囲のN個の波を同振幅で足し合わせた。

ここでは N が十分大きいとして、和 ⟶ 積分 として 次の波束を調べる.

$$\xi(x,t) = \mathrm{Re}[\zeta(x,t)]$$
$$\zeta(x,t) = \int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} e^{i[kx-\omega(k)t]}\,dk \qquad (6.13)$$

これは $t=0$ なら積分は容易だが、$t\neq 0$ なら $\omega(k)$ を定める必要がある。

⟶ そこで「波束」であることを利用して、つまり Δk が十分小さいことを利用して

$$\omega(k) \simeq \omega(k_0) + (k-k_0)v_g \qquad (v_g=\frac{d\omega}{dk}) \qquad (6.14)$$

と テイラー展開(というよりは微分係数と言うほうがいいか?) として 積分式に代入する。

$$\xi(x,t)=\int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} e^{i[kx-\omega(k_0)t-(k-k_0)v_g t]}\,dk$$

$$=\int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} e^{ik(x-v_g t)}\underbrace{e^{i[k_0 v_g t-\omega(k_0)]t}}_{\text{定数項}}\,dk$$

$$=\frac{1}{i(x-v_g t)}\left(e^{i\cdot\frac{\Delta k}{2}(x-v_g t)}-e^{-i\cdot\frac{\Delta k}{2}(x-v_g t)}\right)\times e^{ik_0(x-v_g t)+i[k_0 v_g-\omega(k_0)]t}$$

$$=2\cdot\frac{\sin\left[\frac{\Delta k}{2}(x-v_g t)\right]}{x-v_g t}\cdot e^{i[k_0 x-\omega(k_0)t]} \qquad (6.15)$$

これより

$$\xi(x,t)=\underbrace{2\cdot\frac{\sin\left[\frac{\Delta k}{2}(x-v_g t)\right]}{x-v_g t}}_{(*)}\cdot\underbrace{\cos\left[k_0 x-\omega(k_0)t\right]}_{(**)} \qquad (6.16)$$

$\longrightarrow$ 群速度 v_g で進む包絡関数 (*) に囲まれた内側を (**) で表される波が、位相速度 $v_p=\frac{\omega(k_0)}{k_0}$ で進行する様子が数式で再現できた。

※ 教科書 P172 では、「数式による取り扱い（その3）」として「ガウス型の波束」が取り挙げられているが、試験に出そうな予感もするので必ず学習しておいてください。（例によってこのシケプリでは割愛。）

6.2 回折

波は種類によらず、波長と同程度以下の狭い隙間（スリット）や穴を通過したあとで、進行方向が広がるという現象を示す。

⇓

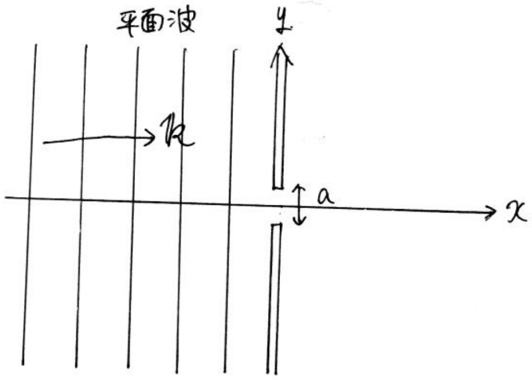
まず1つのスリットによる回折を考える。3次元空間を x 軸方向に進む平面波が $x=0$ にあるスリットを通ったあと、どのように広がるかを調べる。

P50.

$x<0$ での平面波は次式で表されるとする。

$$\xi(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left(Ae^{i(kx-\omega t)}\right) = A\cos(kx-\omega t) \qquad (6.44)$$

（波の速さを c とすると $ck=\omega$）



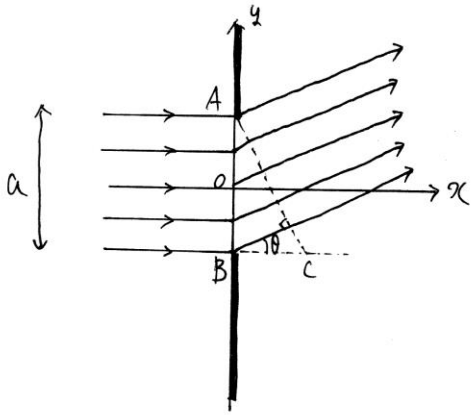
まず広がりを見積もる。

直感的に理解するなら、スリットを $A\cos\omega t$ で振動する点波源とみて、そこから球面波あるいは円形の波が広がっていくとしてよい。

$\Downarrow$

スリット幅が有限のときには、スリットを N 個に分割して、それぞれを十分小さなスリットと見なす。重ね合わせにより干渉が起こり、方向によっては振幅がゼロとなるので広がりに制限がつく。

→ 原点から距離 r ($\gg a$) の点 $P=(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$ に到達する波を考える。



O を通った波の P での位相：$kr-\omega t$

A 〃 ：$kr-\omega t-\frac{ka}{2}\sin\theta$

B 〃 ：$kr-\omega t+\frac{ka}{2}\sin\theta$

すなわち スリットを $N \gg 1$ 個に分割したときには、n番目の波の位相差 ϕ_n は、

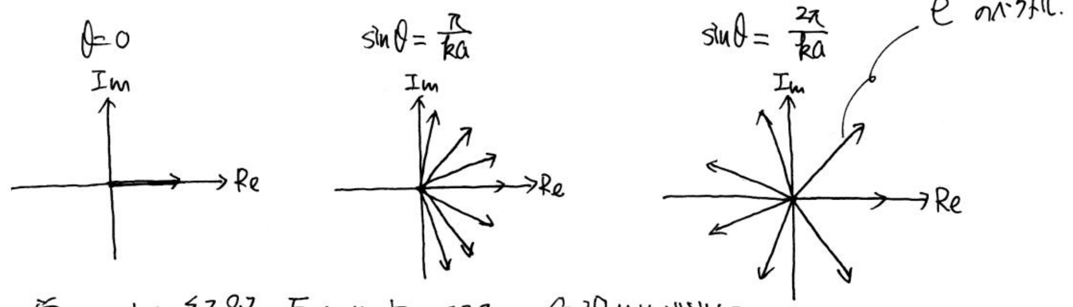
$$\phi_n = \left(\frac{n}{N}-\frac{1}{2}\right) ka\sin\theta \qquad (1 \le n \le N) \qquad (6.45)$$

であり、重ね合わせた波は、係数を別にして

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{i(kr-\omega t)+i\phi_n}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i(kr-\omega t)}\sum_{n=1}^{N} e^{i\phi_n}\right) \qquad (6.46)$$

となり、振幅は $\left|\sum_{n=1}^{N} e^{i\phi_n}\right|$ に比例する。

→ この和は θ とともにどう変化するのか?



→ $\sin\theta$ の増加により経路の長さが変化するため位相がばらける。

⇓

それでは数式によって厳密に取り扱ってみる。

式(1.44)の平面波が入射したとき、スリット通過直後の波は次式で与えられる。

$$\xi(r,t) = \begin{cases} 0 & (y < -\frac{a}{2}) \\ \mathrm{Re}\left(Ae^{i(kx-\omega t)}\right) & (-\frac{a}{2} \le y \le \frac{a}{2}) \\ 0 & (y > \frac{a}{2}) \end{cases}$$

$$\equiv f(y)\,\mathrm{Re}\left(Ae^{i(kx-\omega t)}\right) \qquad (6.47)$$

$f(y)$ はスリット開口部のみで1となる関数。フーリエ積分で表すと

$$f(y) = \begin{cases} 0 & (y < -\frac{a}{2}) \\ 1 & (-\frac{a}{2} \le y \le \frac{a}{2}) \\ 0 & (y > \frac{a}{2}) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y\, g(k_y)\, e^{ik_y y} \qquad (6.48)$$

P52　このとき $g(k_y)$ は次のようになる．

$$g(k_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ik_y y} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ik_y y} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-i\cdot\frac{a}{2}k_y} - e^{i\cdot\frac{a}{2}\cdot k_y}}{-ik_y}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{a}{2}k_y\right)}{k_y} \qquad (6.49)$$

この結果 $f(y)$ は

$$f(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk_y \frac{\sin\left(\frac{a}{2}k_y\right)}{k_y} e^{ik_y y}. \qquad (6.50)$$

となる．これを用いるとスリット通過直後の波の式は次のようになる．

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dk_y \frac{\sin\left(\frac{a}{2}k_y\right)}{k_y} Ae^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}\Big|_{x=0}\right] \qquad (6.51)$$

⇓

スクリーン手前では $\mathbf{k} = (k_x, 0, 0)$ だった波が，スリットを通過することで，通過直後の波の y 方向の広がりは幅 a の範囲に限定されてしまった。

→ このため，波束の広がりの反比例関係により y 方向の波数に広がりが生じ，波は有限の大きさの k_y をもつ波の重ね合わせとなる。

→ 有限の k_y の波は斜めに進んでいくこととなり，これが回折現象である．

⇓

式(6.51)はスリット通過直後である。次は $x>0$ での波の式を求める．波の満たす条件は．

(1) $x=0$ での波の式が(6.51)に一致すること（境界条件）

(2) $x>0$ で波動方程式を満たすこと。

である．

このためには波を次のように表せばよい。

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dk_y \frac{\sin(\frac{a}{2}k_y)}{k_y} A e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}\right] \quad (6.52)$$

($\mathbf{k} = (k, k_y, 0)$ ではなく $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$ である)

x 方向の波数 k_x を $c^2(k_x^2 + k_y^2) = c^2 k^2 = \omega^2$ を満たすよう決めれば、波動方程式は成立。k_x を具体的に書くと、

$$k_x = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_y^2} & (|k_y| < k) \\ i\sqrt{k_y^2 - k^2} & (|k_y| > k) \end{cases} \quad (6.53)$$

→ 回折波は $\underbrace{\text{平面波}}_{|k_y|<k}$ と $\underbrace{\text{減衰する波}}_{|k_y|>k}$ の和によって $x>0$ の全領域で正しく記述される。

⇓

最後にスリットより十分遠方での波の広がりを見積もる。

x 軸から θ 方向へ進む波は y 方向の波数が $k_y = k\sin\theta$ であるものである。

この k_y をもつ平面波の振幅は式(6.52)より

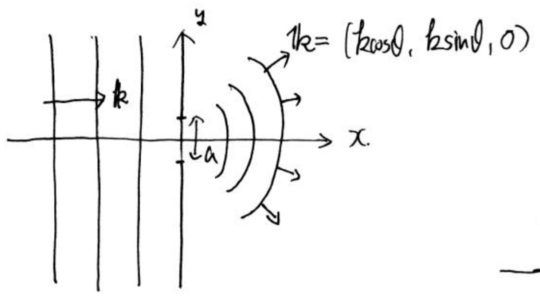
$$\frac{\sin(\frac{a}{2}k_y)}{k_y} \quad (6.54)$$

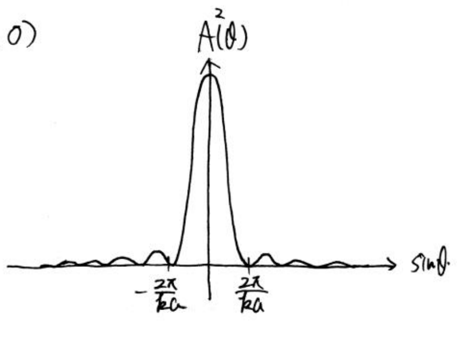
に比例し、これを θ を用いて表すと、

$$A(\theta) \equiv \frac{\sin(\frac{a}{2}k\sin\theta)}{k\sin\theta} \quad (6.55)$$

となる。

→ $a < \lambda \Rightarrow x>0$ の全方向に広がるが、$a \gg \lambda \Rightarrow$ 波はほとんど広がらず直進する。





おわり。