電磁気学Ａ試験対策プリント

平成 25 年度入学理科Ⅰ類 28 組　sou16

このシケプリは好村滋行教員の電磁気学Ａの授業を解説したものです。教科書は砂川重信著「物理の考え方 2　電磁気学の考え方」(岩波書店)。質問・指摘等は以下のコメント欄まで。

http://green.ap.teacup.com/sou16/206.html#comment

0. 目次

A. 初等ベクトル解析

記号・用語の説明

「ガウスの定理」

別名「発散の定理」とも言います。式で書くとこれ↓

$$\int_S \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})dS = \int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})dV$$

ここで、

V：3 次元の領域（立体）

S：Vの表面（閉曲面）

$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$：位置$\boldsymbol{x}$での流量ベクトル（どの向きにどれくらいの量流れているかを表す）

$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$：位置$\boldsymbol{x}$での曲面$S$の単位法線ベクトル（$V$の外側に向かう向き）

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$：位置$\boldsymbol{x}$での発散（位置$\boldsymbol{r}$からどれくらい湧き出しているかを表す）

$\int_S \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})dS$：曲面$S$上の全ての点に於いて$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})dS$を計算し、足し合わせる

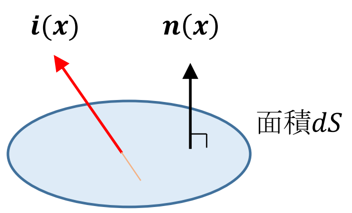
$\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})dV$：領域$V$内の全ての点に於いて$\mathrm{div}\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})dV$を計算し、足し合わせる

です。

以下では、数学的な厳密性は置いておいて直観的な説明をします。

まず、$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})dS$というのは、$S$上$\boldsymbol{x}$付近の微小面積$dS$を通って$S$の中から外へと「流れ出してくる量」を表しています。

（単位法線ベクトルとの内積になっているのは「入ってくる量」をマイナスにしたりするためです。）



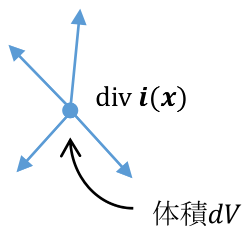
これをS上で積分（面積分）してみましょう。

Sを素通りするような流れは何処かから入って何処かから抜けていくので、積分するとそれらが打ち消しあい、

「**Sを通ってSの中から流れ出してくる正味の量**」が求められることになります。

次に$\mathrm{div}\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})dV$ですが、これは点$\boldsymbol{x}$から「湧き出してくる量」を表しています。

（$\nabla\cdot\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})dV$とも表せます。詳しい計算はプリントで。）



点$\boldsymbol{x}$に泉のようなものがあれば$\mathrm{div}\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})dV$の値は正になり、

ブラックホールのようなものがあれば負になり、

特に何でもない（流れが素通りする）点なら 0 になります。

これをV内で積分（体積積分）するということは、

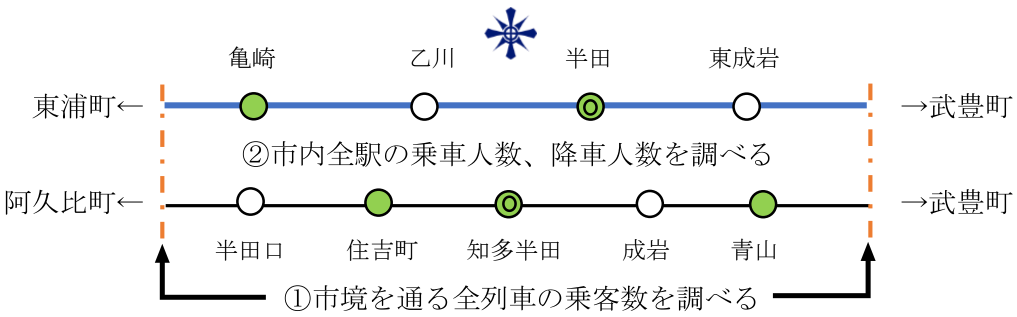
「**Vの中から湧き出してくる正味の量**」が求められることになります。

SはVをすっぽり覆っているのですから、Vの中から湧き出してきた流れは当然Sを通って外に流れ出していくので、両者は一致することになります。つまり、

$$\int_S \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) dS = \int_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) dV$$

が成り立つ訳です。

もっと卑近な説明をしてみましょう。
例えば、「朝の通勤・通学時間帯に、鉄道を使って半田市から正味出てくる人の数（出る人の数－入る人の数)」を知りたいとします。数え方としては、
①半田市の市境を通る列車の乗客数を調べ、半田市を出ていく列車の乗客数から入ってくる列車の乗客数を引く
②半田市内の駅の乗車人数、降車人数を調べ、乗車人数から降車人数を引いた人数を足し合わせる
の 2 つがあるでしょう。



ここで、①の「市境を通る列車の乗客数を調べる」という行為は「市境を通ってどれだけの人が市外に出ていくか」を計算しており、これが正に$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) dS$を求めることに相当します。また、②の「駅の乗車人数、降車人数を調べる」という行為は「その駅でどれだけの人が乗り込んでくるか（湧いて出てくるか)」を計算しており、これが正に$\mathrm{div}\, \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) dV$を求めることに相当します。
これを全列車、全駅について足し合わせるというのが積分に相当するので、結局、

$$\int_S \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) dS = \int_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) dV$$

が成り立つ訳です。
逆に分かり難くなってしまったら申し訳ありません…
思い付きで書いたものなので気にしないで下さい。

ちなみに、ガウスの定理という名前が付いていますが、最初に発見したのはラグランジュで、最初に証明したのはオストログラツキーです。

「ストークスの定理」

式で書くとこれ↓

$$\int_C \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \left(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\right) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) dS$$

ガウスの定理では「湧き出す量」を計算していましたが、ストークスの定理では「回転する量」を計算しています。

ガウスの定理ほど直観的には理解しにくいのですが、結局は「内側の値を足し合わせても、境界だけ考えても結果は同じ」という事を言っています。

詳しい直観的な説明は http://hooktail.sub.jp/vectoranalysis/StokesTheorem/の「ストークスの定理の直観的理解」辺りを見て下さい。

ガウスの定理では面積分（2 次元）と体積積分（3 次元）を結びつけていましたが、ストークスの定理では線積分（1 次元）と面積分（2 次元）を結びつけています。どちらも違う次元の積分を結びつけている意味でこれら 2 つの定理は殆ど同じものなので、是非セットで覚えてしまいましょう。

厳密には、これらの定理が成り立つには被積分関数がC^2級でなければなりませんが、物理学の世界に現れる関数については殆ど気にする必要はありません。

（実は、ある種の積分は次元を 1 つ下げる事が可能であるという定理があったりします。数学科の人に訊いてみて下さい。）

途中式補完・式解説

→式(A･39)

偏微分の定義より、

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{i_x(x+\delta x, y, z) - i_x(x, y, z)}{\delta x}$$

δxが無限小であるとき、[1]

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} = \frac{i_x(x+\delta x, y, z) - i_x(x, y, z)}{\delta x}$$

$$\frac{\partial i_x}{\partial x}\delta x = i_x(x+\delta x, y, z) - i_x(x, y, z)$$

これより、

$$\int i_x(\boldsymbol{x}) n_x(\boldsymbol{x}) dS = \{i_x(x+\delta x, y, z) - i_x(x, y, z)\}\delta y \delta z$$

$$= \frac{\partial i_x}{\partial x}\delta x \delta y \delta z$$

式(A･51)

$\boldsymbol{n}$がx軸方向を向いている場合を考えてみましょう。即ち、$\boldsymbol{n} = (1,0,0)$です。($\boldsymbol{n}$は単位法線ベクトルなので大きさは 1 です。) このとき、

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{x}) = (1,0,0) \cdot \left(\frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial x}, \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial y}, \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial x}$$

となることが分かります。もし、$\boldsymbol{n}$がx, y, z軸のどれとも平行でなかったとしても、座標を回転させれば同じことが言えます。(この式は座標を回転させても形が変わりません。[2]) つまり、$\boldsymbol{n}$が向いている方向に「n軸」をとれば、

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial n}$$

が成り立つという訳です。

---

1 これは$i_x(\boldsymbol{x})$をxの関数とみたときの 1 次近似を表しています。

2 この性質を「共変性」と言います。

1. 電磁気学とはどんな学問か

特に無し。

2. 近接作用と静電場

記号・用語の説明

「$\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x}) d^3x$」(p. 14)

空間全体に渡る体積積分、例えば$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz f(\boldsymbol{x})$を表しています。(多重積分をする場合は、どの積分区間がどの変数のものなのかをはっきりさせるためにこういう書き方をします。)xについて$-\infty$から∞まで積分し、yについて$-\infty$から∞まで積分し、zについて$-\infty$から∞まで積分するわけです。

積分区間は同じ($-\infty$から∞まで)だし、x、y、zをはっきり区別して考えているわけでもないし、まとめて書いちゃった方が楽じゃない?みたいな感じの記法です。

空間全体に渡る体積積分であれば何でも良いので、極座標で計算しても全く問題ありません。(ちなみに、こんな感じになります→$\int_{-\infty}^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(\boldsymbol{x})$)

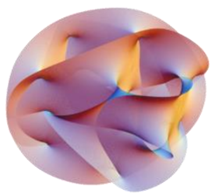
「無限大の自己力」(p. 15)

(※かなり発展した内容です。試験には絶対出ないと思われます。)

朝永振一郎の繰り込み理論(1965 年ノーベル物理学賞受賞)によってある程度解決されました。詳しくは繰り込み理論の本を読んでみて下さい。

「R^2の指数 2」(p. 17) [3]

(※かなり発展した内容です。試験には絶対出ないと思われます。)



「実験によって決められた数値であって、それが正確に 2 であるかは分からない」、「正確に 2 であると仮定している。この仮定の正否は…」など、しつこいくらい繰り返されていますが、これは現代物理学で提唱されているカルツァ=クライン理論や超弦理論などを意識しているものと思われます。

この宇宙が本当に 3 次元空間(4 次元時空)ならば逆 2 乗則が正確に成り立つのですが、前述の理論では 5 次元時空や 10 次元時空などを仮定しているため、もしこれらの理論が正しいとすると、ミクロなスケールでは逆 2 乗則が成り立たなくなる可能性があるのです。

---

[3] 画像は http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/55/Calabi-Yau-alternate.png/240px-Calabi-Yau-alternate.png より。

途中式補完・式解説

式(2.6)→式(2.7)

空間内で連続的に分布した電荷を、無数の微小体積電荷（点電荷として近似出来る。）の集まりとして考えてみましょう。位置$\boldsymbol{r}_i$にある微小体積電荷ΔQ_iが場所$\boldsymbol{x}$に作る静電場$\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{x})$は、式(2.5)より、

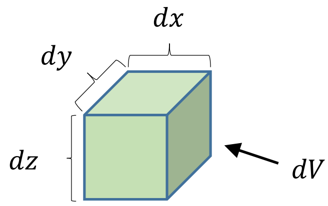
$$\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta Q_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i|^3}$$

ここで、ΔQを$\rho(\boldsymbol{r}_i)$で表してみましょう。

$\rho(\boldsymbol{r}_i)$は電荷「密度」を表しているので、

体積を掛けると電荷が求められます。

この微小体積電荷の体積を$dV = dxdydz$とすると、



$\Delta Q_i = \rho(\boldsymbol{r}_i)dxdydz$

（微小体積なので、この体積内での電荷密度は$\rho(\boldsymbol{r}_i)$でほぼ一定と見做せます。）

これより、

$$\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\boldsymbol{r}_i)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i|^3}dxdydz$$

式(2.7)より、連続的に分布した電荷全体が作る電場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$は、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\boldsymbol{r}_i)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i|^3}dxdydz$$

微小な量を足し上げているので、これは正に積分です。よって、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(x',y',z')(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}dx'\,dy'\,dz'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x'$$

積分範囲が$-\infty$から∞までとなっているのは、場合によっては連続的に分布した電荷が空間全体に広がっていることもあるためです。電荷が広がっている部分がはっきり分かっているなら、勿論そこだけ積分しても構いません。

式(2.19)

ごちゃごちゃと途中計算が鬱陶しいですが、つまるところ

「ある閉曲面S_0の内側から出てくる電束$\int_{S_0}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})dS$（高校で言うところの電気力線の本数）は、内部$V$にある電荷量$\int_V \rho(\boldsymbol{x})d^3x$に比例する」

ということを表しています。

式(2.34)

$$E(x+\Delta x)=E(x)+\frac{\rho(x)\Delta x}{\varepsilon_0}$$

これが何故近接作用を表していることになるのかを解説します。

「近接作用」とは、その名の通り「自分とくっついている相手に及ぼす影響」のこと。点xにとって隣接点$x+\Delta x$というのは正に「自分とくっついている相手」です。

この式は、ある点の電場は元々あった電場$E(x)$に、くっついている点がちょっとだけ電場$\rho(x)\Delta x/\varepsilon_0$を足して回してきたもの、ということを表しています。バケツリレー[4]のようにして電場が伝わっていく様子を表しているのです。バケツリレーの最初と最後だけを見ると、「手の届かない相手にバケツを送った」（遠隔作用）ように見えますが、実際には「それぞれの人は自分の手の届く隣の人にバケツを回しているだけ」（近接作用）であるように、電場も一見「離れた点に電場が伝わった」（遠隔作用）ように見えますが、実は「それぞれの点は隣り合った点に電場を伝えているだけ」（近接作用）である、と言っている訳です。

[4] 画像は http://www.timberland.co.jp/blog/assets_c/2010/09/バケツリレー-thumb-400x265-847.jpg より。

式(2.40)→式(2.39)

実際に$-\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x})$を計算してみます。式(2.40)を代入して、

$$-\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'$$

ここで、体積積分は$\boldsymbol{x}'$（電場を生む電荷の位置）についての積分であり、$\boldsymbol{x}$（電場を求める場所）についてはノータッチです。そして、∇は$\boldsymbol{x}$についての偏微分であり、$\boldsymbol{x}$が関係する値にのみ作用するので、体積積分の中に入れる事が出来ます。即ち、

$$-\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\rho(\boldsymbol{x}')d^3x' \quad \cdots(*)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\\ &= -\frac{x-x'}{\left\{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right\}^3}\\ &= \left(-\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\text{の}x\text{成分}\right)\end{aligned}$$

より、

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = -\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}$$

なので、(*)に代入して、

$$-\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x' = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$$

演習問題正誤表

(4)の解答

$$\times\ \frac{3Q}{\pi a^3}\cdot 2\pi\int_0^r r(a-r)dr$$

$$\circ\ \frac{3Q}{\pi a^3}\cdot 2\pi\int_0^r r(r-a)dr$$

以下、全て符号が逆になっています。(−1 倍したものが正しい答。)

実際は問題文に書かれている電荷密度の式が間違っており、正しくは$\rho(r) = 3Q(a-r)/\pi a^3$であると考えた方が自然かも知れません。

3. さらに静電場について

途中式補完・式解説

式(2. 40)→式(3. 8)

実際に$\boldsymbol{\nabla}^2\varphi(\boldsymbol{x})$を計算してみます。式(2. 40)を代入して、

$$\boldsymbol{\nabla}^2\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'$$

式(2. 40)→式(2. 39)のときと同じく、∇^2は体積積分の中に入れる事が出来るので、

$$\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\rho(\boldsymbol{x}')d^3x' \quad \cdots ①$$

ここで、

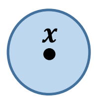
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-x'}{\left\{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right\}^3}\\
&= \frac{3(x-x')^2}{\left\{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right\}^5} - \frac{1}{\left\{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right\}^3}\\
&= \frac{3(x-x')^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^5} - \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\\
&= \frac{3\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^5} - \frac{3}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\\
&= \frac{3|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^5} - \frac{3}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\\
&= 0 \quad \cdots ②
\end{aligned}$$

一見、これを①に代入すると$\boldsymbol{\nabla}^2\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$になってしまうような気がしますが、この$\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$の計算ではある重要な仮定が隠れています。それが$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \neq 0$です。$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$となる点ではこの計算は破綻してしまうため、その点だけは別に考える必要があります。

そこで、①の体積積分を中心$\boldsymbol{x}$、半径$\varepsilon(\ll 1)$の球V_εと、
その外部$\overline{V_\varepsilon}$に分けて考えてみます。
（このεは単に微小な数を表すだけの記号で、
誘電率とは一切関係はありません。）



中心$\boldsymbol{x}$、半径εの球V_ε

$$\boldsymbol{\nabla}^2\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int_{V_\varepsilon}\left(\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\rho(\boldsymbol{x}')d^3x' + \int_{\overline{V_\varepsilon}}\left(\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\rho(\boldsymbol{x}')d^3x'\right\}$$

球の外部$\overline{V_\varepsilon}$では②が成り立つので、

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_\varepsilon}\left(\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\rho(\boldsymbol{x}')d^3x'$$

球V_εは極めて小さいのでその中では$\rho(\boldsymbol{x}')$の値はほぼ一定であり、$\rho(\boldsymbol{x}') \approx \rho(\boldsymbol{x})$と見做せます。これより、

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_\varepsilon}\left(\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\rho(\boldsymbol{x}')d^3x' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x})\int_{V_\varepsilon}\left(\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3x'$$

ここで、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\\ &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\end{aligned}$$

より、$\boldsymbol{\nabla}' = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right)$とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x})\int_{V_\varepsilon}\left(\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3x' &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x})\int_{V_\varepsilon}\left(\boldsymbol{\nabla}'^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3x'\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x})\int_{V_\varepsilon}\mathrm{div}'\left(\mathrm{grad}'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3x'\end{aligned}$$

但し、div'は$\boldsymbol{\nabla}'\cdot$を、$\mathrm{grad}'$は$\boldsymbol{\nabla}'$を表すものとします。

しかし、これではまだ$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$となる点でこの計算は破綻してしまいます。そこで、

($\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$は$C^2$級関数なので、) ガウスの定理を使うと、

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x})\int_{V_\varepsilon}\mathrm{div}'\left(\mathrm{grad}'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3x' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x})\int_{\partial V_\varepsilon}\left(\mathrm{grad}'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')dS \quad \cdots ③$$

但し、∂V_εはV_εの境界、即ち中心$\boldsymbol{x}$、半径εの球面を、$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')$は点$\boldsymbol{x}'$に於ける$\partial V_\varepsilon$の単位法線ベクトルを表すものとします。これによって$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$となる点が積分領域に含まれなくなり、計算は破綻しなくなりました。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} &= \frac{x-x'}{\left\{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right\}^3}\\ &= \left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\text{の}x'\text{成分}\right)\end{aligned}$$

より、

$$\mathrm{grad}'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}$$

であり、$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$は球面上の点$\boldsymbol{x}'$から球の中心$\boldsymbol{x}$に向かう向きのベクトルなので、$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')$（球の外部に向かう向きの単位法線ベクトル）と平行かつ逆向きのベクトルになっています。つまり、

$$\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}=\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\{-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')\}$$

また、$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|=\varepsilon$（球の半径）であることより、

$$\mathrm{grad}'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=-\frac{1}{\varepsilon^2}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')$$

これを③に代入して、

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x})\int_{\partial V_\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon^2}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')dS=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x})\int_{\partial V_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^2}dS$$

（$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')$は単位ベクトルなので、大きさは 1 です。）

$\frac{1}{\varepsilon^2}$は位置$\boldsymbol{x}'$によらない定数なので、面積積分の答は単に$\frac{1}{\varepsilon^2}\times$(積分面の面積)となります。$\partial V_\varepsilon$の面積は$4\pi\varepsilon^2$なので、

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x})\int_{\partial V_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^2}dS=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x})\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2$$

$$=-\frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0}$$

よって、

$$\nabla^2\varphi(\boldsymbol{x})=-\frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0}$$

「最初からガウスの定理を使っちゃえば良いのでは？」と思われるかも知れませんが、ガウスの定理は**有界**な領域（ちゃんとした境界が存在する領域）に於ける体積積分に対してしか使えません。だから、$\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{|x-x'|}=0$を示して積分領域を有界な領域に狭めたのです。また、$\rho(\boldsymbol{x}')$の積分が計算出来ないから、という理由もあります。

式(3.15)

$|\boldsymbol{s}_1|\ll 1$より、全微分を考えましょう。$\boldsymbol{s}_1=(s_{1x},s_{1y},s_{1z})$とすると、

$$\varphi\left(\boldsymbol{r}_1+\frac{\boldsymbol{s}_1}{2}\right)=\varphi(\boldsymbol{r}_1)+\frac{s_{1x}}{2}\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}_1)}{\partial x}+\frac{s_{1y}}{2}\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}_1)}{\partial y}+\frac{s_{1z}}{2}\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}_1)}{\partial z}$$

$$=\varphi(\boldsymbol{r}_1)+\left(\frac{s_{1x}}{2},\frac{s_{1y}}{2},\frac{s_{1z}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}_1)}{\partial x},\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}_1)}{\partial y},\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}_1)}{\partial z}\right)$$

$$=\varphi(\boldsymbol{r}_1)+\frac{\boldsymbol{s}_1}{2}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}_1)$$

演習問題正誤表

(4) の解答

$$\times\ \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \cong 2x\left(1+\frac{x^2}{2}\right),\quad x<1$$

$$\circ\ \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \cong 2x\left(1+\frac{x^2}{3}\right),\quad x\ll 1$$

テイラー展開（マクローリン展開）が間違っています。但し、最終的な答は

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2\right]$$

で合っています。

近似値であることを明示したいなら

$$C\cong\frac{\varepsilon_0 S}{d}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2\right],\quad \frac{\delta}{d}\ll 1$$

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2\right]+O\left[\left(\frac{\delta}{d}\right)^4\right]$$

としても良いです。

(5) の問題文

$$\times\ U_e=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\int_{-\infty}^{\infty}dx'\,\frac{\rho(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

$$\circ\ U_e=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\,\frac{\rho(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

上の式が正しいとすると、静電場のエネルギーは座標の取り方によって変わってくることになりますが、そんなことはありません。

5. 静磁場

途中式補完・式解説

式$(5.19), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \ \rightarrow \ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$

式(5.19)に$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$を代入すると、

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \mu_0\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$$

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \mu_0\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) \quad (\because \mathrm{rot}\text{ の性質})$$

ここで、$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = 0$であると仮定すると、

$$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = -\mu_0\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$$

スカラー関数とベクトル関数の違いはありますが、これはポアッソン方程式（式(3.8)）に於いて$\varphi(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}), \frac{1}{\varepsilon_0} \rightarrow \mu_0, \rho(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$と置き換えたものなので、同じように解くことが出来ます。よって、

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

しかし、ここで終わりではありません。$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = 0$という仮定が本当に正しいことを示さなければならないのです。「$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = 0$と仮定して解いたのだから、$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = 0$になるのは当然なのでは？」と思うかも知れませんが、そうとは限りません。例えば、

$$x(e^x - 1) = 0$$

という方程式は$x \neq 0$と仮定すると両辺をxで割ることが出来て、

$$e^x - 1 = 0$$

という形の方程式になりますが、この方程式の解を求めると、

$$x = 0$$

となって$x \neq 0$は満たされていません。これは極端な例ですが、ある仮定の下に解が導かれたからと言って、その解が元の仮定を必ず満たしているとは限らないのです。だから、ある仮定の下に解を導いた場合、その解が元の仮定を本当に満たしているかどうか（勿論、仮定自体が本当に正しいのかどうかも）を調べる必要があります。

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = 0$

という訳で、13 ページで求めた$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$が$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = 0$を満たしているかどうかを確かめます。

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial A_x(\boldsymbol{x})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\boldsymbol{x})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\boldsymbol{x})}{\partial z} \quad \cdots ①$$

ここで、

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

より、

$$A_x(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{i_x(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

なので、

$$\frac{\partial A_x(\boldsymbol{x})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{i_x(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

8 ページの計算と同じように考えると、体積積分は$\boldsymbol{x}'$（磁場を生む電流の位置）についての積分であり、$\boldsymbol{x}$（$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$を求める場所）についてはノータッチです。そして、$\frac{\partial}{\partial x}$は$\boldsymbol{x}$についての偏微分であり、$\boldsymbol{x}$が関係する値にのみ作用するので、体積積分の中に入れる事が出来ます。即ち、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{i_x(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right) i_x(\boldsymbol{x}') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \left(-\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right) i_x(\boldsymbol{x}') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(-\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right) i_x(\boldsymbol{x}') \quad \cdots ②\end{aligned}$$

部分積分を使うことにより、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(-\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right) i_x(\boldsymbol{x}') = \left[-\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} i_x(\boldsymbol{x}')\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{\partial i_x(\boldsymbol{x}')}{\partial x'}$$

ここで、$i_x(\boldsymbol{x}')$は電流のx方向の強さを表しているので常に有限値をとるのに対し、

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} = 0$$

なので、

$$\left[-\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} i_x(\boldsymbol{x}')\right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

となります。これより、

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\int_{-\infty}^{\infty}dy'\int_{-\infty}^{\infty}dx'\left(-\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)i_x(\boldsymbol{x}')=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\int_{-\infty}^{\infty}dy'\int_{-\infty}^{\infty}dx'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{\partial i_x(\boldsymbol{x}')}{\partial x'}$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{\partial i_x(\boldsymbol{x}')}{\partial x'}$$

即ち、式②より、

$$\frac{\partial A_x(\boldsymbol{x})}{\partial x}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{\partial i_x(\boldsymbol{x}')}{\partial x'}$$

y,zについても同様にして、式①に代入することにより、

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{\partial i_x(\boldsymbol{x}')}{\partial x'}+\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{\partial i_y(\boldsymbol{x}')}{\partial y'}+\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\frac{\partial i_z(\boldsymbol{x}')}{\partial z'}\right\}$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\left\{\frac{\partial i_x(\boldsymbol{x}')}{\partial x'}+\frac{\partial i_y(\boldsymbol{x}')}{\partial y'}+\frac{\partial i_z(\boldsymbol{x}')}{\partial z'}\right\}$$

$\mathrm{div}'=\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial z'}\right)\cdot$とすれば、

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\left\{\frac{\partial i_x(\boldsymbol{x}')}{\partial x'}+\frac{\partial i_y(\boldsymbol{x}')}{\partial y'}+\frac{\partial i_z(\boldsymbol{x}')}{\partial z'}\right\}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\frac{\mathrm{div}'\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

$\mathrm{div}'\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')=0$なので、結局、

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=0$$

が示されます。よって、

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x'\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

という表示が、（少なくとも数学的には）正しいことが示されました。

この$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$は「ベクトルポテンシャル」と呼ばれています。「電場の時はポテンシャルがスカラーだったのに、磁場だとポテンシャルがベクトルってどういうこと？全然違うじゃん。」と思うかも知れませんが、電場と磁場は特殊相対性理論に於いて「電磁テンソル[5]」という行列の形で統一されるので、それまでの辛抱です。

---

5 ちなみに、電磁テンソルはこんな行列。$F=\begin{pmatrix}0 & B_z & -B_y & -E_x/c\\ -B_z & 0 & B_x & -E_y/c\\ B_y & -B_x & 0 & -E_z/c\\ E_x/c & E_y/c & E_z/c & 0\end{pmatrix}$

6. 電流にはたらく磁場の力

途中式補完・式解説

演習問題 6(2)解答

まずは図より、直線電流から点 P までの距離が$d - a\cos\theta$、回路上の微小部分の長さが$ds = ad\theta$と表されることが分かります。最後の積分計算が割と面倒です。三角関数を含む積分の定石ですが、$t = \tan\frac{\theta}{2}$と置換してゴリ押しします。$\tan\frac{\theta}{2}$は$\theta = \pi$で不連続であるため、そこで積分を分けるのを忘れないようにしましょう。広義積分になるので本当は極限をとって収束性について論じる必要がありますが、ここでは特定の物理量を計算していることから収束するのはほぼ間違いない（収束しないようなら計算か理論がおかしい。）ので、その辺の厳密性は気にしなくて大丈夫です。

$$\int_0^{2\pi} \frac{a\cos\theta}{d - a\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{d - a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} + \int_{-\infty}^{0} \frac{a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{d - a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{d - a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a - at^2}{(1+t^2)\{(d-a)+(d+a)t^2\}} dt$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{d}{(d-a)+(d+a)t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right\} dt$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{d}{d-a}\frac{1}{1+\dfrac{d+a}{d-a}t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right\} dt$$

$$= 2\left[\frac{d}{\sqrt{d^2-a^2}}\tan^{-1}\left(\frac{d+a}{\sqrt{d^2-a^2}}t\right) - \tan^{-1} t\right]_{-\infty}^{\infty} \quad \left(\because 0 < a < d \text{より} \frac{d+a}{d-a} > 0\right)$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \tan^{-1} x = \pm\pi/2$（複合同順）であることより、

$$= 2\left(\frac{d}{\sqrt{d^2-a^2}}\pi - \pi\right)$$

よって、

$$\int_0^{2\pi} \frac{a\cos\theta}{d - a\cos\theta} d\theta = 2\pi\left(\frac{d}{\sqrt{d^2-a^2}} - 1\right)$$

8. 電磁気学の基本法則

途中式補完・式解説

式(8.8)→式(8.14)

まず、式(8.8)を書いておきます。

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} = e_1\boldsymbol{E} + e_1\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B} & \cdots ① \\ m_2 \dfrac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = e_2\boldsymbol{E} + e_2\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{B} & \cdots ② \end{cases}$$

それでは、これを変形していきましょう。

まず、①の両辺に$\boldsymbol{v_1}$を、②の両辺に$\boldsymbol{v_2}$を「内積で」掛けます。これは運動方程式から運動エネルギーの式を導く際の定石です。というのも、積の微分より、

$$\frac{d}{dt}(fg) = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt} \ \rightarrow \ \frac{df^2}{dt} = 2f\frac{df}{dt}$$

であることを使うと、

$$\boldsymbol{v} \cdot m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\right)$$

となって運動エネルギー（の時間微分）が得られるからです。「ベクトルの内積に対して積の微分の公式を使って良いの？」と思うかもしれませんが、これは全く問題ありません。気になる人は成分計算してみましょう。

外積の定義より、$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$は$\boldsymbol{v}$に対して垂直であり$\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = 0$となるので、①、②は

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}m_1{\boldsymbol{v}_1}^2\right) = e_1\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{E} & \cdots ③ \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}m_2{\boldsymbol{v}_2}^2\right) = e_2\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{E} & \cdots ④ \end{cases}$$

となります。ここで、$e\boldsymbol{v}$の意味を考えてみましょう。これは単位時間当たりの電荷の移動量、即ち電流に電荷の移動距離を掛けたものを表しています。つまり、電流密度を$\boldsymbol{i}$とすれば、

$$\int_V \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})d^3x = \ e\boldsymbol{v}$$

となる訳です。（左辺では面密度に体積を掛けるという計算を行っています。両辺とも単位は$C \cdot m/s$。）粒子 1 による電流密度、粒子 2 による電流密度を系全体の電流密度としてまとめて$\boldsymbol{i}$としてしまうと、

$$\int_V \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})d^3x = e_1\boldsymbol{v}_1 + \ e_2\boldsymbol{v}_2$$

これより、③と④を辺々足し合わせると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1{\boldsymbol{v}_1}^2\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_2{\boldsymbol{v}_2}^2\right)=e_1\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{E}+e_2\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{E}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1{\boldsymbol{v}_1}^2+\frac{1}{2}m_2{\boldsymbol{v}_2}^2\right)=(e_1\boldsymbol{v}_1+\ e_2\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{E}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1{\boldsymbol{v}_1}^2+\frac{1}{2}m_2{\boldsymbol{v}_2}^2\right)=\int_V\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})d^3x$$

電場$\boldsymbol{E}$は位置$\boldsymbol{x}$に依存すると思われるので、体積積分の中に入れる必要があります。

アンペールの法則より、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$即ち$\boldsymbol{i}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$なので代入して、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1{\boldsymbol{v}_1}^2+\frac{1}{2}m_2{\boldsymbol{v}_2}^2\right)=\int_V\left(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{E}d^3x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1{\boldsymbol{v}_1}^2+\frac{1}{2}m_2{\boldsymbol{v}_2}^2\right)=\int_V\left(\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)d^3x$$

ここで、外積の性質より、

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}-\ \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\ \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}-\ \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

なので、代入して、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1{\boldsymbol{v}_1}^2+\frac{1}{2}m_2{\boldsymbol{v}_2}^2\right)=\int_V\left\{\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}-\ \mathrm{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right\}d^3x$$

ファラデーの法則より、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$なので代入して、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1{\boldsymbol{v}_1}^2+\frac{1}{2}m_2{\boldsymbol{v}_2}^2\right)=-\int_V\left\{\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\ \mathrm{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right\}d^3x$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1{\boldsymbol{v}_1}^2+\frac{1}{2}m_2{\boldsymbol{v}_2}^2\right)-\int_V\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)d^3x=\int_V\mathrm{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\,d^3x \quad \cdots⑤$$

ここで、$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu_0$、$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$より、

$$\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{1}{\mu_0}\,\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$=\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B})+\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})\quad\left(\because f\frac{df}{dt}=\frac{1}{2}\frac{df^2}{dt}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{B}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}+\boldsymbol{E}\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{E}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})$$

なので、

$$\int_V \left(\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) d^3x = \int_V \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}) d^3x$$

体積積分はtにはノータッチなので偏微分は外に出すことが出来て、

$$\int_V \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}) d^3x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}) d^3x$$

さて、$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{E}$は共に位置$\boldsymbol{x}$と時間tに依存しますが、体積積分は定積分なので$\boldsymbol{x}$には具体的な値が代入されてしまうため、変数としては残りません。即ち、これは時間tのみの関数になっているので、tでの偏微分は詰まる所tでの全微分と同じことです。

即ち、

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}) d^3x = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}) d^3x$$

これを⑤に代入して、

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_1 \boldsymbol{v}_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \boldsymbol{v}_2{}^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}) d^3x = \int_V \mathrm{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})\, d^3x$$

$$-\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_1 \boldsymbol{v}_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \boldsymbol{v}_2{}^2 + \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}) d^3x \right] = \int_V \mathrm{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})\, d^3x$$

ガウスの定理より、

$$\int_V \mathrm{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})\, d^3x = \int_{S_0} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{n} dS$$

（但し、S_0はVの境界。）が成り立つので、$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{S}$とおくと、

$$-\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_1 \boldsymbol{v}_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \boldsymbol{v}_2{}^2 + \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}) d^3x \right] = \int_{S_0} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

この式の左辺は荷電粒子の運動エネルギー、及び荷電粒子の作る電磁場のエネルギーの和の時間変化（減少する場合を正とする。つまりは流出量。）を表しています。即ち、この式は「荷電粒子からなる系全体のエネルギーの流出は、ポインティング・ベクトル$\boldsymbol{S}$によって表される」というような意味を表しています。

9. 電磁波

途中式補完・式解説

式(9.16)

式(8.14)は以下のような形をしていました。

$$-\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v_2}^2+\frac{1}{2}\int_V(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})d^3x\right]=\int_{S_0}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

これから、系のエネルギーの流出はポインティング・ベクトルによって表されることが分かった訳ですが、一つ重要なことが分かっていませんでした。それは「何によって」系のエネルギーが流出（あるいは流入）するのか？ということです。マクスウェル方程式は近接作用の立場をとっていますから、エネルギーの流れに於いても「何か」がそれを媒介しないといけません。それでは、ここで式(9.16)を見てみましょう。

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}^{(3)}cu$$

教科書にも書いてあるとおり、この式からはポインティング・ベクトルが「進行方向に垂直な単位面積の断面を毎秒通過する電磁波のエネルギー量」に等しいことが分かります。逆に言うと、これと式(8.14)を合わせることにより、「電磁場（及び荷電粒子）のエネルギーは電磁波によって運ばれる」ということが分かる訳です。

ポインティング・ベクトルと電磁波という、マクスウェル方程式から別々に導かれた2 つの概念が見事に調和したと言えるでしょう。「こういうことにびっくりしない人は、物理の勉強をやめたほうがよい。」（教科書 p. 116 より）

10. おまけ

過去問解答例

平成 23 年度冬学期の期末試験の解答例です。問題文は教務課が著作権云々煩いので載せていません。悪しからず。

なお、授業中ではラプラシアンを∇^2と表記していましたが、ここでは試験問題に合わせてΔと表記します。

1.

(1)

円柱と中心軸が同じで、半径がr、高さが1であるような円柱状の閉曲面S_0に、電場に関するガウスの法則を適用する。対称性より、円柱の中心軸に平行な電場の成分は 0 であると考えられるので、側面のみに注目すれば良い。

・$0 < r < a$のとき

$$\int_{S_0} E(r)dS = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0} d^3x$$

$$2\pi r E(r) = \int_0^r \frac{3Q(a-x)}{\pi\varepsilon_0 a^3} \cdot 2\pi x dx$$

$$2\pi r E(r) = \left[\frac{3Qax^2 - 2Qx^3}{\varepsilon_0 a^3}\right]_0^r$$

$$2\pi r E(r) = \frac{Qr^2(3a-2r)}{\varepsilon_0 a^3}$$

$$E(r) = \frac{Qr(3a-2r)}{2\pi\varepsilon_0 a^3}$$

(2 行目の右辺の積分では、(電荷密度)×(中心軸からの距離が$x\sim x+dx$である部分の体積)＝(中心軸からの距離が$x\sim x+dx$である部分の電荷)を足し合わせています。)

ここで、$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$より、$E(r) = -\frac{d}{dr}\varphi(r)$なので、

$$\varphi(r) = -\int E(r)dr$$

$$= -\int \frac{Qr(3a-2r)}{2\pi\varepsilon_0 a^3} dr$$

$$= \frac{Qr^2(4r-9a)}{12\pi\varepsilon_0 a^3} + C$$

・$a < r$のとき

$$\int_{S_0} E(r)dS = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0} d^3x$$

$$2\pi r E(r) = \int_0^a \frac{3Q(a-x)}{\pi\varepsilon_0 a^3} \cdot 2\pi x dx$$

$$2\pi r E(r) = \left[\frac{3Qax^2 - 2Qx^3}{\varepsilon_0 a^3}\right]_0^a$$

$$2\pi r E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

ここで、$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$より、$E(r) = -\frac{d}{dr}\varphi(r)$なので、

$$\varphi(r) = -\int E(r)dr$$

$$= -\int \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r} dr$$

$$= -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\log r + C'$$

式より、$\varphi(r)$は明らかに$r \to \infty$に於いて発散するので、無限遠点を基準にとることは出来ない。$\varphi(r)$の連続性より、

$$\lim_{r\to a-0}\varphi(r) = \lim_{r\to a+0}\varphi(r) = \varphi(a)$$

$$\therefore \lim_{r\to a-0}\left\{\frac{Qr^2(4r-9a)}{12\pi\varepsilon_0 a^3} + C\right\} = \lim_{r\to a+0}\left(-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\log r + C'\right) = \varphi(a)$$

であるので、基準として$\varphi(a) = 0$をとることにすると、電位は

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{12\pi\varepsilon_0 a^3}(4r^3 - 9ar^2 + 5a^3) & (0 < r < a) \\ -\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\log\left(\dfrac{r}{a}\right) & (a \le r) \end{cases} \qquad \blacksquare$$

(2)

内側の導体球に$+Q$の電荷を、外側の導体球に$-Q$の電荷を与えた場合を考える。ここで、導体球と同心な半径rの球面に対して電場に関するガウスの法則を適用する。対称性より、電気力線は球面を垂直に貫くので、

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ Q/\varepsilon_0 & (a < r < b) \\ 0 & (b < r) \end{cases}$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ Q/4\pi\varepsilon_0 r^2 & (a < r < b) \\ 0 & (b < r) \end{cases}$$

ここで、$E = -\operatorname{grad}\varphi$より$\varphi(r) = \int -E(r)dr$なので、内側の導体球と外側の導体球の電位差$V$は、

$$\begin{aligned} V &= \int_b^a -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr \\ &= \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_b^a \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

$C = Q/V$より、

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a} \quad \blacksquare$$

(3)

導体と中心軸が同じで半径がrの円周にアンペールの法則を適用する。

$$2\pi r B(r) = \begin{cases} \mu_0 \dfrac{r^2}{a^2} I & (r < a) \\ \mu_0 I & (a < r) \end{cases}$$

$$\therefore B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & (r < a) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (a < r) \end{cases} \quad \blacksquare$$

（電流密度は一様であることより、$r < a$の円柱面を流れる電流は円柱の断面積に比例するので$\frac{\pi r^2}{\pi a^2} I = \frac{r^2}{a^2} I$となります。）

２．

(1)

・$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho$（電場に関するガウスの法則）

電場は電荷によって生じ、その強さは電荷量に比例する。

・$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$（磁場に関するガウスの法則）

磁場の源となるような磁荷（磁気単極子）は存在せず、磁力線は常に閉曲線を作る。

・$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$（ファラデーの法則）

磁場が時間的に変化すると、その変化を打ち消す向きに電場が生じる。

・$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{i}$（アンペール＝マクスウェルの法則）

電流の周りの空間、及び電場が時間的に変化することによって磁場が生じる。 ■

(2)

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{i}$の両辺の発散をとると、

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}) = \mathrm{div}\left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) + \mathrm{div}\,\boldsymbol{i}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{i}$$

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho$より、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{i} = 0 \quad ■$$

(3)

$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$を$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{i}$に代入すると、$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$より、

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0 \boldsymbol{i}$$

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} - \triangle\,\boldsymbol{A} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0 \boldsymbol{i}$$

ここで$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi$を代入して、

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} - \triangle\,\boldsymbol{A} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi\right) + \mu_0\boldsymbol{i}$$

$$-\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + \triangle\,\boldsymbol{A} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \mu_0\boldsymbol{i}$$

$$\therefore \left(\triangle - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0\boldsymbol{i} \quad \blacksquare$$

次に、$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi$を$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho$に代入すると、$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$より、

$$\mathrm{div}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\triangle\,\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\triangle\,\varphi - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \left(\triangle - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \blacksquare$$

(4)

実際に代入すると、

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}^{(L)} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \varphi^{(L)}}{\partial t} = \mathrm{div}(\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,\chi) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\right)$$

$$= \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + \triangle\,\chi + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$$

$\left(\triangle - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi = -\left(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$より、

$$= \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

$$= 0 \quad \blacksquare$$

(5)

$$-\frac{\partial \boldsymbol{A}^{(L)}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi^{(L)}=-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}+\operatorname{grad}\chi)-\operatorname{grad}\left(\varphi-\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)$$

$$=-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi$$

及び、

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}^{(L)}=\operatorname{rot}(\boldsymbol{A}+\operatorname{grad}\chi)$$

$$=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$$

より、$\boldsymbol{A},\varphi$は$\boldsymbol{A}^{(L)},\varphi^{(L)}$で置き換えることが可能である。(より正確に言うと、$\boldsymbol{A}^{(L)},\boldsymbol{\varphi}^{(L)}$は$\boldsymbol{A},\boldsymbol{\varphi}$からなる集合に含まれる。)(3)で求めた条件式に於いて$\boldsymbol{A},\boldsymbol{\varphi}$を$\boldsymbol{A}^{(L)},\boldsymbol{\varphi}^{(L)}$で置き換えると、(4)の結果と合わせて、

$$\left(\triangle-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}^{(L)}=-\mu_0\boldsymbol{i}\quad\blacksquare$$

$$\left(\triangle-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi^{(L)}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\quad\blacksquare$$

３.

(1)

実際に代入する。まずは

$$\triangle\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\triangle\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'$$

ここで、$\triangle$は$\boldsymbol{x}$に対する演算子であり、$\boldsymbol{x}'$には作用しないので体積積分の中に入れることができる。また、$\boldsymbol{x}'\neq\boldsymbol{x}$なる点に於いて

$$\triangle\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=0$$

であるので(導出は p. 10 を参照。)、積分範囲を$\boldsymbol{x}$を中心とする半径$\varepsilon(\ll 1)$の球V_εとその外部$\overline{V_\varepsilon}$とに分ける。V_εは微小なので、その中で$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')$はほぼ一定値$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$をとるものとすると、

$$\triangle\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'=\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})\int_{V_\varepsilon}\left(\triangle\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3x'$$

ここで、$\triangle'=\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}$とおくと、対称性より、

$$\triangle\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=\triangle'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

が成り立つので(詳しい導出は p. 11 を参照。)、

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})\int_{V_\varepsilon}\left(\triangle\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3x' = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})\int_{V_\varepsilon}\left(\triangle'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3x'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})\int_{V_\varepsilon}\mathrm{div}'\left(\mathrm{grad}'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3x'$$

但し、div'は$\boldsymbol{\nabla}'\cdot$を、$\mathrm{grad}'$は$\boldsymbol{\nabla}'$を表すものとする。ガウスの定理より、$V_\varepsilon$の境界を$\partial V_\varepsilon$と書くと、

$$\int_{V_\varepsilon}\mathrm{div}'\left(\mathrm{grad}'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3x' = \int_{\partial V_\varepsilon}\left(\mathrm{grad}'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')dS$$

$$= \int_{\partial V_\varepsilon}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}dS$$

∂V_ε上に於いては常に$-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}') = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| = \varepsilon$であることより、

$$\int_{\partial V_\varepsilon}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}dS = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial V_\varepsilon}dS = -\frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = -4\pi$$

なので、

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})\int_{V_\varepsilon}\mathrm{div}'\left(\mathrm{grad}'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3x' = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})\cdot(-4\pi) = -\mu_0\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$$

よって、

$$\triangle\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = -\mu_0\boldsymbol{i} \quad \blacksquare$$

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = 0$の証明は p. 15–16 を参照のこと。

(2)

$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$より、

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\left\{\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'\right\}$$

x成分を計算してみると、

$$B_x = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{i_z(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x' - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{i_y(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{\frac{\partial}{\partial y}\frac{i_z(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{i_y(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right\}d^3x'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{-i_z(\boldsymbol{x}')(y-y') + i_y(\boldsymbol{x}')(z-z')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x'$$

$$= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x' \text{ の}x\text{成分}\right)$$

よって対称性より、

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x' \quad \blacksquare$$

4．

(1)

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$の両辺の回転をとると、

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} - \triangle\,\boldsymbol{E} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}$$

自由空間では$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = 0, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$となるので、

$$-\triangle\,\boldsymbol{E} = -\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{D}$$

$$\therefore \left(\triangle - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \quad ■$$

また、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$の両辺の回転をとると、

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{D}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} - \frac{1}{\mu_0}\triangle\,\boldsymbol{B} = -\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}$$

自由空間では$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$となるので、

$$-\frac{1}{\mu_0}\triangle\,\boldsymbol{B} = -\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{B}$$

$$\therefore \left(\triangle - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \quad ■$$

(2)

式の類似性より、$\boldsymbol{E}$について確かめれば十分である。実際に代入すると、

$$\left(\triangle - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{e}^{(1)}E_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t) = \boldsymbol{0}$$

$$(-k^2 + \varepsilon_0\mu_0\omega^2)\boldsymbol{e}^{(1)}E_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t) = \boldsymbol{0}$$

$k = |\boldsymbol{k}| \geq 0$より、これが恒等式となるには、

$$-k^2 + \varepsilon_0\mu_0\omega^2 = 0$$

$$\therefore \omega = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \quad ■$$

(3)

自由空間では$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=0$であることより、

$$\mathrm{div}\left\{\boldsymbol{e}^{(1)}E_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)\right\}=0$$

$$\left(e^{(1)}{}_x k_x+e^{(1)}{}_y k_y+e^{(1)}{}_z k_z\right)E_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)=0$$

$$\left(\boldsymbol{e}^{(1)}\cdot\boldsymbol{k}\right)E_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)=0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{e}^{(1)}\cdot\boldsymbol{k}=0$$

これより、$\boldsymbol{E}$は電磁場の進行方向$\boldsymbol{k}$に直交する。同様にして、$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0$であることより$\boldsymbol{B}$も電磁場の進行方向$\boldsymbol{k}$に直交することが分かる。よって、電磁波は横波であることが示された。 ■

(4)

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$に代入すると、

$$\mathrm{rot}\left\{\boldsymbol{e}^{(1)}E_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)\right\}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{e}^{(2)}B_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)$$

$$\left(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}^{(1)}\right)E_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)=\boldsymbol{e}^{(2)}\omega B_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)$$

$\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{e}^{(3)}$、$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$及び(2)の関係式より、

$$\left(k\boldsymbol{e}^{(3)}\times\boldsymbol{e}^{(1)}\right)E_0=ckB_0\boldsymbol{e}^{(2)}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{e}^{(3)}\times\boldsymbol{e}^{(1)}\cdot\frac{E_0}{c}=B_0\boldsymbol{e}^{(2)}\quad ■$$

(5)

$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$より、

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\left\{\boldsymbol{e}^{(1)}E_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)\right\}\times\left\{\boldsymbol{e}^{(2)}B_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)\right\}$$

$$=\frac{E_0\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}{\mu_0}\left(\boldsymbol{e}^{(1)}\times B_0\boldsymbol{e}^{(2)}\right)$$

(4)より$B_0\boldsymbol{e}^{(2)}=\boldsymbol{e}^{(3)}\times\boldsymbol{e}^{(1)}\cdot E_0/c$なので、

$$\boldsymbol{S}=\frac{{E_0}^2\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}{c\mu_0}\boldsymbol{e}^{(3)}=\boldsymbol{e}^{(3)}c\varepsilon_0{E_0}^2\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)\qquad\left(\because\ c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right)$$

また、電磁波のエネルギー密度は、

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2+\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\mu_0}{B_0}^2\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)+\varepsilon_0{E_0}^2\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)\right\} \quad \left(\because \left|\boldsymbol{e}^{(1)}\right|=\left|\boldsymbol{e}^{(2)}\right|=1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{E_0^2}{\mu_0 c^2}\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)+\varepsilon_0{E_0}^2\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)\right\} \quad \left(\because \frac{E_0}{c}=B_0\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_0{E_0}^2\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)+\varepsilon_0{E_0}^2\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)\right\} \quad \left(\because c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right) \\
&= \varepsilon_0{E_0}^2\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)
\end{aligned}
$$

よって、

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}^{(3)}cu$$

この式は、ポインティング・ベクトルが電磁波によって運ばれるエネルギーの流れを表していることを意味している。　■