

振動・波動論 過去問解答

平成 25 年度入学理科 I 類 28 組 sou16

平成 24 年度(?) 冬学期の期末試験で理 I に対して出題された振動・波動論(森松治教授)の問題の解答です。

1

(1)

$\theta_1 = \theta_2 = 0$ なる状態でポテンシャルエネルギーが 0 だとする(この状態でバネは自然長になっているとして良いでしょう。)。また、振幅は微小なのでバネの鉛直方向の変位を無視する(と言うより、バネの長さが分からないと鉛直方向の変位によるポテンシャルエネルギーを計算できません。)。この系のポテンシャルエネルギーは、

$$\begin{aligned} V &= mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}k(l \sin \theta_1 - l \sin \theta_2)^2 \\ &= mgl(2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}kl^2(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 \end{aligned}$$

また、この系の運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_2)^2$$

これより、この系のラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 - mgl(2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) - \frac{1}{2}kl^2(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2$$

オイラー＝ラグランジュ方程式より、

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 & \dots \textcircled{1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①より、

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}_1) + mgl \sin \theta_1 + kl^2 \cos \theta_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta}_1 + mgl \sin \theta_1 + kl^2 \cos \theta_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) = 0$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l} \sin \theta_1 - \frac{k}{m} \cos \theta_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$$

$\theta_1, \theta_2 \ll 1$ より、左の重りに対する運動方程式は、

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l} \theta_1 - \frac{k}{m} (\theta_1 - \theta_2) \quad \blacksquare$$

②より、

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}_2) + mgl \sin \theta_2 - kl^2 \cos \theta_2 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 + mgl \sin \theta_2 - kl^2 \cos \theta_2 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l} \sin \theta_2 + \frac{k}{m} \cos \theta_2 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$$

$\theta_1, \theta_2 \ll 1$ より、右の重りに対する運動方程式は、

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l} \theta_2 + \frac{k}{m} (\theta_1 - \theta_2) \quad \blacksquare$$

(2)

$\theta_j = c_j e^{i\omega t}$ とにおいて(1)の式に代入すると、

$$\begin{cases} -\omega^2 c_1 e^{i\omega t} = \left(-\frac{g}{l} - \frac{k}{m}\right) c_1 e^{i\omega t} + \frac{k}{m} c_2 e^{i\omega t} \\ -\omega^2 c_2 e^{i\omega t} = \left(-\frac{g}{l} - \frac{k}{m}\right) c_2 e^{i\omega t} + \frac{k}{m} c_1 e^{i\omega t} \end{cases}$$

$e^{i\omega t} \neq 0$ より、

$$\begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

これが $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ なる解を持てば良いので、

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 - \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} \quad \blacksquare$$

(3)

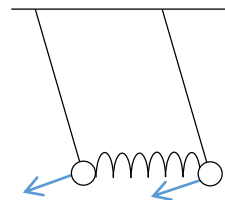
(2) で求めた解を c_1, c_2 の条件式に代入して $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ を求める。

・ $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ のとき

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

よって、基準振動は右図のようになる。 ■

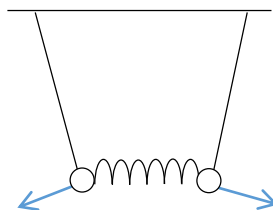


・ $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$ のとき

$$\begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \alpha \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

よって、基準振動は右図のようになる。 ■



2

(1)

与式より、

$$\begin{aligned}C(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \\&= \int_{-a}^a 1 \cdot e^{-ikx}dx \\&= \left[-\frac{1}{ik}e^{-ikx} \right]_{-a}^a \\&= \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{ik} \\&= \frac{2 \sin ak}{k} \quad \blacksquare \quad (\because e^{ix} = \cos x + i \sin x)\end{aligned}$$

(2)

与式より明らかに $\Delta x = 2a$ である。また(1)の結果より、 $\Delta k \propto a^{-1}$ なので、 $\Delta k \propto (\Delta x)^{-1}$
(反比例)の関係がある。 \blacksquare

3

(1)

$u = x - vt, s = x + vt$ と変数変換する。 $\psi(x, t) = \varphi(u, s)$ ($\varphi(u, s)$ は C^2 級とする。)とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi(u, s)}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi(u, s)}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial \varphi(u, s)}{\partial s} \\ &= \frac{\partial \varphi(u, s)}{\partial u} + \frac{\partial \varphi(u, s)}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi(u, s)}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \varphi(u, s)}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial \varphi(u, s)}{\partial s} \\ &= -v \frac{\partial \varphi(u, s)}{\partial u} + v \frac{\partial \varphi(u, s)}{\partial s}\end{aligned}$$

(A)の波動方程式より、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi(u, s)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi(u, s)}{\partial t^2} &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(u, s) &= 0 \\ -4 \frac{\partial^2 \varphi(u, s)}{\partial u \partial s} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi(u, s)}{\partial u} = 0 \text{ または } \frac{\partial \varphi(u, s)}{\partial s} &= 0\end{aligned}$$

$\therefore \varphi(u, s) = f(u)$ または $\varphi(u, s) = g(s)$ (f, g は任意の C^2 級関数)

波動方程式の一般解はこれらの線形結合として表されるので、

$$\psi(x, t) = \varphi(u, s) = f(u) + g(s) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

$f(x - vt)$ は x 軸正方向に進む波動、 $g(x + vt)$ は x 軸負方向に進む波動を表している。 ■

(2)

(1)の式に代入すると、

$$\begin{cases} \psi(x, 0) = f(x) + g(x) = A \cos kx \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = -vf'(x) + vg'(x) = B \sin kx \end{cases}$$

第2式の両辺を0から x まで積分することにより、

$$-vf(x) + vg(x) + vf(0) - vg(0) = -\frac{B}{k} \cos kx + \frac{B}{k}$$

$$\therefore f(x) - g(x) = \frac{B}{kv} \cos kx + C \quad (\text{但し、} C = -\frac{B}{kv} + f(0) - g(0))$$

これを解いて、

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(A + \frac{B}{kv} \right) \cos kx + \frac{C}{2}, g(x) = \frac{1}{2} \left(A - \frac{B}{kv} \right) \cos kx - \frac{C}{2}$$

$$\therefore \psi(x, t) = \frac{1}{2} \left(A + \frac{B}{kv} \right) \cos(kx - kv t) + \frac{1}{2} \left(A - \frac{B}{kv} \right) \cos(kx + kv t) \quad \blacksquare$$

(3)

$\chi_s(x, t) = C \cos(kx - \omega t)$ において (B) に代入すると、

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) C \cos(kx - \omega t) = F_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$- \left(\frac{\omega^2}{v^2} - k^2 \right) C \cos(kx - \omega t) = F_0 \cos(kx - \omega t)$$

これが恒等式となるには、

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) C = F_0$$

$$\therefore C = \frac{v^2}{k^2 v^2 - \omega^2} F_0 \quad (\because \omega \neq kv)$$

よって、

$$\chi_s(x, t) = \frac{v^2}{k^2 v^2 - \omega^2} F_0 \cos(kx - \omega t) \quad \blacksquare$$

(4)

(1), (3) の結果より、

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi(x, t) = 0 \\ \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \chi_s(x, t) = F(x, t) \end{cases}$$

なので、微分の線形性より、

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \{ \psi(x, t) + \chi_s(x, t) \} = F(x, t)$$

これより、 $\chi(x, t) = \psi(x, t) + \chi_s(x, t)$ は (B) の解である。

次に、この形で表せないものは (B) の解とはなり得ないことを示す。

$\tilde{\chi}(x, t) = \psi(x, t) + \chi_s(x, t) + h(x, t)$ なる関数を考える。但し、 $h(x, t)$ は (A) の一般解ではないとする。即ち、

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) h(x, t) \neq 0$$

$\tilde{\chi}(x, t)$ を(B)の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \{ \psi(x, t) + \chi_s(x, t) \} + \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) h(x, t) \\ &= F(x, t) + \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) h(x, t) \neq F(x, t) \end{aligned}$$

これより、これは(B)の解ではない。即ち、 $\chi(x, t) = \psi(x, t) + \chi_s(x, t)$ の形で表せないものは(B)の解とはなり得ない。

よって、(B)の一般解は $\chi(x, t) = \psi(x, t) + \chi_s(x, t)$ で与えられる。 ■

これより、

$$\chi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) + \frac{v^2}{k^2 v^2 - \omega^2} F_0 \cos(kx - \omega t)$$

与えられた初期条件を代入すると、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \chi(x, 0) = f(x) + g(x) + \frac{v^2}{k^2 v^2 - \omega^2} F_0 \cos kx = A \cos kx \\ \frac{\partial \chi}{\partial t}(x, 0) = -vf'(x) + vg'(x) - \frac{\omega v^2}{k^2 v^2 - \omega^2} F_0 \sin kx = B \sin kx \end{cases} \\ & \rightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = \left(A - \frac{v^2}{k^2 v^2 - \omega^2} F_0 \right) \cos kx \\ -vf'(x) + vg'(x) = \left(B + \frac{\omega v^2}{k^2 v^2 - \omega^2} F_0 \right) \sin kx \end{cases} \end{aligned}$$

これは(2)に於いて $A \rightarrow A - \frac{v^2}{k^2 v^2 - \omega^2} F_0, B \rightarrow B + \frac{\omega v^2}{k^2 v^2 - \omega^2} F_0$ とした場合に相当するので、

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \left(A + \frac{B}{kv} + \frac{v}{k} \frac{1}{\omega - kv} F_0 \right) \cos kx \\ g(x) = \frac{1}{2} \left(A - \frac{B}{kv} - \frac{v}{k} \frac{1}{\omega + kv} F_0 \right) \cos kx \end{cases}$$

よって、

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= \frac{1}{2} \left(A + \frac{B}{kv} + \frac{v}{k} \frac{1}{\omega - kv} F_0 \right) \cos(kx - kvt) + \frac{1}{2} \left(A - \frac{B}{kv} - \frac{v}{k} \frac{1}{\omega + kv} F_0 \right) \cos(kx + kvt) \\ &\quad + \frac{v^2}{k^2 v^2 - \omega^2} F_0 \cos(kx - \omega t) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(5)

$\omega \rightarrow kv$ とすると、 $\cos(kx - kvt)$ と $\cos(kx - \omega t)$ ($\rightarrow \cos(kx - kvt)$) の振幅が無限大に発散する。これは x 軸正方向に進む波動の共振現象（共鳴現象）を表している。 ■

講評（蛇足）

全体的に時間のかかる面倒臭い問題が多いです。解ける問題から解いていかないと時間切れになる可能性があるので注意しましょう。

1

(1)

バネの自然長の位置や長さなど設問に条件の抜けが多いですが、（やり易いように）適宜補いましょう。試験本番では質問して条件を確認した方が無難です。

(2), (3)

お馴染みのやつです。これは問題無いでしょう。

2

(1)

オイラーの公式を使って実数に直すのを忘れないようにしましょう。

(2)

$\Delta k \propto a^{-1}$ については $\sin ak$ の挙動を考えてみれば分かります。なお、授業ではこの関係性と不確定性原理 ($\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$) との関連が述べられていました。

3

(1)

代入して解であることを示しても間違いとは言い切れませんが、これは実際に波動方程式を解いて示した方が良いと思われます。

(2), (3)

誘導に従えば楽勝です。

(4)

波動方程式を実際に解いてこの形を導くことは事実上不可能です。なので、このような手法をとりました。一般解とは、方程式の解を「もれなく」網羅しているような解のことを言います。

(5)

「共振現象（共鳴現象）」の名を出すと評価が上がるかも？無限大に発散してしまうのは摩擦力等の散逸力を一切考慮していないことに依ります。

※このシケプリは平成 25 年度冬学期に開講された振動・波動論（森松治教授）用のものです。

質問・指摘等は以下のコメント欄まで。

<http://green.ap.teacup.com/soul6/206.html#comment>