# 振動・波動論　過去問解答

平成 25 年度入学理科Ⅰ類 28 組　sou16

平成 24 年度（？）冬学期の期末試験で理ⅡⅢに対して出題された振動・波動論（森松治教授）の問題の解答です。

1

(1)

$\theta_1 = \theta_2 = 0$なる状態でポテンシャルエネルギーが 0 だとすると、この系のポテンシャルエネルギーは、

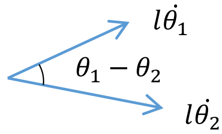
$$\begin{aligned} V &= mgl(1-\cos\theta_1) + mgl(2-\cos\theta_1-\cos\theta_2) \\ &= mgl(3-2\cos\theta_1-\cos\theta_2) \end{aligned}$$

また、この系の運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}_1\right)^2 + \frac{1}{2}m\left\{\left(l\dot{\theta}_1\right)^2 + \left(l\dot{\theta}_2\right)^2 + 2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right\}$$

$$\approx ml^2{\dot{\theta}_1}^2 + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}ml^2{\dot{\theta}_2}^2 \quad (\because \theta_1, \theta_2 \ll 1)$$

（下の質点の速度はベクトルの足し合わせで表されます。
速度の 2 乗なので内積を考えましょう。
単純に$l\dot{\theta}_1 + l\dot{\theta}_2$としても同じ結果になりますが…）




これより、この系のラグランジアンは、

$$L = ml^2{\dot{\theta}_1}^2 + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}ml^2{\dot{\theta}_2}^2 - mgl(3-2\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

オイラー＝ラグランジュ方程式より、

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0 & \cdots① \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta_2} = 0 & \cdots② \end{cases}$$

①より、

$$\frac{d}{dt}\left\{2ml^2\dot{\theta}_1 + ml^2\dot{\theta}_2\right\} + 2mgl\sin\theta_1 = 0$$

$$2ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2 + 2mgl\sin\theta_1 = 0$$

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -\frac{2g}{l}\sin\theta_1$$

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -\frac{2g}{l}\theta_1 \quad (\because \theta_1 \ll 1)$$

②より、

$$\frac{d}{dt}\left\{ml^2\dot{\theta}_1 + ml^2\dot{\theta}_2\right\} + mgl\sin\theta_2 = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2 + mgl\sin\theta_2 = 0$$

$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l}\sin\theta_2$$

$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l}\theta_2 \quad (\because \theta_2 \ll 1)$$

以上より、

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -\dfrac{2g}{l}\theta_1 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -\dfrac{g}{l}\theta_2 \end{cases}$$

これを解いて、

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l}(2\theta_1 - \theta_2)\ ,\ddot{\theta}_2 = -\frac{2g}{l}(\theta_2 - \theta_1) \quad ■$$

(2)

$\theta_j = c_j e^{i\omega t}$とおいて(1)の式に代入すると、

$$\begin{cases} -\omega^2 c_1 e^{i\omega t} = -\dfrac{2g}{l}c_1 e^{i\omega t} + \dfrac{g}{l}c_2 e^{i\omega t} \\ -\omega^2 c_2 e^{i\omega t} = -\dfrac{2g}{l}c_2 e^{i\omega t} + \dfrac{2g}{l}c_1 e^{i\omega t} \end{cases}$$

$e^{i\omega t} \neq 0$より、

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2g}{l} - \omega^2 & -\dfrac{g}{l} \\ -\dfrac{2g}{l} & \dfrac{2g}{l} - \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

これが$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$なる解を持てば良いので、

$$\begin{vmatrix} \dfrac{2g}{l} - \omega^2 & -\dfrac{g}{l} \\ -\dfrac{2g}{l} & \dfrac{2g}{l} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \left(\frac{2g}{l} - \omega^2\right)^2 - \frac{2g^2}{l^2} = 0 \quad ■$$

(3)

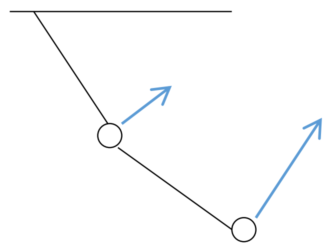
(2)の式を解いて、

$$\omega = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \blacksquare$$

(4)

(3)で求めた解を(2)の式に代入して$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$を求める。

・$\omega = \sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}$のとき

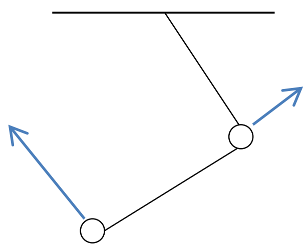


$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}g}{l} & -\frac{g}{l} \\ -\frac{2g}{l} & \frac{\sqrt{2}g}{l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\alpha \quad \alpha \in \boldsymbol{R}$$

よって、基準振動は右図のようになる。 ■

・$\omega = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}$のとき



$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}g}{l} & -\frac{g}{l} \\ -\frac{2g}{l} & -\frac{\sqrt{2}g}{l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}\alpha \quad \alpha \in \boldsymbol{R}$$

よって、基準振動は右図のようになる。 ■

２

(1)

(A)の２式を合わせることにより、

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L}\left\{\int_{-L}^{L} f(t)e^{-i\frac{n\pi}{L}t}dt\right\}e^{i\frac{n\pi}{L}x} \quad (-L < x < L)$$

ここで、$L \to \infty$としたときの極限をとると、

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L}\left\{\int_{-L}^{L} f(t)e^{-i\frac{n\pi}{L}t}dt\right\}e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L/\pi}\left\{\int_{-L}^{L} f(t)e^{-i\frac{n}{L/\pi}t}dt\right\}e^{i\frac{n}{L/\pi}x}$$

区分求積法より、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}dt\right\}e^{ikx}dk$$

よって、与式が示され、

$$C(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}dt$$

であることが分かる。　■

(2)

(A)より、

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}dx$$

$$= \frac{1}{2L}\left\{\int_{-a}^{0}(x+a)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}dx + \int_{0}^{a}(a-x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2L}\left\{\left[\left(-\frac{L}{in\pi}x + \frac{L^2}{n^2\pi^2} - \frac{aL}{in\pi}\right)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right]_{-a}^{0} + \left[\left(\frac{L}{in\pi}x - \frac{L^2}{n^2\pi^2} - \frac{aL}{in\pi}\right)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right]_{0}^{a}\right\}$$

$$= \frac{L}{n^2\pi^2}\left(1 - \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}a} + e^{-i\frac{n\pi}{L}a}}{2}\right)$$

$$= \frac{L}{n^2\pi^2}\left\{1 - \cos\left(\frac{n\pi}{L}a\right)\right\} \quad ■ \quad (\because e^{ix} = \cos x + i\sin x)$$

(1)の結果より、

$$C(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx$$

$$=\int_{-a}^{0}(x+a)e^{-ikx}dx+\int_{0}^{a}(a-x)e^{-ikx}dx$$

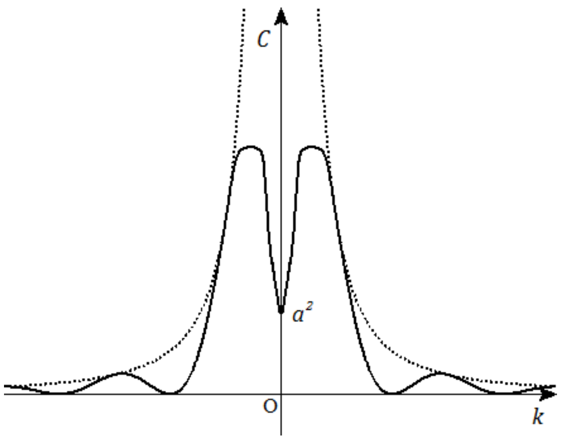
$$=\left[\left(-\frac{1}{ik}x+\frac{1}{k^2}-\frac{a}{ik}\right)e^{-ikx}\right]_{-a}^{0}+\left[\left(\frac{1}{ik}x-\frac{1}{k^2}-\frac{a}{ik}\right)e^{-ikx}\right]_{0}^{a}$$

$$=\frac{1}{k^2}\left(2-e^{ika}-e^{-ika}\right)$$

$$=\frac{2}{k^2}(1-\cos ka)\quad\blacksquare\quad\left(\because e^{ix}=\cos x+i\sin x\right)$$

(3)

当然ですが、両者とも殆ど同じ形になります。(但し、$C_n$は離散的に値をとるのに対し、$C(k)$は連続関数となる。) 以下には$C(k)$のグラフを示します。点線は$4/k^2$のグラフです。$\lim_{k\to 0}C(k)=a^2$となって収束することに注意しましょう。




$\blacksquare$

3

(1)

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(x,t)-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t)=0 \quad ■$$

(2)

$\psi(x,t)$が(B)の形で表されるとき、

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{2}\{\varphi_0(x-vt)+\varphi_0(x+vt)\}+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}dx'\varphi_1(x')\right]$$

$$=\frac{1}{2}\{\varphi_0''(x-vt)+\varphi_0''(x+vt)\}+\frac{1}{2v}\{\varphi_1'(x+vt)-\varphi_1'(x-vt)\}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(x,t)=\frac{v^2}{2}\{\varphi_0''(x-vt)+\varphi_0''(x+vt)\}+\frac{v}{2}\{\varphi_1'(x+vt)-\varphi_1'(x-vt)\}$$

となるので、(1)の波動方程式の左辺に代入すると、

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(x,t)-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t)$$

$$=\frac{1}{2}\{\varphi_0''(x-vt)+\varphi_0''(x+vt)\}+\frac{1}{2v}\{\varphi_1'(x+vt)-\varphi_1'(x-vt)\}$$

$$-\frac{1}{2}\{\varphi_0''(x-vt)+\varphi_0''(x+vt)\}-\frac{1}{2v}\{\varphi_1'(x+vt)-\varphi_1'(x-vt)\}$$

$$=0$$

これより、(B)は波動方程式を満たす。また、

$$\psi(x,0)=\frac{1}{2}\{\varphi_0(x)+\varphi_0(x)\}+\frac{1}{2v}\int_{x}^{x}dx'\varphi_1(x')$$

$$=\varphi_0(x)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)=\frac{1}{2}\{-v\varphi_0'(x)+v\varphi_0'(x)\}+\frac{1}{2v}\{v\varphi_1(x)+v\varphi_1(x)\}$$

$$=\varphi_1(x)$$

より、初期条件も満たすのでこれは確かに解を表している。　■

(3)

(B)より、時刻$t$に於ける位置$x$の変位$\psi(x,t)$に影響を及ぼし得るのは、時間$t$の間速度$v$以下で動いて位置$x$に到達出来る範囲に限られる。即ち、波動に於いては速度（位相速度）$v$以下の速度でのみ情報が伝達されることが分かる。　■

講評（蛇足）

全体的に時間のかかる面倒臭い問題が多いです。解ける問題から解いていかないと時間切れになる可能性があるので注意しましょう。

1

(1)

何故ラグランジアンの段階で$\cos(\theta_1 - \theta_2)$は 1 と近似するのに$\cos\theta_1, \cos\theta_2$はそのままにするのか？…すみません、良く分からないのでどなたか教えて下さい。

(2)，(3)

お馴染みのやつです。これは問題無いでしょう。

2

(1)

定積分が被積分関数になってややこしいですが、きちんと変数を分けて考えましょう。

(2)

積分計算が結構面倒臭いです。虚数単位が混じるのでその扱いに注意。(1)より$k = \frac{n\pi}{L}$であることが分かるので、実際には$C(k)$の方の定積分を計算する必要は無いでしょう。

(3)

流石に増減表を作る必要は無いでしょう。某グラフ描画ソフトでは$k = 0$近傍をちゃんと書いてくれなかったのでフリーハンドで書きました。悪しからず。

3

(1)

物理学のどの分野にも必ずと言って良いほど登場する式です。暗記しましょう。

(2)

実際に波動方程式を解いてこの式を得ることも可能ですが、時間的にかなり無理があるので解になっていることを示せば良いと思われます。

(3)

物理学に於いては得られた式そのものよりも、その式の意味するところの方が重要になってきます。

※このシケプリは平成 25 年度冬学期に開講された振動・波動論（森松治教授）用のものです。

質問・指摘等は以下のコメント欄まで。

http://green.ap.teacup.com/sou16/206.html#comment