数学Ⅱ（川又雄二郎）夏学期　シケプリ ver. 2

制作： 2014 年度入学 理科一類 10 組　熊谷ヤー

数学Ⅱシケ対の熊谷ヤーです。川又雄二郎とかいう教授のすばらしい授業(笑)を受けたかったが諸事情により受けられなかった人のためにこのシケプリを作りました。川又教授のすばらしい板書(笑)を上げてもよかったのですが，あまりにのすばらしさに目も向けられないと思うので，あえてここにまとめました。

Ver.2 では Ver.1 の細かい訂正と過去問の解答を追加しました。間違いや訂正，要望等ありましたら熊谷ヤーまで連絡してください。それではみなさんテスト頑張って気持ちよく休みを迎えましょう。

～目次～

1. 板書まとめ(前半)

～内積～

①定義

$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角θを用いた値$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$を$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積といい，$\vec{a}\cdot\vec{b}$で表す。

②性質

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　（※補足１）　　　　$(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2})\cdot\vec{b}=\overrightarrow{a_1}\cdot\vec{b}+\overrightarrow{a_2}\cdot\vec{b}$　（※補足２）

③成分表示

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$　（※補足３）

例

$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot1+1\cdot2+3\cdot(-1)=1$

～外積～

①定義（３次元のみ定義される）

$\vec{a}$と$\vec{b}$に対し，次の２つを満たすベクトルを$\vec{a}$と$\vec{b}$の外積といい，$\vec{a}\times\vec{b}$で表す。

- 大きさが$\vec{a}$と$\vec{b}$の張る平行四辺形の面積である。つまり，$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$
- 向きが$\vec{a}$と$\vec{b}$の張る平行四辺形に垂直で，$\vec{a}$から$\vec{b}$へねじったときに右ねじが進む向きである。

②性質

$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$　（※補足４）　　　　$(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2})\times\vec{b}=\overrightarrow{a_1}\times\vec{b}+\overrightarrow{a_2}\times\vec{b}$　（※補足５）

③成分表示

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$のとき，$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$　（※補足６）

例

$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$のとき，$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)-3\cdot2\\3\cdot1-2\cdot(-1)\\2\cdot2-1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\5\\3\end{pmatrix}$

～線形写像～

①定義

写像Fが$F(\vec{a}+\vec{b})=F(\vec{a})+F(\vec{b}),F(c\vec{a})=cF(\vec{a})$を満たすとき，$F$を線形写像という。

②行列表示

線形写像$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$が$F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},F\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$のとき，$F=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$と表す。

任意のベクトル$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$の像は，$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+cy\\bx+dy\end{pmatrix}$（※補足７）

例

$F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},F\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$のとき，$F=\begin{pmatrix}2&3\\1&-1\end{pmatrix}$より$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+3y\\x-y\end{pmatrix}$

～行列～

①定義

自然数m,nに対し，mn個の数を$m\times n$の長方形に並べた表を(m,n)型の行列といい，(i,j)成分がa_{ij}であるような行列を$\left(a_{ij}\right)$で表す。

②行列と写像

(m,n)型の行列$A=\left(a_{ij}\right)$は$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$の写像と等価で，$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\vec{y}=A\vec{x}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$とすると，$y_i=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$

$A(\vec{x}+\vec{y})=A\vec{x}+A\vec{y}$，$A(c\vec{x})=cA\vec{x}$（※補足８）が成立するため，行列による写像は線形写像である。

③行列の積

(m,n)型の行列$A=\left(a_{ij}\right)$，(n,l)型の行列$B=\left(b_{ij}\right)$の積ABは$A(B\vec{x})=(AB)(\vec{x})$を満たすような行列とする。

$C=AB=\left(c_{ij}\right)$とすると，$c_{ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$（※補足９）

例

$A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\3&-2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&-1\\2&3\end{pmatrix}$のとき，$AB=\begin{pmatrix}1\cdot4+2\cdot2&1\cdot(-1)+2\cdot3\\(-1)\cdot4+3\cdot2&(-1)\cdot(-1)+3\cdot3\\3\cdot4+(-2)\cdot2&3\cdot(-1)+(-2)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&5\\2&10\\8&-9\end{pmatrix}$

～基本変形～

①基本行列

次の３つの行列を基本行列という。

Ⅰ：単位行列のi行とj行$(i\neq j)$を入れ替えた行列

$$P_{ij}=\begin{pmatrix}\ddots&&&&&&\\&1&&&&&\\&&0&\cdots&\cdots&1&\\&&\vdots&1&&\vdots&\\&&&&\ddots&&\\&&\vdots&&1&\vdots&\\&&1&\cdots&\cdots&0&\\&&&&&&1\\&&&&&&&\ddots\end{pmatrix}$$

Ⅱ：単位行列の(i,i)成分を$c(\neq 0)$で置き換えた行列

$$Q_{i,c}=\begin{pmatrix}\ddots&&&\\&1&&&\\&&c&&\\&&&1&\\&&&&\ddots\end{pmatrix}$$

Ⅲ：単位行列の(i,j)成分$(i\neq j)$を$c(\neq 0)$で置き換えた行列

$$R_{ij,c}=\begin{pmatrix}\ddots&&&\\&1&\cdots&c&\\&&\ddots&\vdots&\\&&&1&\\&&&&\ddots\end{pmatrix}$$

②基本変形

行列に基本行列をかけることを基本変形という。つまり，ある行列に以下の操作をすることである。

$P_{ij}A$：Aのi行とj行を入れ替える

AP_{ij}：Aのi列とj列を入れ替える

$Q_{i,c}A$：Aのi行をc倍する

$AQ_{i,c}$：Aのi列をc倍する

$R_{ij,c}A$：Aのi行にj行をc倍したものを加える

$AR_{ij,c}$：Aのj列にi列をc倍したものを加える

③階数

任意の行列Aに対し，うまく基本変形を繰り返すことによって次のように変形できる。（※補足１０）

$$XAY = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$ （対角成分以外はすべて 0，X, Yは基本行列の積）

左上に続く１の数をAの階数といい，$\mathrm{rank}A$で表す。これはAに固有の値である。（※補足１１）

例

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 8 \\ 3 & -3 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$ のとき，

$$A \to A_1 = Q_{4,\frac{1}{2}}Q_{2,-\frac{1}{2}}AQ_{1,-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to A_2 = A_1R_{12,-5}R_{12,-7}R_{14,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ -3 & 12 & 18 & -2 \\ 2 & -9 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to A_3 = R_{41,-2}R_{31,3}A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 12 & 18 & -2 \\ 0 & -9 & -11 & 0 \end{pmatrix} \to A_4 = A_3Q_{4,-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 18 & 1 \\ 0 & -9 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to A_5 = A_4R_{23,-1}R_{24,-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & -23 \\ 0 & -9 & -2 & 18 \end{pmatrix} \to A_6 = R_{42,9}R_{32,-12}A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -23 \\ 0 & 0 & -2 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\to A_7 = P_{34}Q_{4,-\frac{1}{2}}A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 6 & -23 \end{pmatrix} \to A_8 = A_7R_{34,9} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 31 \end{pmatrix}$$

$$\to A_9 = R_{43,-6}A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 31 \end{pmatrix} \to A_{10} = Q_{4,\frac{1}{31}}A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases} X = Q_{4,\frac{1}{31}}R_{43,-6}P_{34}Q_{4,-\frac{1}{2}}R_{42,9}R_{32,-12}R_{41,-2}R_{31,3}Q_{4,\frac{1}{2}}Q_{2,-\frac{1}{2}} \\ Y = Q_{1,-1}R_{12,-5}R_{12,-7}R_{14,1}Q_{4,-\frac{1}{2}}R_{23,-1}R_{24,-2}R_{34,9} \end{cases}$ とおくと，$XAY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

よって，$\mathrm{rank}A = 4$

～逆行列～

①定義

行列Aに対し，$AB = BA = E$（単位行列）となるようなBをAの逆行列といい，A^{-1}で表す。

(n, n)型の行列を正方行列といい，その階数がnのとき，逆行列が存在する。（※補足１２）また，逆行列が

存在するような行列を正則行列という。

②求め方

Aを(n,n)型の正則行列とするとき，$(n,2n)$型の行列$(A\ E)$に左基本変形(左から基本行列をかけること)を繰り返して$(A\ E)\to(E\ B)$としたときのBが逆行列$B=A^{-1}$となる。（※補足１３）

例

$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&6&3\\-2&-5&-2\end{pmatrix}$とする。

$$(A\ E)=\begin{pmatrix}1&3&2&1&0&0\\2&6&3&0&1&0\\-2&-5&-2&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&1&0&0\\0&0&-1&-2&1&0\\0&1&2&2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4&-5&0&-3\\0&0&1&2&-1&0\\0&1&2&2&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&-4&-3\\0&0&1&2&-1&0\\0&1&0&-2&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&-4&-3\\0&1&0&-2&2&1\\0&0&1&2&-1&0\end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{rank}A=3$だからA^{-1}が存在して$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-4&-3\\-2&2&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$

～順列と互換～

①順列

$\{1,2,\cdots,n\}$を一列に配列したものを順列といい，配列の仕方は$n!$通り。ここではこの配列を$\vec{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$で表す。（※補足１４）

②互換

ある順列の２つの数字を入れ替えることを互換という。任意の順列は互換を繰り返して得られ，その際に必要な互換の回数の偶奇は互換の仕方によらない。（※補足１５）

③符号

$(1,2,\cdots,n)$に互換を繰り返して順列$\vec{p}$にするのに必要な互換の回数の偶奇を$\vec{p}$の符号といい，$\mathrm{s}(\vec{p})$や$\mathrm{sgn}(\vec{p})$で表す。$\mathrm{s}(\vec{p})$の値は，偶数回の互換が必要なときは１，奇数回の互換が必要なときは－１と定義する。（※補足１６）

例

$\vec{p}=(5,1,4,3,2)$とする。

$(1,2,3,4,5)\to(5,2,3,4,1)\to(5,1,3,4,2)\to(5,1,4,3,2)$　$\cdots$3回(奇数回)

$(1,2,3,4,5)\to(1,2,5,4,3)\to(5,2,1,4,3)\to(5,1,2,4,3)\to(5,1,4,2,3)\to(5,1,4,3,2)$　$\cdots$5回(奇数回)

よって，$\mathrm{s}(\vec{p})=-1$

～行列式～

①定義

n次正方行列$A=(a_{ij})$に対し，$\displaystyle\sum_{\vec{p}}\mathrm{s}(\vec{p})a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$により定まる値を$A$の行列式といい，$|A|$や$\det A$で表す。

②性質

$\det(\vec{v_1},\cdots,\vec{v_i},\cdots,\vec{v_j},\cdots,\vec{v_n})=-\det(\vec{v_1},\cdots,\vec{v_j},\cdots,\vec{v_i},\cdots,\vec{v_n})$（※補足１７）

$\det(\vec{v_1},\cdots,\vec{v_i}+\vec{v_i}',\cdots,\vec{v_n})=\det(\vec{v_1},\cdots,\vec{v_i},\cdots,\vec{v_n})+\det(\vec{v_1},\cdots,\vec{v_i}',\cdots,\vec{v_n})$（※補足１８）

$\det(\vec{v_1},\cdots,c\vec{v_i},\cdots,\vec{v_n})=c\det(\vec{v_1},\cdots,\vec{v_i},\cdots,\vec{v_n})$（※補足１９）

③行列式の展開

Aのi行目とj列目を除いた行列をA_{ij}と表すと，$|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$ （※補足２０）

基本行列の行列式が$|P_{ij}|=-1, |Q_{i,c}|=c, |R_{ij,c}|=1$（※補足２１）であることと$|AB|=|A||B|$（※補足２２）が成立することを用いると，簡単に行列式を求めることができる。

例

$A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 7 & -1\\ 0 & -2 & -2 & 8\\ 3 & -3 & -3 & 1\\ -4 & 2 & 6 & -4\end{pmatrix}$のとき，$|R_{ij,c}A|=|R_{ij,c}||A|=|A|$より，

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 5 & 7 & -1\\ 0 & -2 & -2 & 8\\ 0 & 12 & 18 & -2\\ 0 & -18 & -22 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot(-1)\begin{vmatrix}-2 & -2 & 8\\ 12 & 18 & -2\\ -18 & -22 & 0\end{vmatrix}=-(-2)\cdot 2\cdot(-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & -4\\ 6 & 9 & -1\\ 9 & 11 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-8\begin{vmatrix}1 & 1 & -4\\ 0 & 3 & 23\\ 0 & 2 & 36\end{vmatrix}=-8\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}3 & 23\\ 2 & 36\end{vmatrix}=-8\cdot 2\begin{vmatrix}3 & 23\\ 1 & 18\end{vmatrix}=-16\begin{vmatrix}0 & -31\\ 1 & 18\end{vmatrix}=-16\cdot 31=-496$$

～クラメルの公式～

①余因子行列

$(-1)^{i+j}|A_{ij}|$をAの(i,j)余因子といい，$\tilde{a}_{ij}$で表す。$\tilde{a}_{ji}$を(i,j)成分とする行列をAの余因子行列といい，$\tilde{A}$で表す。これに関して，$A\tilde{A}=|A|E$が成立する。（※補足２３）

②正則と行列式

A が正則行列 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$（※補足２４）

③クラメルの公式

(n,n)型の正則行列$A=(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n})$，$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$を用いて表される連立方程式$A\vec{x}=\vec{b}$の解は，

$$x_i=\frac{\det(\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_{i-1}},\vec{b_i},\overrightarrow{a_{i+1}},\cdots,\overrightarrow{a_n})}{\det(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n})}$$ （※補足２５）

例

連立方程式$\begin{cases}x+2y+3z=2\\ 2x-y+z=-1\\ x+3y-2z=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 9\end{pmatrix}$を考える。

$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -5 & -5\\ 0 & 1 & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & -5\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -6\end{vmatrix}=30$ より，

$$x=\frac{1}{30}\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ -1 & -1 & 1\\ 9 & 3 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{30}\begin{vmatrix}0 & 0 & 5\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & -6 & 7\end{vmatrix}=\frac{1}{30}\begin{vmatrix}0 & 5\\ -6 & 7\end{vmatrix}=1$$

$$y=\frac{1}{30}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 9 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{30}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -5 & -5\\ 0 & 7 & -5\end{vmatrix}=\frac{1}{30}\begin{vmatrix}-5 & -5\\ 7 & -5\end{vmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 7 & -5\end{vmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -12\end{vmatrix}=2$$

$$z=\frac{1}{30}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 9\end{vmatrix}=\frac{1}{30}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & -5 & -5\\ 0 & 1 & 7\end{vmatrix}=\frac{1}{30}\begin{vmatrix}-5 & -5\\ 1 & 7\end{vmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 7\end{vmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 6\end{vmatrix}=-1$$

2. 板書まとめ(後半)

～集合～

①直積

集合X,Yに対し，$\{(x,y)|x\in X,y\in Y\}$をX,Yの直積といい$X\times Y$で表す。特に$X\times X$はX^2で表す。

②位数

有限集合Xの元の個数をXの位数といい，$|X|$で表す。

直積の位数について$|X\times Y|=|X||Y|$が成立する。（積の法則）

例

$X=\{a,b\},Y=\{1,2,3\}$のとき，$|X|=2,|Y|=3$

$X\times Y=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$より$|X\times Y|=6=|X||Y|$

～写像～

①定義

XからYへの写像fとは，Xの元１つにつきYの元１つを対応させる規則のことを言う。

②全単射

写像$f:X\to Y$でXの元とYの元が１対１対応するようなfを全単射という。（※補足２６）

③写像の集合

XからYへの写像全体の集合を$\mathrm{Hom}(X,Y)$で表す。$|\mathrm{Hom}(X,Y)|=|Y|^{|X|}$（重複順列）

例

$X=\{a,b\},Y=\{1,2,3\}$のとき，$f:X\to Y$として考えられるのは

$(f(a),f(b))=(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)$を満たすような$f$で順に$f_1,f_2,\ldots,f_9$とすると，

$\mathrm{Hom}(X,Y)=\{f_1,f_2,\ldots,f_9\}$より$|\mathrm{Hom}(X,Y)|=9=3^2=|Y|^{|X|}$

～複素数平面～

①定義

複素数$a+bi$を点(a,b)に対応させた平面を複素数平面という。

②和

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ はベクトルの和$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}$に対応する。

③積

$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ は線形変換$\begin{pmatrix}c&-d\\d&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac-bd\\ad+bc\end{pmatrix}$に対応する。

極座標を考えて，$(c,d)=r(\cos\theta,\sin\theta)$と書くと，$\begin{pmatrix}c&-d\\d&c\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$より，

角度をθ回転させ，長さをr倍させる変換を表す行列に対応する。（※補足２７）

～基底～

①定義

$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_n}$が$\mathbb{R}^n$の基底であるとは，$\mathbb{R}^n$の任意のベクトル$\vec{v}$に対して，$a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$が一意に存在して，

$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v_i}$ と書けることをいう。

②正規直交基底

$\mathbb{R}^n$ の基底$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$のうち，$\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ (i = j) \\ 0 \ (i \neq j) \end{cases}$ を満たすものを正規直交基底という。

正規直交基底はシュミットの直交化法（※補足２８）により作ることができる。

③一次独立・一次従属

$\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{v_i} = \vec{0}$を満たすとき，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ ならば，$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$は一次独立であるといい，そうではないならば，一次従属という。

$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$が$\mathbb{R}^n$の基底となるのは$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$が一次独立であるときである。（※補足２９）

例

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より，$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は$\mathbb{R}^2$の基底であり，

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = 0$，$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 1$，$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = 1$ より，正規直交基底である。

$\frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{b}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると，$a = b = 0$ より，$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は一次独立である。

～転置行列～

①定義

$A = (a_{ij})$に対し，(a_{ji})によって定まる行列をAの転置行列といい，${}^tA$で表す。

②性質

${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$　（※補足３０）　　${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$　（※補足３１）

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ のとき，${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, {}^tB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, {}^tA + {}^tB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ より，${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

$AB = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}, {}^tB\,{}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$ より，${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

～核と像～

①定義

行列Aによる線形写像f_Aについて，$\{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$を$A$の核，$\{\vec{y} \mid A\vec{x} = \vec{y}\}$を$A$の像といい$\mathrm{Ker}f_A$，$\mathrm{Im}f_A$で表す。

②連立方程式の解

連立方程式$A\vec{x} = \vec{y}$の解の全体集合は１つの解$\overrightarrow{x_0}$を用いて，$\{\overrightarrow{x_0}\} + \mathrm{Ker}f_A$と表される。（※補足３２）

例

連立方程式$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 3x+y-z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$を考える。

$(x,y,z)=(1,1,0)$はこの方程式の解の１つである。

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$とすると，$y=4x, z=7x$より，$\mathrm{Ker} f_A = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, \vec{x} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} \right\}$

よって，解は$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

～線型部分空間～

①定義

$\mathbb{R}^n$の部分集合Lに対して，$\vec{v} \in L, a \in \mathbb{R} \Rightarrow a\vec{v} \in L$，$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in L \Rightarrow \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \in L$を満たすとき$L$を$\mathbb{R}^n$の線型部分空間という。

②次元

線型部分空間Lの基底の元の数を次元といい，$\dim L$で表す。これは基底のとり方によらない値である。（※補足３３）

例

$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x+y+z=0 \right\}$とする。

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in L \Rightarrow x+y+z=0 \Rightarrow ax+ay+az=0 \Rightarrow a\vec{v} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix} \in L$

$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in L \Rightarrow x_1+y_1+z_1=0, x_2+y_2+z_2=0 \Rightarrow (x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} \in L$

よって，Lは$\mathbb{R}^3$の線型部分空間である。

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in L$のとき，$z=-x-y$より，$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$より，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$は$L$の基底

よって，$\dim L = 2$

～直交補空間～

①核と像の基底

(n,m)型の行列Aの表す写像$f_A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$を考える。$\mathrm{Ker} f_A$の基底を$\{v_1, \cdots, v_s\}$，$\mathrm{Im} f_A$の基底を$\{w_1, \cdots, w_t\}$，$f_A(u_i) = w_i \ (i=1,\cdots,t)$とすると，$\{v_1,\cdots,v_s,u_1,\cdots,u_t\}$は$\mathbb{R}^m$の基底である。（※補足３４）

②転置行列と内積

$A\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot {}^t A\vec{v}$が成立する。（※補足３５）

③直交補空間

$\mathbb{R}^n$の線型部分空間Vに含まれる任意の$\vec{v}$に対し，$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$となるような$\vec{w}$の集合を$V$の直交補空間といい，$V^{\perp}$で表す。$\dim V + \dim V^{\perp} = n$，$\mathrm{Im}(f_{\,{}^tA})^{\perp} = \mathrm{Ker}(f_A)$，$\mathrm{Im}(f_{\,{}^tA}) = \mathrm{Ker}(f_A)^{\perp}$（※補足３６）が成り立つ。

3. 補足

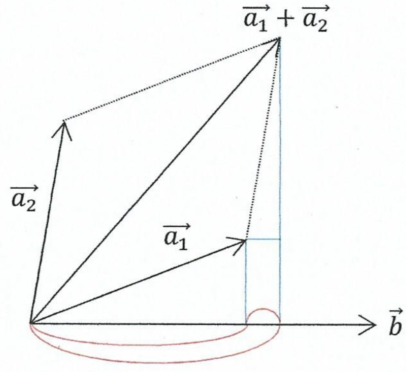
※補足１

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta=\vec{b}\cdot\vec{a}$

※補足２

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(|\vec{a}|\cos\theta)|\vec{b}|$より，$\vec{a}\cdot\vec{b}$は$\vec{a}$の$\vec{b}$への正射影の大きさと$\vec{b}$の大きさの積であるから，あるベクトル$\vec{x}$へのの$\vec{y}$正射影を$\vec{x}_{\vec{y}}$と書くと，

$(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2})_{\vec{b}}=\overrightarrow{a_1}_{\vec{b}}+\overrightarrow{a_2}_{\vec{b}}$より，$(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2})\cdot\vec{b}=\overrightarrow{a_1}\cdot\vec{b}+\overrightarrow{a_2}\cdot\vec{b}$



※補足３

$$\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}a_i\vec{e_i},\quad \vec{b}=\sum_{j=1}^{n}b_j\vec{e_j},\quad \vec{e_i}\cdot\vec{e_j}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}\text{より，}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{i=j}a_ib_j\,\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}+\sum_{i\neq j}a_ib_j\,\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

※補足４

$\vec{a}\times\vec{b}$と$\vec{b}\times\vec{a}$は大きさは等しく向きは逆であるから，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$

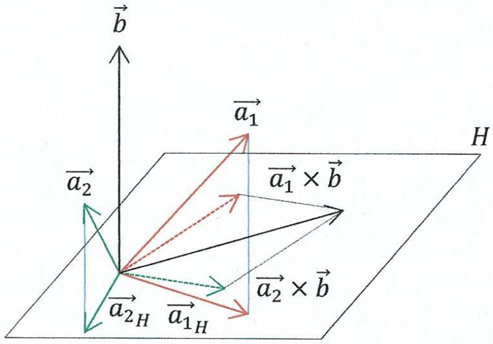
※補足５

$\vec{b}$の始線を含み，$\vec{b}$を法線ベクトルとする平面をHとする。

$\overrightarrow{a_1}\times\vec{b}=\overrightarrow{a_1}_H\times\vec{b}$かつ$\overrightarrow{a_1}\times\vec{b}$は平面$H$上だから，$\overrightarrow{a_1}\times\vec{b}$は$\overrightarrow{a_1}_H$を

$90°$回転させて$|\vec{b}|$倍したベクトルである。よって，

$(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2})_H=\overrightarrow{a_1}_H+\overrightarrow{a_2}_H$より，$(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2})\times\vec{b}=\overrightarrow{a_1}\times\vec{b}+\overrightarrow{a_2}\times\vec{b}$



※補足６

$\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3},\quad \vec{b}=b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+b_3\overrightarrow{e_3},$

$\vec{e_i}\times\vec{e_i}=\vec{0},\quad \vec{e_i}\times\overrightarrow{e_{i+1}}=\overrightarrow{e_{i+2}},\quad \overrightarrow{e_{i+2}}\times\overrightarrow{e_{i+1}}=-\vec{e_i}$

$(i=1,2,3,\quad \overrightarrow{e_4}=\overrightarrow{e_1},\quad \overrightarrow{e_5}=\overrightarrow{e_2})$より，

$$\vec{a}\times\vec{b}=a_1b_2\overrightarrow{e_3}+a_2b_3\overrightarrow{e_1}+a_3b_1\overrightarrow{e_2}+a_3b_2(-\overrightarrow{e_1})+a_1b_3(-\overrightarrow{e_2})+a_2b_1(-\overrightarrow{e_3})$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)\overrightarrow{e_1}+(a_3b_1-a_1b_3)\overrightarrow{e_2}+(a_1b_2-a_2b_1)\overrightarrow{e_3}$$

※補足７

$$F(\vec{x})=F(x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2})=F(x\overrightarrow{e_1})+F(y\overrightarrow{e_2})=xF(\overrightarrow{e_1})+yF(\overrightarrow{e_2})=\begin{pmatrix}ax+cy\\ bx+dy\end{pmatrix}$$

逆にこのとき，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$とすると，

$$F(\vec{a}+\vec{b})=\begin{pmatrix}(a_1+b_1)a+(a_2+b_2)c\\ (a_1+b_1)b+(a_2+b_2)d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1a+a_2c\\ a_1b+a_2d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1a+b_2c\\ b_1b+b_2d\end{pmatrix}=F(\vec{a})+F(\vec{b})$$

$$F(k\vec{a})=\begin{pmatrix}ka_1a+ka_2c\\ ka_1b+ka_2d\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a_1a+a_2c\\ a_1b+a_2d\end{pmatrix}=kF(\vec{a})$$

※補足８

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x_j + y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j$$ より，$A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(cx_j\right) = c\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$ より，$A(c\vec{x}) = cA\vec{x}$

※補足９

$\vec{x} = (x_i), \vec{y} = B\vec{x} = (y_i), \vec{z} = A\vec{y} = (z_i)$とする。

$$y_i = \sum_{j=1}^{l} b_{ij}x_j\,,\quad z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{l} b_{kj}x_j\right) = \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)x_j = \sum_{j=1}^{l} c_{ij}x_j$$

よって，$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

※補足１０

(m,n)型の行列を$A^{(m,n)}$と表す。

$A^{(1,1)} = (a)$とすると，$a = 0$ ならば$A^{(1,1)} = (0)$，$a \neq 0$ ならば$Q_{1,\frac{1}{a}}A^{(1,1)} = (1)$

$A^{(m,n)}$で可能であると仮定すると，
$A^{(m+1,n)} = \left(a_{ij}\right)$について，$a_{ij} = 0(\forall i,j)$のときは，$A^{(m+1,n)} = O$

そうではないときには$a_{ij} \neq 0$ となるi,jが存在し，$B = P_{1i}Q_{i,\frac{1}{a_{ij}}}A^{(m,n)}P_{1j} = \left(b_{ij}\right)$とすれば，$b_{11} = 1$

$C = B\prod_{j>1} R_{1j,b_{1,j}} = \left(c_{ij}\right)$とすれば，$c_{1,i} = \begin{cases} 1\ (i=1) \\ 0\ (i \neq 1) \end{cases}$ より，$e = (1,0,\cdots,0)$とおくと，$C = \begin{pmatrix} e \\ A^{(m,n)} \end{pmatrix}$
仮定より$A^{(m+1,n)}$でも可能である。
同様に$A^{(m,n+1)}$でも可能であるため，任意の行列Aで可能である。

※補足１１

$f_{ij,r} = \begin{cases} 1\ (i = j \leqq r) \\ 0\ (i \neq j, i = j > r) \end{cases}$ を(i,j)成分とする行列を$F(r) = \left(f_{ij,r}\right)$とおく。

$X_1AY_1 = F(r), X_2AY_2 = F(s)(r < s)$と書けるとすると，$F(s) = X_2{X_1}^{-1}F(r){Y_1}^{-1}Y_2$
$X_2{X_1}^{-1} = \left(x_{ij}\right)$，${Y_1}^{-1}Y_2 = \left(y_{ij}\right)$とおき，両辺の成分を比較すると，

$$f_{ij,s} = \sum_{l}\sum_{k} x_{ik}f_{kl,r}y_{lj} = \sum_{l} x_{il}f_{ll,r}y_{lj} = \sum_{l=1}^{r} x_{il}y_{lj}$$

よって，(s,r)型の行列$X = \left(x_{ij}\right)$，(r,s)型の行列$Y = \left(y_{ij}\right)$を定めると，$XY = E$

$(s,s-r)$の零行列Oを定めると，$(X\ O)\begin{pmatrix} Y \\ {}^tO \end{pmatrix} = XY = E$より，$(X\ O)$は正則であるが$|X\ O| = 0$ となり矛盾する。

よって，$r \geqq s$で，対称性より$r \leqq s$としてよいから，$r = s$

※補足１２

基本行列には逆行列が存在する$\left(P_{ij}{}^{-1}=P_{ij}, Q_{i,c}{}^{-1}=Q_{i,\frac{1}{c}}, R_{ij,c}{}^{-1}=R_{ij,-c}\right)$ため，$XAY=E$より，$A^{-1}=X^{-1}Y^{-1}$

※補足１３

左基本変形は行に関する操作だから，Xを基本変形として$X(A\ E)=(XA\ X)$が成立する。

よって，$XA=E$のとき$X=B$だから，$BA=E$より，$B=A^{-1}$

※補足１４

授業では$\{1,2,\cdots,n\}$のすべてを用いた配列として定義しているが，正確に言えば重複なく一列に配列したものを指すため，$\{1,2,\cdots,n\}$をすべて用いた順列というべきである。

※補足１５

$f(\vec{p})=\prod_{i<j}\left(x_{p_j}-x_{p_i}\right)$とおくと，$\vec{p}$の互換$\overrightarrow{p'}$に対し，$f\left(\overrightarrow{p'}\right)=-f(\vec{p})$が成立する。

よって，$\vec{e}=(1,2,\cdots,n)$に互換を繰り返して$\vec{p}$にするのにk回とl回の２通りに表されるとき，

$f(\vec{p})=(-1)^k f(\vec{e})=(-1)^l f(\vec{e})$より，$k$と$l$の偶奇は一致する。

※補足１６

補足１５より，符号を式として表すと，$\mathrm{s}(\vec{p})=\dfrac{f(\vec{p})}{f(\vec{e})}$である。

※補足１７

$\vec{p}$のp_iとp_jの互換$\overrightarrow{p'}$を定めると，$\sum_{\overrightarrow{p'}}\mathrm{s}\left(\overrightarrow{p'}\right)a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=-\sum_{\vec{p}}\mathrm{s}(\vec{p})a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$より，

$\det\left(\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_i},\cdots,\overrightarrow{v_j},\cdots,\overrightarrow{v_n}\right)=-\det\left(\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_j},\cdots,\overrightarrow{v_i},\cdots,\overrightarrow{v_n}\right)$

※補足１８

$\sum_{\vec{p}}\mathrm{s}(\vec{p})a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots\left(a_{ip_i}+a_{ip_i}{}'\right)\cdots a_{np_n}=\sum_{\vec{p}}\mathrm{s}(\vec{p})a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}+\sum_{\vec{p}}\mathrm{s}(\vec{p})a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}{}'\cdots a_{np_n}$より，

$\det\left(\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_i}+\overrightarrow{v_i}{}',\cdots,\overrightarrow{v_n}\right)=\det\left(\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_i},\cdots,\overrightarrow{v_n}\right)+\det\left(\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_i}{}',\cdots,\overrightarrow{v_n}\right)$

※補足１９

$\sum_{\vec{p}}\mathrm{s}(\vec{p})a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots\left(ca_{ip_i}\right)\cdots a_{np_n}=c\sum_{\vec{p}}\mathrm{s}(\vec{p})a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$より，

$\det\left(\overrightarrow{v_1},\cdots,c\overrightarrow{v_i}\cdots,\overrightarrow{v_n}\right)=c\det\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\overrightarrow{v_n}\right)$

※補足２０

$$|A|=\det\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\overrightarrow{e_i},\cdots,\overrightarrow{v_n}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\det\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\overrightarrow{e_i},\cdots,\overrightarrow{v_n}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{j-1}a_{ij}\det\left(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_{j-1}},\overrightarrow{v_{j+1}},\cdots,\overrightarrow{v_n}\right)$$

$$= (-1)^{j-1}a_{1j}\begin{vmatrix}1 & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} + (-1)^{j}a_{2j}\begin{vmatrix}1 & a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{j+n-2}a_{nj}\begin{vmatrix}1 & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n}\end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j-2}a_{ij}|A_{ij}| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$$

※補足２１

$|P_{ij}| = \det(\overrightarrow{e_1},\cdots,\overrightarrow{e_{i-1}},\overrightarrow{e_j},\overrightarrow{e_{i+1}},\cdots,\overrightarrow{e_{j-1}},\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_{j+1}},\cdots,\overrightarrow{e_n}) = -|E| = -1$

$|Q_{i,c}| = \det(\overrightarrow{e_1},\cdots,c\overrightarrow{e_i},\cdots,\overrightarrow{e_n}) = c|E| = c$

$|R_{ij,c}| = |E| + \det(\vec{0},\cdots,\vec{0},c\overrightarrow{e_i},\vec{0},\cdots,\vec{0}) = |E| = 1$

※補足２２

一般に，$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$の写像$F$が

$F(\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_i},\cdots,\overrightarrow{v_j},\cdots,\overrightarrow{v_n}) = -F(\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_j},\cdots,\overrightarrow{v_i},\cdots,\overrightarrow{v_n})$

$F(\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_i}+\overrightarrow{v_i}',\cdots,\overrightarrow{v_n}) = F(\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_i},\cdots,\overrightarrow{v_n}) + F(\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_i}',\cdots,\overrightarrow{v_n})$

$F(\overrightarrow{v_1},\cdots,c\overrightarrow{v_i}\cdots,\overrightarrow{v_n}) = c\,F(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\overrightarrow{v_n})$

を満たすとき，

$$F(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\overrightarrow{v_n}) = F\left(\sum_{i_1=1}^{n}v_{i_1 1}\overrightarrow{e_{i_1}},\sum_{i_2=1}^{n}v_{i_2 2}\overrightarrow{e_{i_2}},\cdots,\sum_{i_n=1}^{n}v_{i_n n}\overrightarrow{e_{i_n}}\right) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}v_{i_j j}\,F(\overrightarrow{e_{i_1}},\overrightarrow{e_{i_2}},\cdots,\overrightarrow{e_{i_n}})$$

$i_1,i_2,\cdots,i_n$の中に同じ数字があれば，仮定の第１式で$i=j$として，$F(\overrightarrow{e_{i_1}},\overrightarrow{e_{i_2}},\cdots,\overrightarrow{e_{i_n}}) = 0$

$i_1,i_2,\cdots,i_n$がすべて異なる数字のとき，順列$\vec{p} = (i_1,i_2,\cdots,i_n)$が得られ，互換の繰り返しにより，

$F(\overrightarrow{e_{i_1}},\overrightarrow{e_{i_2}},\cdots,\overrightarrow{e_{i_n}}) = \mathrm{s}(\vec{p})\,F(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n})$

よって，$F(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\overrightarrow{v_n}) = \sum_{\vec{p}}\prod_{j=1}^{n}v_{i_j j}\cdot\mathrm{s}(\vec{p})\,F(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n}) = F(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n})\cdot\det(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\overrightarrow{v_n})$

$B = (\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\overrightarrow{v_n}), F(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\overrightarrow{v_n}) = \det(A\overrightarrow{v_1},A\overrightarrow{v_2},\cdots,A\overrightarrow{v_n})$とおくと，

$|AB| = \det(A\overrightarrow{v_1},A\overrightarrow{v_2},\cdots,A\overrightarrow{v_n}) = F(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n})\cdot\det(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\overrightarrow{v_n}) = F(A\overrightarrow{e_1},A\overrightarrow{e_2},\cdots,A\overrightarrow{e_n})\,|B| = |A||B|$

※補足２３

$A = (a_{ij}), \tilde{A} = (b_{ij}), A\tilde{A} = (c_{ij})$とすると，$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot(-1)^{j+k}|A_{jk}|$

これはAのj行をi行で置き換えた行列の行列式であるから，

$c_{ij} = \begin{cases}|A| & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$ より，$A\tilde{A} = |A|E$

※補足２４

Aが正則行列 $\Rightarrow AA^{-1} = E \Rightarrow |A||A^{-1}| = |E| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$

$|A| \neq 0 \Rightarrow A\dfrac{\tilde{A}}{|A|} = E \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}}{|A|} \Rightarrow A$は正則行列

※補足２５

$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}=\dfrac{1}{|A|}\tilde{A}\vec{b}$より，$x_i=\dfrac{1}{|A|}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}|A_{ji}|b_j$

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}|A_{ji}|b_j$ はAのi列を$\vec{b}$で置き換えた行列A_iの行列式に等しいから，$x_i=\dfrac{A_i}{|A|}$

※補足２６

全単射の定義を１対１対応としたが，本来の定義は全射かつ単射であり，全射，単射の定義は以下の通り。

全射：任意の$y\in Y$に対し，$f(x)=y$となる$x\in X$が存在する。（全てのyに移る）

単射：$x,x'\in X$に対し，$x\neq x'$ならば$f(x)\neq f(x')$となる。（単独に対応する）

よって，全単射とはすべてのyに対応するxがあって，そのxはただ１つであるから，１対１対応を意味する。

※補足２７

$\sin x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$\cos x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，$e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ （テーラー展開）より

$$\cos\theta+i\sin\theta=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}=e^{i\theta}$$

$(a,b)=r_1(\cos\theta_1,\sin\theta_1)$，$(c,d)=r_2(\cos\theta_2,\sin\theta_2)$のとき，$(a+bi)(c+di)=\left(r_1e^{i\theta_1}\right)\left(r_2e^{i\theta_2}\right)=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

このことからも行列との対応がわかる。

※補足２８

正規直交基底$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n}$に対し，$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n}$の線型結合として表されない$\vec{x}$を用いて，

$\vec{y}=\vec{x}-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\vec{x}\cdot\vec{e_i})\,\vec{e_i}$ とおくと，$\vec{y}\neq\vec{0}$かつ$\vec{y}\cdot\vec{e_i}=0$ だから，$\overrightarrow{e_{n+1}}=\dfrac{\vec{y}}{|\vec{y}|}$ とすれば，

$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n},\overrightarrow{e_{n+1}}$も正規直交基底となる。

このようにして正規直交基底を作る方法をシュミットの直交化法という。

※補足２９

$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n}$が$\mathbb{R}^n$の基底ならば$\vec{0}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\vec{v_i}$ となる$a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ は一意性により$a_i=0,\forall i$

$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n}$が$\mathbb{R}^n$の基底でないならば，$\vec{v}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\vec{v_i}=\sum_{i=1}^{n}b_i\vec{v_i}$ となる$a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$ が存在して，$a_i\neq b_i$

となるiをとれる。

$v_i=\dfrac{1}{b_i-a_i}\displaystyle\sum_{k=1,k\neq i}^{n}(a_k-b_k)\overrightarrow{v_k}$ より，$a_j=\begin{cases}\dfrac{a_j-b_j}{a_i-b_i} & (j\neq i)\\ 0 & (j=i)\end{cases}$ とすれば$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\vec{v_i}=\vec{0}$だから，$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n}$は一次独立

ではない。

よって，$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n}$が$\mathbb{R}^n$の基底$\Leftrightarrow\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n}$が一次独立

※補足３０

$A=(a_{ij}),B=(b_{ij}),A+B=(c_{ij})$とする。

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$より，$c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$だから，${}^t(A+B) = (a_{ji}) + (b_{ji}) = {}^tA + {}^tB$

※補足３１

$AB = (d_{ij})$，Aを(m,n)型，Bを(n,l)型とすると，

$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ より，$d_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk}$ だから，${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

※補足３２

$\overrightarrow{x'} \in \mathrm{Ker} f_A$とする。$A(\overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{x'}) = A\overrightarrow{x_0} + A\overrightarrow{x'} = \vec{y}$より，$\overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{x'}$は解である。

逆に$A\vec{x} = \vec{y}$のとき，$A(\vec{x} - \overrightarrow{x_0}) = A\vec{x} - A\overrightarrow{x_0} = \vec{0}$より，$\vec{x} - \overrightarrow{x_0} \in \mathrm{Ker} f_A$

よって，$A\vec{x} = \vec{y}$の解の全体集合は$\overrightarrow{x_0} + \mathrm{Ker} f_A$

※補足３３

$\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_m}\}, \{\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}, \cdots, \overrightarrow{y_n}\}$が共に$L$の基底だと仮定すると，

$\vec{v} = \sum_{i=1}^{m} a_i\overrightarrow{x_i} = \sum_{j=1}^{n} b_j\overrightarrow{y_j}$ となるa_i, b_jは１通りに定まる。

$X = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_m}), Y = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}, \cdots, \overrightarrow{y_n}), \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とすれば，$\vec{v} = X\vec{a} = Y\vec{b}$となる$\vec{a}, \vec{b}$が一意に決まる

よって，X, Yは正則であるから，共に正方行列のため$m = n$

これは$\dim L$が基底のとり方によらないことを示す。

※補足３４

$$\sum_{i=1}^{s} a_i\overrightarrow{v_i} + \sum_{j=11}^{t} b_j\overrightarrow{u_j} = \vec{0}と仮定すると，A\left(\sum_{i=1}^{s} a_i\overrightarrow{v_i} + \sum_{j=11}^{t} b_j\overrightarrow{u_j}\right) = \sum_{i=1}^{s} a_iA\overrightarrow{v_i} + \sum_{j=11}^{t} b_jA\overrightarrow{u_j} = \sum_{j=11}^{t} b_j\overrightarrow{w_j} = \vec{0}$$

$\{\overrightarrow{w_1}, \cdots, \overrightarrow{w_t}\}$は$\mathrm{Im} f_A$の基底だから，$b_i = 0, \forall i$

よって，$\sum_{i=1}^{s} a_i\overrightarrow{v_i} = \vec{0}$で$\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_s}\}$は $\mathrm{Ker} f_A$の基底だから$a_i = 0, \forall i$

よって，$\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{u_1}, \cdots, \overrightarrow{u_t}$は一次独立である。

$\vec{x} \in \mathbb{R}^m$をとると，$A\vec{x} \in \mathrm{Im} f_A$より，$A\vec{x} = \sum_{j=1}^{t} b_j\overrightarrow{w_j}$ と書ける。

$$A\left(\vec{x} - \sum_{j=1}^{t} b_j\overrightarrow{u_j}\right) = A\vec{x} - \sum_{j=1}^{t} b_j\overrightarrow{w_j} = \vec{0}より，\vec{x} - \sum_{j=1}^{t} b_j\overrightarrow{u_j} \in \mathrm{Ker} f_Aだから，\vec{x} - \sum_{j=1}^{t} b_j\overrightarrow{u_j} = \sum_{i=1}^{s} a_i\overrightarrow{v_i}と書ける。$$

よって，$\vec{x} \in \mathbb{R}^m$は$\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{u_1}, \cdots, \overrightarrow{u_t}$の線型結合で書ける。

以上より，$\{v_1, \cdots, v_s, u_1, \cdots, u_t\}$は$\mathbb{R}^m$の基底である。

※補足３５

$$A\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}u_j\right)v_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}u_jv_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ji}u_iv_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}v_j\right)u_i = {}^tA\vec{v} \cdot \vec{u}$$

※補足３６

$\mathrm{Im}\left(f_{{}^tA}\right)^{\perp}=\left\{\vec{u}\in\mathbb{R}^n\middle|\vec{u}\cdot{}^tA\vec{v}=0,\ \forall\vec{v}\in\mathbb{R}^n\right\}=\left\{\vec{u}\in\mathbb{R}^n\middle|A\vec{u}\cdot\vec{v}=0,\ \forall\vec{v}\in\mathbb{R}^n\right\}=\left\{\vec{u}\in\mathbb{R}^n\middle|A\vec{u}=\vec{0}\right\}=\mathrm{Ker}f_A$

$\mathrm{Ker}(f_A)^{\perp}=\left\{{}^tA\vec{u}\in\mathbb{R}^m\middle|{}^tA\vec{u}\cdot\vec{v}=0,\ A\vec{v}=\vec{0}\right\}=\{\vec{u}\in\mathbb{R}^m|{}^tA\vec{v}=\vec{u}\}=\ \mathrm{Im}\left(f_{{}^tA}\right)$

$\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\cdots,\overrightarrow{u_s}\}$を$V$の正規直交基底，$\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\overrightarrow{v_t}\}$を$V^{\perp}$の基底とする。

$\displaystyle\sum_{i=1}^{s}a_i\overrightarrow{u_i}+\sum_{j=1}^{t}b_j\overrightarrow{v_j}=\vec{0}$とする。

$\displaystyle\sum_{i=1}^{s}a_i\overrightarrow{u_i}\neq\vec{0}$と仮定すると，$\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{s}a_i\overrightarrow{u_i}\right|^2=-\left(\sum_{i=1}^{s}a_i\overrightarrow{u_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{t}b_j\overrightarrow{u_j}\right)=0$ となり矛盾

よって，$\displaystyle\sum_{i=1}^{s}a_i\overrightarrow{u_i}=\sum_{j=1}^{t}b_j\overrightarrow{v_j}=\vec{0}$だから，$a_i=b_j=0,\forall i,j$

よって，$\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\cdots,\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\overrightarrow{v_t}$は一次独立である。

$\vec{v}\in\mathbb{R}^n$とすると，$\displaystyle\left(\vec{v}-\sum_{i=1}^{s}(\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_i})\overrightarrow{u_i}\right)\cdot u_j=\left(\vec{v}-(\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_j})\overrightarrow{u_j}\right)\cdot u_j=\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_j}-\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_j}=0,\forall j$

よって，$\displaystyle\vec{v}-\sum_{i=1}^{s}(\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_i})\overrightarrow{u_i}\in V^{\perp}$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{s}(\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_i})\overrightarrow{u_i}\in V$より，$\vec{v}$は$\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\cdots,\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\overrightarrow{v_t}$の線型結合で表される。

よって，$\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\cdots,\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\overrightarrow{v_t}\}$は$\mathbb{R}^n$の基底である。

4. 過去問

～第１問～

次の行列の階数を求め，逆行列が存在する場合には逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

【解答】

行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に行基本変形を繰り返す。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{①}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{②}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{③}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \underset{④}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{⑤}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{⑥}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \underset{⑦}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

①：1行目と3行目を入れ替える。

②：3行目に1行目を−2倍したものを加える。

③：3行目に2行目を−3倍したものを加える。

④：2行目と3行目を入れ替える。

⑤：1行目に2行目を3倍したものを加える。

⑥：3行目に2行目を−2倍したものを加える。

⑦：3行目を−1倍する。

よって，行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ の階数は3で，逆行列が存在し，逆行列は $\begin{pmatrix} 3 & -9 & -5 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -7 & -4 \end{pmatrix}$

〖解説〗

p4,5 の階数と逆行列のとこを抑えていれば解ける問題である。基本変形の内容を書くかどうかは微妙なとこであるが，書いたほうが無難である。今回は理解のしやすさを優先して基本変形の操作を1つずつ書いたが，複数回の基本変形を1つにまとめて，例えば①②を「1行目に3行目の−2倍を加えて，さらに1行目と3行目を入れ替える」と書けば解答の分量は少なくなる。

～第２問～

次の行列式を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

【解答】

基本変形と行列式の関係および余因子展開により求める。

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & -11 & -10 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & 9 & 4 \\ 0 & -4 & 12 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 8 & -11 & -10 \\ -4 & 9 & 4 \\ -4 & 12 & 8 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 2 & -11 & -5 \\ 1 & -9 & -2 \\ -1 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 1 & -9 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 \cdot (14+3) = -136$$

〖解説〗

p5,6 の行列式を抑えていれば解ける。どこまで使ってよくて，どこまで書けばよいのか謎である。問題集には式だけしか書いてないのもあるが，基本変形と余因子展開をしたことを一応書いた。

～第３問～

> 整数m,nで$m>n>0$となるものをとるとき，任意のm個のn次元ベクトル$v_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})$ $(i=1,\cdots,m)$は常に一次従属になることを証明せよ。

【解答】

(m,n)型の行列$A=\left(a_{ij}\right)$を考える。

あるv_i $(i=1,\cdots,m)$が一次独立となると仮定すると，$\operatorname{rank}A$はv_i $(i=1,\cdots,m)$のうち一次独立となるような最大個数であるから，このとき，$\operatorname{rank}A=m$

一方，Aは(m,n)型の行列だから，$\operatorname{rank}A\leqq\min(m,n)=n<m$となり矛盾する。

よって，任意のm個のn次元ベクトル$v_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})$ $(i=1,\cdots,m)$は常に一次従属になる。

〖解説〗

この解答では「階数＝列(行)ベクトルの一次独立となる最大個数」という事実を使った。これについて板書はしてない(はずだ)が，口で言っていた(はずな)ので用いてよいと判断した。そもそも階数の根本的な定義はこちらである。

- 階数＝列(行)ベクトルの一次独立となる最大個数
- 基本変形によって列(行)ベクトルの一次独立となる最大個数は変化しない
- 基本変形によって階段行列にすることができる
- 階段行列の階数は左上に続く１の数である

という結果から階数を板書のように定義できるという方が自然な流れな気がする。

$\operatorname{rank}A\leqq\min(m,n)$というのは板書での階数の定義から明らかである。

～第４問～

連立１次方程式

$$x+y+z=a$$
$$3x-4y+5z=b$$
$$-x+6y-3z=c$$

の解を，a,b,cの値に関する場合分けをして，集合の言葉を使って記述せよ。

【解答】

(第１式)×2 －(第３式) より，$3x-4y+5z=2a-c$

(i)　$b\neq 2a-c$のとき，第２式と比較して解はない。

(ii)　$b=2a-c$のとき，

$x=\frac{1}{2}(3a+c)$，$y=0$，$z=-\frac{1}{2}(a+c)$ は設問の連立方程式をみたす。

係数行列$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&-4&5\\-1&6&-3\end{pmatrix}$ の表す写像をf_Aとする。

Aに行基本変形をすると，

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\3&-4&5\\-1&6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-7&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x+y+z=0\\-7y+2z=0\end{cases}$$

よって，$z=7k(k\in\mathbb{R})$ のとき，$y=2k$，$x=-9k$

よって，$\mathrm{Ker}\,f_A=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-9\\2\\7\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{R}\right\}$

よって，解は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3a+c\\0\\-(a+c)\end{pmatrix}+\vec{p}\ \left(\vec{p}\in\mathrm{Ker}\,f_A=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-9\\2\\7\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{R}\right\}\right)$

〚解説〛

p8,9 の核と像のところが抑えていれば解ける。設問の「集合の言葉を使って記述せよ」というのは授業で無駄にこだわっていた「核と像」について書けばよいのだと思われる。

解答の最初の「(第１式)×2 －(第３式) より，」のところがテクニカルに思えるかもしれないが，これは行基本変形での操作を追えばできる。これにより場合分けが見えると思う。

一応確認ではあるが，クラメルの公式が使えるのは解が一通りに定まるときであって，今回みたいに係数行列がフルランク行列でないときには使えない。

～第５問～

nを３以上の整数とする。集合$A=\{1,2,\cdots,n\}$の置換σをうまくとれば，$\sigma^n=\sigma\circ\cdots\circ\sigma$（$n$個の合成）が恒等置換(任意の$i\in A$に対して，$i$を$i$に移す置換）にならないようにできることを証明せよ。

【解答】

$\sigma(i)=\begin{cases}1 & (i=1)\\ i+1 & (2\leqq i\leqq n-1)\\ 2 & (i=n)\end{cases}$ とすると，$\sigma^n=\sigma$となり恒等置換にならない。

〖解説〗

$n=3,4$で実験すれば長さ$n-1$の循環置換にすればよいことが見える。