2014 年度　電磁気学 A　解答
岸根順一郎教官

理一１９組　とーやま

第１問（ベクトル場）

１． ベクトル場

$$\boldsymbol{v} = (x-2y, 2x+y, 0)$$

について答えよ．

（1-a）xy 平面上の場の分布を表す図をア〜エより一つ選べ．

（1-b）$\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ と $\nabla \times \boldsymbol{v}$ を計算せよ．

（1-c）$\boldsymbol{v}$ を「渦なし、湧き出しあり」の場（発散性の場）$\boldsymbol{v_1}$ と「渦あり、湧き出しなし」の場（回転性の場）$\boldsymbol{v_2}$ に分離して $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}$ と書くことができる。（ヘルムホルツの定理）．$\boldsymbol{v_1}$ と $\boldsymbol{v_2}$ の例を一組挙げよ．

２． $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ に対して

$$\triangle\left(\frac{1}{|r|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

が成り立つことを証明せよ．$\triangle$ はラプラス演算子，$\delta(\boldsymbol{r})$ は三次元デルタ関数である．

解答

１．

（1-a）エ．[*1]

（1-b）$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 2$，$\nabla \times \boldsymbol{v} = (0, 0, 4)$

（1-c）$\boldsymbol{v_1} = (x, y, 0)$，$\boldsymbol{v_2} = (-2y, 2x, 0)$[*2]

[*1] 図は省略します

[*2] 本来は　$\boldsymbol{A} = -\nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{X}$ とおいて，

$$\phi = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{A}}{r} dV$$

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla \times \boldsymbol{A}}{r} dV$$

とすれば発散性の場と回転性の場に分けられるみたいですが，今回は例を挙げるだけなのでこの答えで十分だと思います．

2．
この方程式を -4π で割り，両辺の体積分を取ると

$$\int_{\mathcal{D}} \delta(\boldsymbol{r}) dV = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{D}} \triangle\left(\frac{1}{|r|}\right) dV$$

ガウスの発散の定理，面積分の球座標表示への変換公式から

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{D}} \triangle\left(\frac{1}{|r|}\right) dV &= -\frac{1}{4\pi}\oint_{\mathcal{S}} \left(\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|r|}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \frac{1}{4\pi}\oint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{|r|^2}\right)\cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{|r|^2}\right)\cdot \hat{\boldsymbol{r}} r^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\phi \\
&= 1
\end{aligned}$$

である．さらに，$r \neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
\triangle\left(\frac{1}{|r|}\right) &= \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} - \frac{3}{r^3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

であり，$r = 0$ のとき ∞ であるのでデルタ関数の定義を満たす．
以上より題の等式が成り立つことが示される．

第２問（マックスウェル方程式）

真空中の電荷密度分布 ρ，電荷密度分布 $\boldsymbol{j}$ が作りだす電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ はマックスウェル方程式によって決まる．真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ϵ_o、μ_o として以下の問いに答えよ．

１． マックスウェル方程式について以下の問いに答えよ．

(1-a) マックスウェル方程式の微分形は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \boxed{\quad ア \quad} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \boxed{\quad イ \quad} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \boxed{\quad ウ \quad} \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \boxed{\quad エ \quad} + \boxed{\quad オ \quad} \tag{4}$$

の形を持つ．空欄ア〜オを埋めよ．ただし，エには $\boldsymbol{j}$ を含む項が入る．

(1-b) 式（１）〜（４）それぞれに対応するマックスウェル方程式の「積分形」を示し、それがどのような物理法則から導かれるか説明せよ．また，積分形から微分形を導くにはどうすればよいか説明せよ．ただし空欄オに対応する項については議論しなくてよい．

２． 電荷保存則の意味を述べ，その結果 ρ と $\boldsymbol{j}$ の間に成り立つ関係式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{5}$$

を導け．

３． 空欄オに入る項は「変位電流」と呼ばれるが，この項を入れないと電荷保存則が破たんする．その理由を述べよ．そして，変位電流の項を考慮に入れることで電荷保存則が回復することを示せ．

４． 導体内部に電荷を埋め込むと，極めて短時間の間に減衰して消失する．電荷密度の時間変化が

$$\rho(t) = \rho_o e^{-t/\tau} \tag{6}$$

（ρ_o は電荷密度の初期値，τ は定数）の形に書けることをマックスウェル方程式と電荷保存則から導き，「時定数」τ を導体の電気伝導率 σ と真空の誘電率 ε_o を用いて表せ．さらにアルミニウム（$\sigma = 3.74 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$）の場合に τ が何秒程度になるか計算せよ．「10 の何乗か」を答えればよい．真空の誘電率は $\varepsilon_o = 8.85 \times 10^{-12} N^{-1} C^2 m^{-2}$ である．

解答

１．

(1-a)

$$\boxed{\quad ア \quad} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

$$\boxed{\quad イ \quad} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\boxed{\quad ウ \quad} = 0$$

$$\boxed{\quad エ \quad} = \mu_o \boldsymbol{j} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

ρ は電荷密度，$\varepsilon_o =$ は真空の誘電率，μ_o は真空の透磁率，$\boldsymbol{j}$ は電流密度です．

（1-b）

（1）積分形

$$\int_{\partial \mathcal{D}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_{\mathcal{D}} \rho(\boldsymbol{x}) dv_x$$

$i = 1, 2, \cdots, N$ とラベルされた荷電粒子の集まりを考える．クーロンの法則より，i 番目の粒子の位置を $\boldsymbol{y}_i$ とすれば，これが位置 $\boldsymbol{x}$ に作る電場は

$$\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} q_i \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_i|^3}$$

である．これより

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S} &= |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})| \times |d\boldsymbol{S}| \cos\theta \\
&= |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})| \times |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_i|^2 d\Omega \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} q_i \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_i|^2} \times |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_i|^2 d\Omega \\
&= \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_o} d\Omega
\end{aligned}$$

から

$$\int_{\partial \mathcal{D}} \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q_i}{\varepsilon_o}$$

[*3]

電荷が領域 $\mathcal{D}$ 内部に連続分布しているとして電荷密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ を用いれば，目的の積分形が得られる．

また，ガウスの発散定理を使うと

$$\int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) dv_x = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_{\mathcal{D}} \rho(\boldsymbol{x}) dv_x$$

であるが，これが電荷分布を取り囲む任意の領域について成り立つので微分形が導かれる．

（2）積分形

$$\oint_{\partial \mathcal{S}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{x} = -\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}} \right)$$

ファラデーの電磁誘導の法則より磁束 ϕ が変化すると，起電力 V_{emf} は

$$V_{emf} = -\frac{d\phi(t)}{dt}$$

である．起電力と電場の関係は

$$V_{emf} = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{x}$$

であるので，積分形が導かれる．

[*3] $d\Omega$ は微小な立体角で，$\int d\Omega = 4\pi$ です

また，ストークスの定理を使うと

$$\oint_{\partial \mathcal{S}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{x} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}}$$

よって境界面 $\mathcal{S}$ が時間変化しないとすれば，

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}} = -\int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}}$$

これが任意の曲面 $\mathcal{S}$ について成り立つことから微分形が得られる．

（3）積分形

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

磁気単極子が存在しないことから導かれる．

微分形はガウスの発散の定理より得られる．

（4）積分形

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{x} = \mu_o \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}}$$

アンペールの法則より

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{x} = \mu_o I$$

であり，電流密度 $\boldsymbol{j}$ を導入すると

$$I = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}}$$

であるので，積分形が導かれる．さらにストークスの定理を用いると

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}} = \mu_o \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}}$$

となるので，微分形が得られる．

２．

［電荷保存則の意味］電荷は不生不滅である．つまりある領域 $\mathcal{D}$ 内で電荷が減ったとすれば，その減り分は $\mathcal{D}$ の境界 $\partial\mathcal{D}$ を通して外へ流出した電荷に等しくなくてはならない．

［関係式を導く］領域 $\mathcal{D}$ 内の全電荷 $Q(t)$ は

$$Q(t) = \int_{\mathcal{D}} \rho dv_{\boldsymbol{x}}$$

であり，$\partial\mathcal{D}$ を貫く全電流 I は，ガウスの発散定理を用いて，

$$I = \oint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}} = \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} dv_{\boldsymbol{x}}$$

となる．また，電流の定義から

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

であるので，

$$\int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = -\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv_{\boldsymbol{x}}$$

となる．これが任意の領域 $\mathcal{D}$ について成り立つので，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

が導かれる．

３．

［理由］変位電流の項がないと，方程式の発散を取った時

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = \mu_o \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}$$

であり，この左辺は恒等的にゼロである．

この時，（５）式が成り立つとすると，$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ となるので，電荷が時間変化しないことになってしまう．よって電荷保存則が破綻する．

［変位電流の正当性］変位電流の項を含めると，

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mu_o \boldsymbol{j} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

となり，右辺も電荷保存則に則ってゼロとなり，電荷保存則が回復することが分かる．

４．

導体内部ではミクロなオームの法則

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$

が成り立ち，これとマックスウェル方程式（１）と電荷保存則の関係式（５）より

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_o} \rho$$

となる．この微分方程式を解くと，

$$\rho(t) = \rho_o e^{-\sigma t / \varepsilon_o}$$

となる．よって

$$\tau = \frac{\varepsilon_o}{\sigma}$$

である．

アルミニウムの場合，電気伝導率と真空の誘電率の値を代入すると，

$$\tau = 8.85 \times 10^{-12} \div 3.74 \times 10^{7} = 2.37 \times 10^{-19}$$

である．

第３問（静電場）　静電場について以下の問いに答えよ．

１． 電荷密度分布が作る静電場を考える．

（1-a）静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x})$ がポアソン方程式

$$\triangle\phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_o} \tag{7}$$

に従うことを示せ.

（1-b）クーロンの法則によれば，領域 $\mathcal{D}$ 内の電荷密度分布が位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ の点に作る静電ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\mathcal{D}} \frac{\rho(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}dy \tag{8}$$

と書ける．この $\phi(\boldsymbol{x})$ をポアソン方程式に代入し，確かに式（７）が満たされていることを示せ.

２． 半径 a の厚みのない導体球殻に電荷 Q を与える．

（2-a）　球の中心を O とし，球の内外に任意の点 P をとって $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とする．式（８）から出発して，球内外の静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x})$ を計算せよ．体積積分を表面積分に変える必要があるので注意せよ.

（2-b）得られた $\phi(\boldsymbol{x})$ から電場を計算せよ.

３． 半径 a の厚みのない導体球殻を 接地し，球殻の 外部に 点電荷 q を置く.

（3-a）球殻 外部 の電場の分布は，球殻を取り去って適切な場所に鏡像電荷を置いた場合の電場と同等である．なぜ同等と言い切れるのか．その理由を説明せよ.

（3-b）点電荷 q が導体球殻から受ける力を求めよ.

解答

１．

(1-a)

静電ポテンシャルの定義から

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x})$$

であり，マックスウェル方程式より

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

であることから,

$$\triangle\phi(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_o}$$

となるので，$\phi(\boldsymbol{x})$ はポアソン方程式に従う.

(1-b)

（８）式を（７）式左辺に代入すると, *4

$$\triangle\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\mathcal{D}} \rho(\boldsymbol{y})\left(\triangle\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right)dv$$

第１問，２．の式より

*4 $\triangle$ は位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して働く演算子ラプラシアンです.

$$\triangle\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right) = -4\pi\delta(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)$$

であるので

$$\triangle\phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\mathcal{D}} 4\pi\rho(\boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})dv = -\frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_o}$$

となって，確かに（7）式が満たされている．

２．

(2-a)

球殻は導体であるので，電荷 Q は一様に分布しているとして電荷面積密度を σ とすれば,

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

である．よって

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\mathcal{D}}\frac{\rho(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}dv = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\mathcal{S}}\frac{\sigma}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}dS$$

である．

球面を帯状に分割し，中心線[*5]と帯との角度を θ とすれば，$dS = 2\pi a^2\sin\theta d\theta$ であり，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = \sqrt{|\boldsymbol{x}|^2+a^2-2|\boldsymbol{x}|a\cos\theta}$ であるので, [*6]

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{2\pi a^2\sigma}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{|\boldsymbol{x}|^2+a^2-2|\boldsymbol{x}|a\cos\theta}}d\theta$$

$\sin\theta = t$ と置換することにより,

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x}) &= \frac{2\pi a^2\sigma}{4\pi\varepsilon_o}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{|x|^2+a^2-2|x|at}}\\ &= \frac{2\pi a^2\sigma}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{ta}\left[-\sqrt{|x|^2+a^2-2|x|at}\right]_{-1}^{1}\\ &= \frac{4\pi a^2\sigma}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{|x|}\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{|x|}\end{aligned}$$

[*5] 位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ の点と球の中心を結んだ線です．

[*6] 球の中心を原点としています

第４問（静磁場） 定常電流が作る静磁場について以下の問いに答えよ．

１． ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ を考える．

（1-a）異なるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{A'}(\boldsymbol{x})$ が同じ磁場を与えるとき，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ から $\boldsymbol{A'}(\boldsymbol{x})$ への変換を「ゲージ変換」と呼ぶ．ゲージ変換を用いて，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=0$ を満たすように $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ を選べる理由を説明せよ．このようなゲージの選び方を「クーロンゲージ」と呼ぶ．

（1-b）クーロンゲージのもとで，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ がポアソン方程式

$$\triangle\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=-\mu_o\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \tag{9}$$

を満たすことを示せ．

（1-c）太さの無視できる導線に電流 I を流す．導線に沿って，位置 $\boldsymbol{y}$ に微小線要素 $d\boldsymbol{y}$ をとる．（９）の解を用いて，この線要素が位置 $\boldsymbol{x}$ に作る磁場を与えるビオ・サバールの法則

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \tag{10}$$

を導き出せ．ただし $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ である．

２． 線分状の導線に電流 I を流す．導線からの距離 r の点 P での磁場を計算せよ．導線の端点を A, B とし，$\angle\mathrm{PBA}=\alpha$，$\angle\mathrm{PBA}=\beta$ とせよ（この角度のとりかたは授業でやったのとは少し違うので注意してください）．結果は α，β を用いて表せ．

３． コの字と半円を組み合わせた下図のような閉回路に電流 I をながすとき，半円の中心 O での磁場を計算せよ．

解答

１．

(1-a)

磁場を $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ として任意の関数 $\lambda(\boldsymbol{x})$ を用いて，

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\nabla}\lambda(\boldsymbol{x})$$

とすれば，恒等式

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\lambda(\boldsymbol{x})=0$$

であるので

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$$

となり，ゲージ変換の条件を満たす．$\lambda(\boldsymbol{x})$ は任意であるので，

$$\triangle\lambda=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}'$$

となるようにスカラー関数 λ を選べば，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=0$ を満たすように $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ を選べる．

(1-b)

マックスウェル方程式とクーロンゲージの定義より，

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\triangle\boldsymbol{A}=-\triangle\boldsymbol{A}=\mu_o\boldsymbol{j}$$

であるので，$\triangle\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=-\mu_o\boldsymbol{j}(x)$ となりポアソン方程式を満たす．

(1-c)
(1-b) より $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ はポアソン方程式を満たす．
これと 1．(1-a) (1-b) より

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{\mathcal{D}} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}dv$$

となる．$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ であることと，
$\boldsymbol{\nabla}$ が場を求める点 $\boldsymbol{x}$ にのみ作用すること，さらに，定ベクトル $\boldsymbol{c}$ とスカラー場 $v(\boldsymbol{x})$ に対する恒等式

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\times(\boldsymbol{c}v(\boldsymbol{x})) = -\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}v(\boldsymbol{x}))$$

を用いると，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{\mathcal{D}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right)dv_{\boldsymbol{y}} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\int_{\mathcal{D}}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right)$$

また，関係式

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right) = -\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}$$

から

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{\mathcal{D}}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y})\times\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}\right)dv_{\boldsymbol{y}}$$

を得る．太さの無視できる導線においては，電流密度は一様であるとしてよく

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y})dv_{\boldsymbol{y}} = Id\boldsymbol{y}$$

という関係式を用いることができるので，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_C d\boldsymbol{y}\times\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}\right)$$

を得る．
ここで微小部分 $d\boldsymbol{y}$ からの寄与 $d\boldsymbol{B}$ だけを取り出し，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ とすると，問題の式が導き出せる．
2．
ビオサバールの法則より，$d\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角を θ とし，$|\boldsymbol{r}| = l$ とすると

$$dB = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{\sin\theta dy}{l^2}$$

となる．$y = \frac{r}{\tan\theta}$ であることから，$dy = -\frac{r}{\sin^2\theta}d\theta$ である．さらに $l = \frac{r}{\sin\theta}$ であるので

$$dB = -\frac{\mu_o I}{4\pi r}\sin\theta d\theta$$

となる．これを積分することにより，

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi r}\int_{-\alpha}^{\beta} -\sin\theta d\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi r}(\cos\beta + \cos\alpha)$$

を得る．[*7]

[*7] 向きは外積の定義から出ます．省略します．

３．[8]

まずコの字型の縦線部分による磁場 B_1 を考える．２．の式において $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$r = b$ とすれば良いので,

$$B_1 = \frac{\mu_o I a}{2\pi b\sqrt{a^2+b^2}}$$

である.

次にコの字型の横線部分による磁場の上側 B_2 と下側 B_3 を考える.

$B_2 = B3$ であり，２．の式において $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\beta = \frac{\pi}{2}, r = a$ とすればよいので,

$$B_2 = B_3 = \frac{\mu_o I b}{4\pi a\sqrt{a^2+b^2}}$$

となる.

最後に半円型の導線による磁場 B_4 を考える．ビオサバールの法則から

$$dB = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{\sin\theta dy}{l^2}$$

であり，この場合 $d\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角は常に $\frac{\pi}{2}$ であり，$l = a$ である．さらに，$y = a\theta$ から $dy = ad\theta$ であるので

$$B_4 = \int_0^{\pi}\frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{ad\theta}{a^2} = \frac{\mu_o I}{4a}$$

となる.

外積の定義から，B_1, B_2, B_3, B_4 は全て同じ向きである.

よって求める半円の中心 O での磁場 B は紙面下向きであり，その大きさは

$$B = \frac{\mu_o I\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi ab} + \frac{\mu_o I}{4a}$$

である.

[8] 図は省略します