ポテンシャル問題における流体力学的発想法の原理

December 9, 2015

概略

二次元のポテンシャル問題において、等角写像が与えられていることが多々ある。しかし個々の問題に適合した等角写像は実際にはどのようにして見つけられているのか。その発見法の１つである「流体力学的発想法」の原理をここにまとめる。

なお、これは今井功著「複素解析と流体力学」、「等角写像とその応用」の２冊の一部を自分用にまとめたものである。私的利用以外のなにも目的ではない。

§1　複素速度ポテンシャルの導入

流体力学的発想法の要となる複素速度ポテンシャルを導入しよう。

§1.1　流れ関数

二次元における非圧縮性流体の渦なしの流れを考える。

流体の速度ベクトルを $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ として以下が成立。

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad \therefore\ \mathrm{grad}\phi = \boldsymbol{v}$$

なるポテンシャル関数 ϕ が存在する。

静電ポテンシャルなどを考える場合は左辺に負符号をつける必要があるかもしれないが、そこは調整の精神である。

そしてまた、非圧縮性の流体であるということはすなわち流体の密度が常に一定であるということ。この性質から連続方程式が成立する。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

以上よりラプラス方程式 $\Delta\phi = \boldsymbol{0}$ をえるというわけであった。

ラプラス方程式は流れの場が、非圧縮性の流体で満たされており、特に渦なしであるという仮定のもとに得られたというわけである。この仮定はあとになって少し思い出されることになる。

さて、先のラプラス方程式は

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \end{cases}$$

なる関数 ψ の存在を保証する。

この関数 ψ の物理的な意味を考えてみよう。

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy \\ &= -vdx + udy \\ &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、$d\psi$ は $d\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ を**左から右に通過する流量**を表していることがわかる。このことから $d\psi = 0$ となる曲線は流体の流れに沿っていると言える。つまり $\psi = const$ は流線。この事実を以てして、関数 ψ は **”流れの関数 ”**と呼ばれる。

§1.2　複素速度ポテンシャル

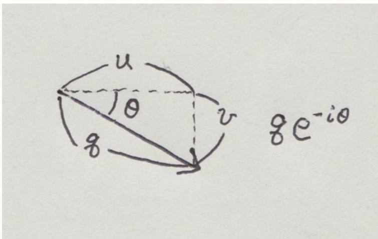
さて、ここで先ほどまでの ϕ と ψ とを使って

$$f(z) = \phi + i\psi \qquad (z = x + iy)$$

なる複素関数を作ってみよう。ϕ と ψ は Cauchy-Riemann の関係式を満たすので、この関数は正則である。

唐突ではあるが、これを微分する。

$$\begin{aligned}\frac{df(z)}{dz} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ &= u - iv \\ &= q\mathrm{e}^{-i\theta} \qquad (q = \sqrt{u^2+v^2} = |\boldsymbol{v}|,\ tan\theta = \frac{v}{u})\end{aligned}$$



上の結果から $f(z)$ の頼もしい性質が明らかにわかる。$f(z)$ は微分されることで、流体の速度ベクトルの大きさと向きを我々に教えてくれる。具体的な成分の値よりも、大きさと向きという 2 つの要素の方が我々にベクトルをイメージさせてくれるだろう。微分することで速度の十分な情報を吐き出すこの関数は **”複素速度ポテンシャル ”**と呼ばれる。

逆に、**速度ベクトルの大きさと向きから、この正則関数 $f(z)$ を構成することもできる**。実際、いくつかの場合において複素速度ポテンシャルは容易く決定される。次のセクションではそういった場合の話をする。

次のセクションに入る前に、複素速度ポテンシャルの閉経路に沿った積分について調べておく。以下、複素速度ポテンシャル f を閉経路 C に沿って積分する。

$$\begin{aligned}\oint_C df &= \oint_C d\phi + i\oint_C d\psi \\ &= \oint_C \mathrm{grad}\phi\cdot d\boldsymbol{r} + i\oint_C d\psi\end{aligned}$$

実部の $\oint_C \mathrm{grad}\phi\cdot d\boldsymbol{r}$ なる量は、$\mathrm{grad}\phi = \boldsymbol{v}$ であることを考えればそのイメージがわく。この量は循環と呼ばれる。虚部の $\oint_C d\psi$ なる量は、§1.1 の内容を思い出せば、閉経路 C で囲まれた領域からの流体の流出量に等しいことがわかる。これらの量はあとで使う。

§2　複素速度ポテンシャルの基本

流体の速度ベクトルの大きさと向きがわかれば、複素速度ポテンシャルの微分が決定できることがわかった。このセクションでは、基本的な流れについてその複素速度ポテンシャルを簡明なやり方で構成しよう。

流体の流れに重ね合わせの原理が適用できることから、**複素速度ポテンシャルが加法性をもつ**ことがわかる。また後述する等角写像の技法は**ある流れの複素速度ポテンシャルを、一見すると全く関連のなさそうな流れの複素速度ポテンシャルへと変換することを可能にする**。基本的な流れの複素速度ポテンシャルさえわかっていれば、**ポテンシャルの重ね合わせや等角写像法などを駆使することで複雑な流れの複素速度ポテンシャルを決定できる**。

だからまずは基本的な流れの複素速度ポテンシャルをみてみよう。

§ 2.1　基本的な流れの複素速度ポテンシャル

1. 一様な流れ
   大きさが U、x 軸となす角度が α である一様な流れを考える。

   いたってシンプルに複素速度ポテンシャル f の微分を

   $$\frac{df}{dz} = U\mathrm{e}^{-i\alpha}$$

   だと決定できる。

   これを積分して

   $$f = U\mathrm{e}^{-i\alpha}z$$

   となる。これが大きさ U、角度 α の一様な流れの複素速度ポテンシャルである。

2. 湧き出しと渦糸
   湧き出しと渦糸はその 2 つを並べて対比しよう。m,k を実数、任意の点 z について $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ として以下。

   $$\begin{cases} f = m\log z, \frac{df}{dz} = m\mathrm{e}^{-i\theta} \\ g = ik\log z, \frac{dg}{dz} = k\mathrm{e}^{-i(\theta-\frac{\pi}{2})} \end{cases}$$

   f は大きさ m の湧き出し/吸い込みが、g は大きさ k の渦糸 (渦は時計回り) が原点にある場合の流れをそれぞれ表している。それぞれの流れの速度ベクトルの大きさと角度を思い描いてみれば、それはすぐにわかるだろう。なお循環と流出量は、大きさ m の湧き出しの場合それぞれ $0, 2\pi m$ であり、大きさ k の時計回り渦糸だと $-2\pi k, 0$ である。

   これでよいのだろうか。そもそも渦糸や湧き出しがないことを仮定して流れ関数が定義され、複素速度ポテンシャルが正則関数として定義されたことを思い出してほしい。上の f や g は正則ではない。実際、原点に湧き出しや渦糸という ”特異点 ”を持っているではないか (**湧き出しや渦糸が、数学的には特異点として表現される**というこの話は、あとで「流れの一意性定理」の説明の際に重要となる)。このように思う人もいるかもしれない。

   ただ、そうはいっても 2 つの関数は原点を除いて正則であり、原点以外では通常の渦なし非圧縮性流体の流れを記述している。しかも、そもそも我々は湧き出しや渦糸が存在する点**での**流体の流れには興味をもたない。**問題になるのはいつでも湧き出しや渦糸の周りである。**つまり特異点は解析の対象としない。であるから、先の関数を複素速度ポテンシャルとみなすことには何も問題がない。

以上が基本的な流れの複素速度ポテンシャルである。これだけで十分である。これらをどう応用していくかなのである。

§ 2.2　複素速度ポテンシャルの重ね合わせ

一対の湧き出しと吸い込みがつくる流れをポテンシャルを重ね合わせることで解析してみよう。等しい強さ m の湧き出しと吸い込みがそれぞれ $z = a, -a$ にあるとする。ポテンシャルの重ね合わせから、複素速度ポテンシャル f を

$$f = m\log\frac{z-a}{z+a}$$

と決定できる。ここで、

$$\begin{cases} z-a=r_1\mathrm{e}^{i\theta_1} \\ z+a=r_2\mathrm{e}^{i\theta_2} \end{cases}$$

としてみると、

$$\begin{aligned} f &= \phi + i\psi \\ &= m(log\frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

となる。つまり等ポテンシャル線は $r_1/r_2=const$、つまり (アポロニウスの) 円である。そして流線は $\theta_1-\theta_2=const$、円周角の定理に思いを馳せれば、これもまた円であることがわかるだろう。

さていささか唐突ではあるが、ある極限を考えてみよう。先の湧き出しと吸い込みの位置をそれぞれ $z=0,\ \epsilon\mathrm{e}^{i\alpha}$ とする。流れの複素速度ポテンシャル f は

$$f=m(\log z-\log{(z-\epsilon\mathrm{e}^{i\alpha})})$$

となるが、この f について $\epsilon\to0, m\to\infty, \epsilon m=\mu$ の極限を考えると

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to0} f &= \epsilon\mathrm{e}^{i\alpha}f'(z) \\ &= \frac{\mu\mathrm{e}^{i\alpha}}{z} \end{aligned}$$

なる関数が得られる。f について先の極限をとることは、物理的には湧き出しと吸い込みとが隣接する二重双極子の流れの複素速度ポテンシャルをもとめることに相当する。重ね合わせの末に、極限操作を加えることによって二重双極子複素速度ポテンシャルをえたのである。

この二重双極子複素速度ポテンシャルを、微小にずらして重ね合わせたものを考えることで四重双極子複素速度ポテンシャルをえることもできる。そしてこの操作を続けることで 2^n 重双極子複素速度ポテンシャルのかたちを突き止めることもできるだろう。

§3　等角写像法

ポテンシャル問題を解く際の等角写像法の原理を明らかにしよう。

§3.1　等角写像による流れの変形

網を机の上に置く。そこには正方形のマス目がずらっと並ぶ。網の好きな場所を指でおさえて引っ張ったり、縮ませたりといったことをすればマス目は歪み、いろいろな模様がそこに現れるだろう。これが等角写像である。もちろん厳密な話をしているわけではない。力をかけることによってマス目をゆがませれば、もともとの正方形は平行四辺形や丸みを帯びた四角形になってしまう。しかし等角写像は違う。**等角写像によるマス目の変形は直角に交わっていた線同士の直角を保つ**。

なにもない二次元平面の x 軸に沿った一様な流れを考える。明らかに流線は x 軸に平行な直線群、等ポテンシャル線は y 軸に平行な直線群である。この"流れの網"を等角写像によって歪ませる。歪ませる前は賽の目を形成していた流線と等ポテンシャル線はいまや直線ですらなく、複雑な模様を作っている。しかし**それらはやはり直角に交わっている**のである。よって**新たに得られた曲線群はもとの一様な流れではない別の流れを表している**と言える。新しい流れは、もとの流線だった曲線を流線とするだろう。この新しくできた"流れの網"を再度歪ませても、曲線群は直交を保たれ、また新しい流れができあがる。

流れに干渉する領域があるとしよう。上半面と下半面とを区切る壁、一様な流れの中に存在する円領域などなど。これらの領域を変形する等角写像による流れの変形は、これらの領域と網とを接着した状態で領域の形を変形していくようなものである。網の、領域に沿ったマス目は領域とともに歪んでいく。その領域付近の歪みに伴って、領域から少し離れたマス目が歪んでいき、最終的にマス目全体の変形結果が決定される。

以上が等角写像による流れの変形のイメージである。以下ではこのイメージにしっかりとした理論づけをしていく。

§3.2　等角写像に関する定理

流線と等ポテンシャル線の変形について考える。流れをさえぎる領域がない場合について説明することはないので、流れをさえぎる領域が存在する場合のことを話す。

鏡像法 (映像法) を思い出してもらいたい。**流れに干渉する領域がある場合の流れは、そのような領域がない場合の流れのうち、その領域に対応する流線 (もしくは等ポテンシャル線) をもつ流れとまったく同じである**。導体板と少し離れた電荷が作る等ポテンシャル線をもとめる問題はこのようにして解かれることが多い。湧き出し電荷対のちょうど真ん中をはしるまっすぐな等ポテンシャル線に沿って金属板を置くのである。大事なことは**流れを邪魔する領域があるとき、流れはその領域の境界上を流線 (もしくは等ポテンシャル線) としていること**である。つまり**領域の境界に沿っていない流線や等ポテンシャル線が存在する流れは物理学的に妥当ではない**。これが重要である。

流れの変形に直接関わる大切な定理は以下である。なお、これらは数学的に厳密な書かれ方をされていないことに注意せよ。

1. リーマンの写像定理：z 平面と ζ 平面とにそれぞれ単連結領域 D と D' とが与えられたとき、D を D' へと 1 対 1 に等角写像する正則関数 $z = g(\zeta)$ が必ず存在する。そしてそれは本質的に一意である。ただし D, D' について、どちらかのみが全平面である場合にこの定理は成り立たない。全平面は全平面に、単連結領域はまた別の単連結領域に、特に上半面に必ず写像できる。

2. カラテオドリの定理：等角写像において単連結領域の境界上の点は 1 対 1 に対応する。

これらを併せればつまり**どのような領域からどのような領域への変換もそれを実現する等角写像が存在し、その境界同士もきちんと対応している**ということである。境界が対応しているというのが大事で、そうでなければ境界に沿った流線は写像後、境界に沿っているとは限らないのである。カラテオドリの定理は、境界に沿っていた流線が写像後も境界に沿うことを保障する。**写像後の流線が境界に沿っているからこそ写像後の流線と等ポテンシャル線のなす模様が、物理的な流れとして妥当であると言えるのだ**。

以上では流線や等ポテンシャル線の写像について述べた。ポテンシャル問題を等角写像法で解く際に利用されている数学的な定理は上の二つであったわけである。

§4　適切な等角写像の発見

等ポテンシャル問題を解くときに、その場で与えられた適切であまりにも見事な等角写像により問題の解がもとめられることがある。このような場合、問題が解けたはいいのだがその写像がどのようにして得られたのかが気になるだろう。円領域を、多角形領域を、放物線型の壁を下半面へと写像する関数をどのようにして見つけたのだろうかと首をひねるのだ。

このセクションではその答えを、つまり個々の問題に適切な等角写像を見つける方法論を説明する。

まずは必要となる種々の定理を説明する。そして道具が揃ったところで発見法を組み立てよう。

§4.1　発見法を支えるいくつかの定理

§4.1.1　特異点の写像

前セクションでは流線と等ポテンシャル線の写像について述べた。ここでは特異点の写像について話す。特異点を記述する量である循環、流出量に着目しよう。**循環と流出量の値はスカラー関数の積分なので、写像前後で不変である**。さて数学的に考えると、**これらの値はその閉経路内に特異点があるときのみ 0 ではない値をとる**はずである。値が不変であるということから、等角写像は特異点を、その性質を保持して—湧き出しは湧き出しとして、渦糸は渦糸として—対応するポイントにうつすことがわかる。

§4.1.2　流れの一意性定理

非圧縮性流体の渦なしの流れはその流れ関数とポテンシャル関数とを組み合わせた正則関数によって表されることを思い出してほしい。**いろいろな流れは正則関数で表され、いろいろな正則関数は流れを表す**。また、§2.1.2 で述べたように湧き出しや吸い込みは特異点によってあらわされる。**§1.2 の最後**

で登場した循環、流出量といった積分は湧き出しや渦糸がなければゼロになるが、これは内部に特異点を含まない閉経路に沿った正則関数の積分がゼロになる事実に対応する。流れと正則関数とを、湧き出しや渦糸と特異点とを同一視することができる。

さて、以下の定理を見てみよう。

流れの一意性定理 : $f(z)$ は領域 D で孤立点を除いて正則で、境界を含めて連続であるとする。孤立点での特異性と、境界上での $f(z)$ の実数部 (あるいは虚部) を指定すると、$f(z)$ は純虚数 (あるいは実数) の定数を除いて一意に決まる。領域は多重連結であってもよい。

先の見方をもってすれば、この定理から**領域内での湧き出しや渦糸の場所と境界条件さえ決めれば渦なしの流れの複素速度ポテンシャルは定数を除いて一意に決まる、つまり流れは (それを微分したものなので) 一意に決まる**ことがわかる。

§4.2　等角写像発見法

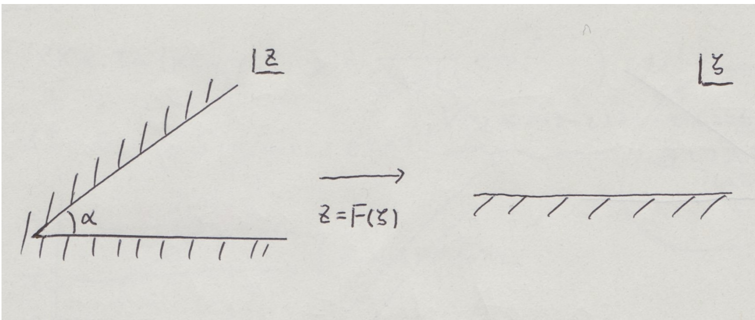
さて、ポテンシャル問題を解く際に等角写像がどのように利用されているかを今一度確認しよう。いま我々は z 平面におけるある流れの複素速度ポテンシャル $f(z)$ を知っているとする。この流れは z 平面のある領域 D から影響を受けている。ここで z 平面の領域 D を ζ 平面の領域 D' へと写像する関数 $z = F(\zeta)$ を知っているならば、f にそれを代入した $f(F(\zeta))$ こそが領域 D' が存在する ζ 平面での流れの複素速度ポテンシャルである。つまり**領域変換前の複素速度ポテンシャルに等角写像関数を代入することで領域変換後の複素速度ポテンシャルを得る**。

例えば ζ 平面の下半面と z 平面の x 軸の正の部分とを対応させる関数を、ζ 平面の下半面を占める導体壁の周りに形成される複素ポテンシャルの関数に代入することで導体針の周りの複素ポテンシャルの関数をもとめられる。

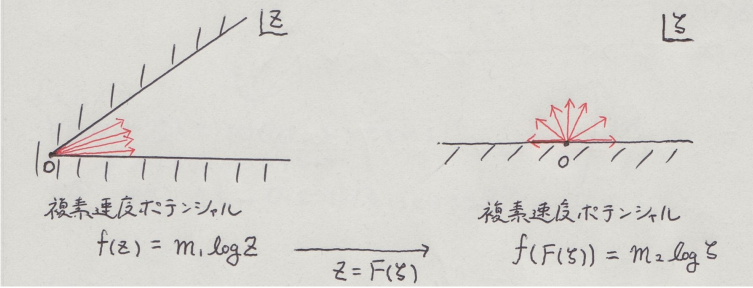
適切な等角写像の発見法は非常に明瞭なアイデアに基づいている。**領域変換前の流れの複素速度ポテンシャルと領域変換後の流れの複素速度ポテンシャルとから、それらの橋渡しをしている写像をあぶりだそう**という発想だ。先の記号を用いて言うのならば”$f(z)$ と $f(F(\zeta))$ とから $z = F(\zeta)$ を求めよう” ということである。このとき**あぶり出しに使う流れは自分のやりやすいように決めればよい**。

簡単な例として、三角型領域を上半面へとうつす写像をみつけてみよう。

z 平面の三角型領域を ζ 平面の上半面へとうつす等角写像 F をもとめる。F は原点を原点にうつす写像だとしておく。三角型領域の頂角の大きさを α とする。



ここで両方の領域の原点に湧き出しを配置する。複素速度ポテンシャルはそれぞれ $m_1 log z$ と $m_2 log\zeta$ となり、これらがそれぞれ先の $f(z)$ と $f(F(\zeta))$ に対応しているのである。



m_1 と m_2 の関係については流出量を考えればわかる。流出量は z 平面の湧き出しが αm_1、ζ 平面の湧き出しが πm_2 である。これらの値は §4.1.1 で述べたように写像前後で不変であるから以下。

$$\alpha m_1 = \pi m_2 \quad \therefore m_2 = \frac{\alpha}{\pi} m_1$$

ここまでこれば、あとは先の二つのポテンシャルから $F(\zeta)$ をあぶりだせばよい。

$$m_1 \log z = m_2 \log \zeta \quad \therefore z = F(\zeta) = A\zeta^{\frac{\alpha}{\pi}}$$

常にこの手順でよい。つまりこうである。領域変換前の平面である流れを考える。そして領域変換後の平面における対応する流れを考える。流れに存在する特異点は変換において循環や流出量が変わらずに、対応するポイントに移動する。特異点の場所と境界値さえ決めれば"流れの一意性定理"から複素速度ポテンシャルは一意に決定されるので、それぞれの平面における複素速度ポテンシャルは一つずつに決定される。つまり我々は二つの複素速度ポテンシャルを得る。その二つの複素速度ポテンシャルを比較することで、それらを結び付けている等角写像を発掘する。

想定する流れは簡単であれば簡単であるほど良い。先の三角型領域において原点に渦糸をおいてもしょうがないだろう。三角型領域で渦糸がつくる流れをすぐに想像できるだろうか。そのポテンシャルがすぐにもとめられるだろうか。