行列の対角化　演習問題詳解

作成:とらのこわたし

固有値や固有ベクトル、固有空間に関する問題のおそらく答案に書く上でもっとも楽な解法を先に書いておく。

まず、固有方程式$\det(\lambda E_n - A) = 0$を解く。次に、$(\lambda E_n - A)\mathbb{x} = \mathbb{o}$に、先ほど求めた$\lambda$を一つずつ代入する。重解から代入するとよい。$(\lambda E_n - A)$に行基本変形を行うとこれをなす行ベクトルの中に零ベクトルが出てくる。この零ベクトルの個数が固有空間の次元である（$\because \dim(\mathrm{Ker}F) = \dim V - \dim(\mathrm{Im}F)$で表される）。$\lambda$の重複度と固有空間の次元が一致しない場合、その時点で対角化不可能と判定できる（∵ レジュメでいうところの定理 4.4.5）。また、固有方程式に重解がなければその時点で対角化可能である。

固有ベクトルも求める際は、固有ベクトルの成分の間の条件を使って文字を可能な限り減らし、残った成分を係数とするベクトルの線形結合が解となる。簡単な(1)で具体例を示す。

この問題以降も固有値をλとおく。また$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$とする。

(1)

固有方程式は$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \therefore (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0 \ \therefore \lambda = \pm 1$

$\lambda = 1$ のとき行基本変形により$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　よって固有空間の次元は $3 - 1 = 2$。

（実際に固有ベクトルを$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$としてかけてみると$\begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{o} \therefore x_1 = x_3$　よって解は$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので、二つのベクトルが固有空間の基底であること、つまり次元が 2 であることがわかる。）

$$\lambda = -1; \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ よって次元は 1。

固有値 1 で次元2、固有値-1で次元2

(2) $\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3(\lambda + 2)$よって固有値は$\lambda = \pm 2$

$\lambda = 2$のとき$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$よって次元は2。

$\lambda=-2$のとき$\begin{pmatrix}-4 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$よって次元は1。

$\lambda=2$で次元2、$\lambda=-2$で次元1

(3)

$$\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^4 \therefore \text{固有値は}\lambda=2$$

$\lambda=2$を代入して$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ よって次元は1。

$\lambda=2$で次元1

61.「ベクトル$\mathbb{a}$を転置したベクトル」を、$\mathbb{a}^\top$と表記することにする（word の入力では無理なのです）。

固有ベクトルを$\mathbb{x}\in\mathbb{R}_{/\{\mathbb{o}\}}$とおく。

$\mathbb{a}\mathbb{a}^\top\mathbb{x}=\lambda\mathbb{x}$から、$\mathbb{a}\langle\mathbb{a},\mathbb{x}\rangle=\lambda\mathbb{x}$

$\lambda=0$のとき$\mathbb{a}\neq\mathbb{o}$から、$\langle\mathbb{a},\mathbb{x}\rangle=0$ このとき$\mathbb{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}, \mathbb{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $(a_1,\dots,a_n,x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R})$

とすると、$\langle\mathbb{a},\mathbb{x}\rangle=a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$

よって$a_k\neq 0$なる整数kが1以上n以下に存在するので、移項してx_kを消去できる。よって次元は$n-1$

$\lambda\neq 0$のとき$\mathbb{x}=\frac{\langle\mathbb{a},\mathbb{x}\rangle}{\lambda}\mathbb{a}$ よって$\mathbb{x}=k\mathbb{a}$ $(k\in\mathbb{R}_{/\{0\}})$と表せるので次元は1で、$\lambda k=\langle\mathbb{a},k\mathbb{a}\rangle\therefore$

$\lambda=|\mathbb{a}|^2$

なお$\mathbb{x}\in\mathbb{C}$の場合を考えなくてよい理由はわからなかった。

$\lambda=0$で次元$n-1$、$\lambda=|\mathbb{a}|^2$で次元は1

62. (1)

$\begin{vmatrix}\lambda+4 & -4\\ 9 & \lambda-8\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2$ よって固有値は$\lambda=2$

$\begin{pmatrix}6 & -4\\ 9 & -6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$固有空間の次元は$1\neq 2$、よって対角化不可能。

不可能

(2)

$\begin{vmatrix} \lambda-7 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-8)(\lambda-4)$ よって固有値は$\lambda = 4,8$

$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$に対角化可能

(3)

$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ 2 & \lambda & -4 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ よって固有値は$\lambda = 1,2,3$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$に対角化可能

(4)

$\begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$ よって固有値は$\lambda = \pm 1$

$\lambda = 1$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 固有空間の次元は$1 \neq 2$、よって対角化不可能。

対角化不可能

(5)

$\begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 2 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$ よって固有値は$\lambda = 1,2$

$\lambda = 1;\begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 固有空間の次元は 2、よって対角化可能。

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$に対角化可能

63.固有方程式、固有ベクトル、基底変換行列の逆行列を求める。計算ミスとの戦い。なお模範解答と多少異なる。

(1)

固有方程式は$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1) = 0 \therefore \lambda = 1,2$

$\lambda = 1;\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \ \therefore x_1 = 0,$すべての解は$x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$の形で記述される。

$$\lambda = 2;\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbb{o}\ \therefore 解は x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$対角化後 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

⑵

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 4 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 4 = 0 \therefore \lambda = 1 \pm 2i$$

$$\lambda = 1 + 2i;\ \begin{pmatrix} 2i & 4 \\ -1 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbb{o}\ \therefore \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbb{o} \therefore 解は x_2 \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 - 2i;\ \begin{pmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbb{o}\ \therefore \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbb{o} \therefore 解は x_2 \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$対角化後 \begin{pmatrix} 1 + 2i & 0 \\ 0 & 1 - 2i \end{pmatrix};\ P = \begin{pmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = -\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} i & -2 \\ i & -2 \end{pmatrix}$$

⑶

$$\begin{vmatrix} \lambda - 8 & 6 \\ -15 & \lambda + 11 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0 \therefore \lambda = -1, -2$$

$$\lambda = -1;\ \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbb{o}\ \therefore \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbb{o} \therefore 固有ベクトルは \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -2;\ \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ -15 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbb{o}\ \therefore \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbb{o} \therefore 固有ベクトルは \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$対角化後 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix};\ P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

⑷

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & 9 & 6 \\ 2 & \lambda - 5 & -2 \\ -6 & 15 & \lambda + 8 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \therefore \lambda = 1, \pm 2$$

$$\lambda = 1;\ \begin{pmatrix} -3 & 9 & 6 \\ 2 & -4 & -2 \\ -6 & 15 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{o} \therefore \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{o}\ \therefore 固有ベクトルは \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2;\ \begin{pmatrix} -2 & 9 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \\ -6 & 15 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{o} \therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{o}\ \therefore 固有ベクトルは \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -2;\ \begin{pmatrix} -6 & 9 & 6 \\ 2 & -7 & -2 \\ -6 & 15 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{o} \therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{o}\ \therefore 固有ベクトルは \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$対角化後 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

n乗を求める際はレジュメ 4.6.1 の$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP \therefore A^n = P(P^{-1}AP)^nP^{-1}$を用いる。

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & -6 \\ -2 & 5 & 2 \\ 6 & -15 & -8 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-(-2)^n & -3+3(-2)^n & -2+2(-2)^n \\ 2-2^{n+1} & -3+2^{n+2} & -2+2^{n+1} \\ -2+3\cdot 2^n-(-2)^n & 3-3\cdot 2^{n+1}+3(-2)^n & 2-3\cdot 2^n+2(-2)^n \end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{vmatrix} \lambda-6 & 14 & -20 \\ 3 & \lambda-3 & 6 \\ 3 & -7 & \lambda+10 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+4)(\lambda-3)=0 \therefore \lambda = 0,3,-4$$

$$\lambda = 0; \begin{pmatrix} -6 & 14 & -20 \\ 3 & -3 & 6 \\ 3 & -7 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \ \therefore \text{固有ベクトルは} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3; \begin{pmatrix} -3 & 14 & -20 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & -7 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \therefore \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \ \therefore \text{固有ベクトルは} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -4; \begin{pmatrix} -10 & 14 & -20 \\ 3 & -7 & 6 \\ 3 & -7 & \lambda+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \ \therefore \text{固有ベクトルは} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{対角化後} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{vmatrix} \lambda & 3 & -4 \\ -2 & \lambda-7 & 8 \\ -1 & -3 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)=0 \therefore \lambda = 1,2$$

$$\lambda = 1; \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & -6 & 8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \therefore \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \ \therefore \text{固有ベクトルは} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{と} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2; \begin{pmatrix} 2 & 14 & -20 \\ 3 & -5 & 6 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \therefore \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \ \therefore \text{固有ベクトルは} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{対角化後} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 \\ -1 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & -8 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 \\ -1 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2^n & 3-3\cdot 2^n & 2^{n+2}-4 \\ 2^{n+1}-2 & 3\cdot 2^{n+1}-5 & 8-2^{n+3} \\ 2^n-1 & 3\cdot 2^n-3 & 5-2^{n+2} \end{pmatrix}$$

64. (1)

固有値の定義により$A\mathbb{v} = \lambda\mathbb{v}$

ここで、$A^n\mathbb{v} = \lambda^n\mathbb{v}$なる$n \in \mathbb{N}$が存在すれば、$A^{n+1}\mathbb{v} = A(A^n\mathbb{v}) = A\lambda^n\mathbb{v} = \lambda^n A\mathbb{v} = \lambda^{n+1}\mathbb{v}$

ゆえに帰納的にλ^kはA^kの固有値であることが示せる。

(2)

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3) = 0 \therefore \lambda = 1,3$$

$$\lambda = 1; \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbb{o} \therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbb{o} \therefore \text{固有ベクトルは}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbb{o} \therefore \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbb{o} \therefore \text{固有ベクトルは}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値1で固有ベクトル$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,固有値$3^{100}$で固有ベクトル$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

65.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$である。

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$から、$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

66. レジュメの 4.6.2 の結論（右辺の係数行列の固有値と固有ベクトルを求めれば一般解を求められる）を用いる。4.6.2 を実際の計算でどう使うかという問題。

(1)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1) = 0 \therefore \lambda = -1,2$$

$\lambda = -1; \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbb{o}$　固有ベクトルは$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbb{o}$　固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k_1 e^{-t} + k_2 e^{2t} \\ k_1 e^{-t} + k_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -2k_1 e^{-t} + k_2 e^{2t} \\ y = k_1 e^{-t} + k_2 e^{2t} \end{cases}$$

(2)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & -4 \\ 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \therefore \lambda = 1,3$$

$\lambda = 1; \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbb{0}$　固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3; \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbb{0}$　固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k_1 e^{t} + k_2 e^{3t} \\ k_1 e^{t} + k_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2k_1 e^{t} + k_2 e^{3t} \\ y = k_1 e^{t} + k_2 e^{3t} \end{cases}$$

(3)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -8 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda + 2 & 1 \\ 8 & -6 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0 \therefore 0, \pm 1$$

$\lambda = 0; \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 8 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbb{0} \therefore \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{0}$　固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1; \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 8 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbb{0} \therefore \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{0}$　固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0; \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 8 & -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbb{0} \therefore \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{0}$　固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k_1 + k_2 e^{t} \\ k_1 + k_3 e^{-t} \\ 2k_1 + 2k_2 e^{t} - k_3 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2k_1 + k_2 e^{t} \\ y = k_1 + k_3 e^{-t} \\ z = 2k_1 + 2k_2 e^{t} - k_3 e^{-t} \end{cases}$$

67. 4.6.3 をどう使うかという問題。

(1)

固有方程式は$\lambda^2-2\lambda-3=0\ \therefore (\lambda-3)(\lambda+1)=0 \therefore \lambda=3,-1$

よって一般項は$x_n=3^{n-1}c_1+(-1)^{n-1}c_2$

$x_1=5, x_2=3$から、$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$

$x_n=2\cdot 3^{n-1}+3(-1)^{n-1}$

(2)

固有方程式は$\lambda^2-4\lambda+3=0\ \therefore (\lambda-3)(\lambda-1)=0 \therefore \lambda=3,1$

よって一般項は$x_n=3^{n-1}c_1+c_2$

$x_1=2, x_2=-2$から、$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 4\end{pmatrix}$

$x_n=-2\cdot 3^{n-1}+4$

(3)

$\lambda^3-3\lambda^2-4\lambda+12=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+2)$

$\therefore x_n=2^{n-1}c_1+3^{n-1}c_2+(-2)^{n-1}c_3$

$\mathrm{x}_1=2, x_2=-10, x_3=-2$から、$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -2\\ 4 & 9 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -10\\ -2\end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$

$x_n=2^{n-1}-2\cdot 3^{n-1}c_2+3(-2)^{n-1}$

68. 61 に疑問符。誰かわかったら教えてください（）