数理科学基礎　試験対策プリント
【解析学編】

制作　理科一類 18 組 ks
協力　理科一類 18 組 om
Special Thanks 理科一類 18 組 tt

はじめに
みなさん、こんにちは。試験に向けていかがお過ごしでしょうか。
このたびは、数理科学基礎、解析学編、試験対策プリントが完成いたしましたので、僭越ながらみなさんに配布する次第であります。ぜひ、ご活用ください。このプリントがみなさんの試験対策に少しでもお役に立てれば幸いです。

内容
5 月 8 日ごろ、LINE 上でアンケートを実施したところ、予想通りεδ論法を苦手とするかたが多くいらっしゃるようでした。このため、第五回 関数の極限値 により重きをおいて勉強、制作をしております。その他の分野に関しては、まんべんなく学習しておりますが、予想される例題のパターンが多いため微分方程式の項目が多くなっております。

出典
数学用語の定義や定理の証明などを共通資料、授業、有名問題以外から持ち出している場合、【】内に出典を示してあります。

過去問について
皆さんもご存知のように、数理科学基礎は今年から導入された科目のため、内容が合致する過去問が少なく、十分に用意することができませんでした。また植田一石教授はごく最近赴任してきた教授でいらっしゃるため、残念ながらどのような問題を出すのか未知数です。そのため、例題の一部に他の数学教授の過去問を用いるという形をとっています。あらかじめご了承ください。

第五回 関数の極限値

ポイント確認

関数の極限の定義

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

とは、任意の正数$\varepsilon > 0$に対して、ある正数$\delta > 0$があって$0 < |x - x_0| < \delta$ならば、$|f(x) - b| < \varepsilon$となるようなものが存在することである。

関数の連続性の定義

関数$f(x)$が点x_0で連続であるとは、任意の正数$\varepsilon > 0$に対して、ある正数$\delta > 0$があって、$|x - x_0| < \delta$ならば、$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$となるようなものが存在することである。

中間値の定理

有界閉区間$[a, b]$で定義された連続関数$f(x)$および実数dが$f(a) < d < f(b)$ or $f(b) < d < f(a)$を満たすならば、$f(c) = d$かつ$a < c < b$を満たす実数cが存在する。

最大値の定理

空でない有界閉区間を定義域とする連続関数は最大値と最小値が存在する。

第一問
以下の事実を ε δ 論法を用いて正確に示せ。
(1) $f(x) = \tan x$は$x = 1$で連続である。
(2) $f(x) = x^2$は x=2 で連続である。
(3) $f(x) = \cosh x$は x=0 で連続である。
【(1)(3)自作】

ポイント
この手の問題は解き方が様々で、どうやったらよいかわかりにくかったので、以上の(1)(2)(3)のパターンに集約しました。たいていの問題はこのどれかの解き方で解けるはずです。

解説
(1)
一番簡単なパターンです。経験的に、x のとりうる範囲うまく定めたとき、任意の実数 y にたいして、$f(x) = y$となるような実数 x が一意的に存在する連続関数はだいたいこのパターンです。
例:$f(x) = \log x, f(x) = x^3$

手順としては
① $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$をうまく変形して$(\varepsilon$ の式$) < x - x_0 < (\varepsilon$ の式$)$にする。
② ①で求めたεの式のうち x より小さいほうを$g(\varepsilon)$大きいほうを$h(\varepsilon)$とおいたとき、$\delta = \min\{|g(\varepsilon)|, |h(\varepsilon)|\}$と定める。
③逆変形していく。
(ただし①は下書きで書くだけで解答には書かない)

では、例題を解いてみます。

下書き
$|\tan x - \tan 1| < \varepsilon$を変形して

$$-\varepsilon + \tan 1 < \tan x < \varepsilon + \tan 1$$
$$\arctan(-\varepsilon + \tan 1) < x < \arctan(\varepsilon + \tan 1)$$
$$\arctan(-\varepsilon + \tan 1) - 1 < x - 1 < \arctan(\varepsilon + \tan 1) - 1$$

解答
任意に$\varepsilon > 0$を一つ固定して定める。このとき$|x - 1| < \delta$を仮定すると、$(\delta > 0)$

$$\delta = \min\{1 - \arctan(-\varepsilon + \tan 1), \arctan(\varepsilon + \tan 1) - 1\}$$
とおけば、
$$\arctan(-\varepsilon + \tan 1) - 1 < x - 1 < \arctan(\varepsilon + \tan 1) - 1$$
が成立するから、これを変形すると、
$$|\tan x - \tan 1| < \varepsilon$$
となり、題意は示された。

$\delta = \min(a, b)$ならば、$|x| < \delta$のとき、仮に 0<a<b とすると$x \in (-a, a)$ だが、これは$(-a, a) \subset (-a, b)$または、(-a,a)$\subset (-b, a)$なので、$x \in (-a, b)$または、$x \in (a, -b)$

(2)
このパターンは、①の変形の途中で、累乗したり、逆数を取る必要が出てきて、不等式の形が崩れてしまう場合に使います。基本的に(1)と同じ手順ですが、あらかじめεの範囲を$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$と定めてから、①の変形を行います。
(詳しくは、数理科学基礎演習問題 4 月 21 日分の大問 6 をご覧ください)

例:$f(x) = e^x, f(x) = \frac{1}{x+1}$

では、例題を解いてみます。

下書き
$|x^2 - 4| < \varepsilon$を変形して、
$$-\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon$$
$$-\varepsilon + 4 < x^2 < \varepsilon + 4$$
ここで、$0 < \varepsilon < 4$の範囲に固定すると、
$$\sqrt{-\varepsilon + 4} - 2 < x - 2 < \sqrt{\varepsilon + 4} - 2$$
と変形できる。

ここでεの範囲を定めておかないと、$\sqrt{-\varepsilon + 4}$を定義できない。

解答
任意に$0 < \varepsilon < 4$を一つ固定して定める。このとき、$|x - 1| < \delta$を仮定すると、
$(\delta > 0)$
$$\delta = \min\{2 - \sqrt{-\varepsilon + 4}, \sqrt{\varepsilon + 4} - 2\}$$
とおけば、
$$\sqrt{-\varepsilon + 4} - 2 < x - 2 < \sqrt{\varepsilon + 4} - 2$$
が成立するから、辺々に 2 を足して 2 乗して、変形すると
$$|x^2 - 4| < \varepsilon$$
となり、題意は示された。

注意

この方法は、あくまで、εの範囲を固定してもよいという事実を既知として考えています。おそらく、減点されることはないでしょうが(授業で扱ったので)、不安な場合は証明を書いといたほうがよいかもしれません。(証明は数理科学基礎演習問題 4 月 21 日分の大問 6(1)の解答をご覧ください)また、共通資料にはこれと異なる方法での解法が載っているので、人によっては、そちらの解法のほうを好むかもしれないです。

(3)
このパターンは、(1)(2)では、計算が煩雑になってしまう場合に以下の公式を用いて、簡単な関数に分解して考える方法です。

公式

$\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \lim_{x\to x_0} g(x) = b$が成立しているとき、

1, $\lim_{x\to x_0}\{f(x)+g(x)\} = a+b$

2, $\lim_{x\to x_0} kf(x) = ka$

3, $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab$

4, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}\,(g(x)\neq 0)$

この方法は、自分で勝手に考えたのですが、おそらく、この公式は共通資料に乗っているので使っても問題ないはずです。(この公式の証明は第二問で扱います。)
例:$f(x) = x^3 - 3x, f(x) = x + \sin x$

では、例題を解いてみます。

下書き

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

なので、まず、$\frac{e^x}{2}$と$\frac{e^{-x}}{2}$に分けて考える。

$\left|\frac{e^x}{2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$を変形すると、

$$-2\varepsilon + 1 < e^x < 2\varepsilon + 1$$

ここで、$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$に固定すると、

$$\log(-2\varepsilon + 1) < x < \log(2\varepsilon + 1)$$

$\left|\frac{1}{2e^x} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$を変形すると、

$$-2\varepsilon + 1 < \frac{1}{e^x} < 2\varepsilon + 1$$

ここで、$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$と固定すると、

辺々正なので、逆数を取ると不等号の順番が入れ替わって、

$$\frac{1}{2\varepsilon + 1} < e^x < \frac{1}{-2\varepsilon + 1}$$

また、辺々正なので、対数を取ることができて、

$$\log\frac{1}{2\varepsilon + 1} < x < \log\frac{1}{-2\varepsilon + 1}$$

解答

任意に$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$を一つ固定して定める。

このとき、$|x| < \delta$を仮定すると、$(\delta > 0)$

$$\delta = \min\{-\log(-2\varepsilon + 1), \log(2\varepsilon + 1)\}$$

とおけば、

$$\log(-2\varepsilon + 1) < x < \log(2\varepsilon + 1)$$

が成立するから、変形すると、

$$\left|\frac{e^x}{2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

すなわち

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

また、$|x| < \delta$を仮定すると、$(\delta > 0)$

$$\delta = \min\{\log\frac{1}{2\varepsilon + 1}, \log\frac{1}{-2\varepsilon + 1}\}$$

とおけば、

$$\log\frac{1}{2\varepsilon + 1} < x < \log\frac{1}{-2\varepsilon + 1}$$

が成立するから、変形すると、

$$\left|\frac{1}{2e^x}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

すなわち

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}$$

以上より、

$$\lim_{x\to 0} coshx=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{2}+\frac{e^{-x}}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

また、$\mathrm{f}(0)=1$だから、題意は示された。

$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$のとき、関数は$\mathrm{x}_0$で連続。

参考

中には、以上のパターンでは収まりきらないような場合もあります。

例$\mathrm{f(x)}=\mathrm{xsin}\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)$の$\mathrm{x}=\mathrm{x}_0$における連続性。(共通資料より)

この場合は、自分のひらめきを駆使して頑張って解いてください。私にはパターン化できませんでした。申し訳ございません。

第二問
αを任意の実数とする。n次方程式

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \alpha$$

において、nが正の奇数、a_nが正数ならば、実数解を少なくとも一つ持つことを示せ。
【演習 微分積分 改】

ポイント
中間値の定理を用います。

解答
与方程式の左辺をf(x)とおく。$x \neq 0$とすれば、

$$f(x) = x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + a_n \right)$$

である。$x \to \pm\infty$のとき、

$$\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + a_n \to a_n$$

であり、$x \to \infty$ならば、$x^n \to \infty$、$x \to -\infty$ならば、$x^n \to -\infty$であるから、

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

となる。当然、f(x)は連続関数であるから、任意のαに対して、

$$f(x_1) < \alpha < f(x_2)$$

であるようなx_1, x_2が存在している。よって、中間値の定理より、

$$x_1 < a < x_2, f(a) = \alpha$$

を満たすaが少なくとも一つ存在する。

第一回　集合と写像

第一問
集合X, Yを以下のように定めるとき、$X \in Y$であるかどうか答えよ。
また、$X \subset Y$であるかどうか答えよ。
(1) $X = \mathbb{Q}, Y = \mathbb{R}$
(2) $X = 1, Y = \{1,2,\{1,2\}\}$
(3) $X = \{1,2\}, Y = \{1,2,\{1,2\}\}$
【(1)自作】

ポイント
記号∈と⊂を区別する問題です。個人的には、この違いを以下のように解釈しています。

<u>$A \in B$　集合Aそのものが集合Bに入っている。</u>
<u>$A \subset B$　集合Aの中に入っているものはすべて集合Bの中に入っている。</u>
(正確に定義するならば、$A \subset B \Leftrightarrow (C \in A \Rightarrow C \in B)$)
たとえば、$A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3,\{1,2,3,4\}\}$のときは、Aそのものである$\{1,2,3\}$はBの中身にはないので、$A \notin B$ですが、Aの中身の1,2,3はすべてBの中に入っているので、$A \subset B$となります。

注意
$A \in B, C \subset D$と書いた場合、B, C, Dの部分に来るのは集合のみです。【数学小辞典第二版】には、この部分に数値が入った場合の定義が書かれていませんでした。なので、B, C, Dに数値が入っている場合はおそらく偽の命題です。共通資料の確認AにもB, C, Dの部分に数値が入った場合の真偽判定問題がありましたが、すべて答えは偽でした。

解答
(1) $X \notin Y, X \subset Y$
(2) $X \in Y, X \not\subset Y$
(3) $X \in Y, X \subset Y$

第二問
次の写像fが全射かどうか答えよ。また、単射かどうか答えよ。

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - 3x\ (a > 0)$

(3) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, x \mapsto \frac{x}{2}$

ポイント
全射であるか単射であるかは、以下のような意味づけをするとわかりやすいです。

全射
任意の$y \in Y$について、ある$x \in X$で、$f(x) = y$となるようなものが存在する。
単射
任意の$x_1, x_2 \in X$の時において$f(x_1) = f(x_2)$ならば、$x_1 = x_2$が必ず成り立つ。

逆に言えば、

全射でない
ある$y \in Y$について、すべての$x \in X$で、$f(x) \neq y$である。
単射でない
ある$x_1, x_2 \in X$の時において$f(x_1) = f(x_2)$かつ$x_1 \neq x_2$である。

これを利用して例題を解いてみます。

解答
(1)

$$y = 1$$

とすると、与式を変形して、

$$x^2 - x + 1 = 0$$

この二次方程式は実数解を持たない。すなわち、全射でない。

$$\frac{x}{x^2+1} = y$$

とおく。$(x^2 + 1 \neq 0)$これを変形すると、

$$yx^2 - x + y = 0$$

ここで、二次方程式の判別式より、

$$D = 1 - 4y^2 > 0$$

すなわち

$$-\frac{1}{2} < \mathrm{y} < \frac{1}{2}\ y \neq 0$$

ならば、xは実数解を 2 つもつことになる。よって、単射でない。

(2)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

また、

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

である。よって、f(x)は連続関数なので、中間値の定理より、$\mathrm{f(x)} = 0$を満たす $\mathrm{x} \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$が存在する。つまり、全射。

また、

$$\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(1) = 0$$

であるから、単射ではない。

(3)

$$\mathrm{y} = \frac{1}{3}$$

とすると、これを満たすxは$\mathrm{x} \in \mathbb{Z}$において存在しない。よって、全射でない。

また、

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)$$

であるならば、

$$\frac{\mathrm{x}_1}{2} = \frac{\mathrm{x}_2}{2}$$

が成り立ち、

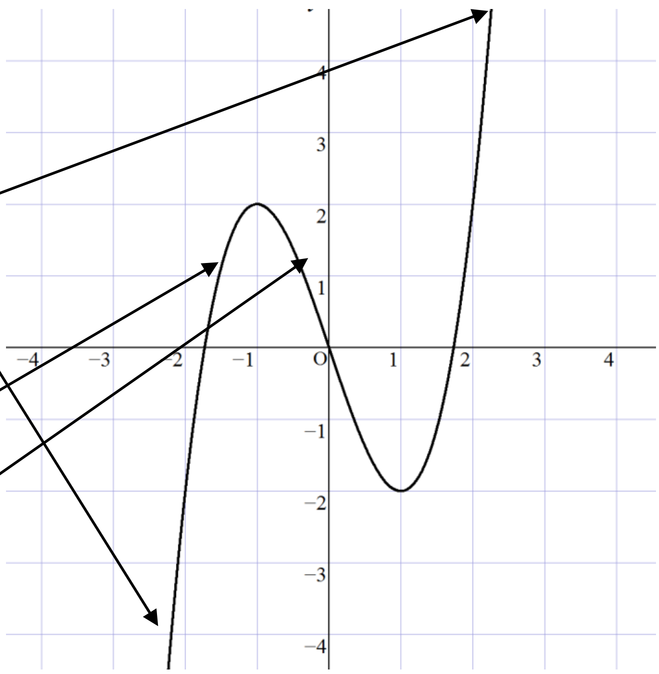
$$\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$$

が成立するから、単射。

参考

この問題はあらかじめ答えを予測しておくと解答の見通しが立ちやすいです。$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$の場合は実際にグラフを書くことによって、解答の見通しを立てておくと便利です。(というか、たぶん皆さんもうやってると思いますが。)

例　$f(x) = x^3 - 3x$



上から下まで、ずっとつながっているから、全射

同じ高さの部分が二つ以上あるから、単射ではない。

第三問

f, gは、$f: A \to B, g: B \to C$なる定義域と値域を持つ写像である。以下の命題の真偽をこたえよ。

(1) 合成関数$g \circ f$が全射ならば、fは全射である。

(2) 合成関数$g \circ f$が全射ならば、gは全射である。

(3) 合成関数$g \circ f$が単射ならば、fは単射である。

(4) 合成関数$g \circ f$が単射ならば、gは単射である。

【2011 年 数学 II 加藤教授試験問題】

ポイント

この問題は、正解 2 点、不正解-2 点、無回答 0 点という問題でした。しかも地味に反例が見つけにくくて心臓に悪いです。

解答

(1)

偽

反例は

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$$

$$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} 1 (when\, n = 1) \\ n - 1 (when\, n > 1) \end{cases}$$

(2)

真

題意より、任意の$z \in C$に対してある$x \in A$が存在して、

$$z = g(f(x))$$

任意のxに対して、$f(x)$が存在するのだから、gは全射である。

(3)

真

$$f(x_1) = f(x_2)$$

とする。この時、

$$g(f(x_1) = g(f(x_2))$$

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$$

$g \circ f$は単射であるから、

$$x_1 = x_2$$

つまり、fは単射である。

(4)

偽

反例は

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{x}$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$$

第三回　述語論理と最大最小

ポイント確認

記号の意味の確認

$\forall$	すべての…
$\exists$	存在する。
$\exists!$	一意的に存在する。
$\neg$	否定
sup	上限
inf	下限

使い方

$\exists x \in X\, P(x)$	集合 X に含まれるあるxは条件P(x)を満たす。
$\forall y \in Y(A(y) \Rightarrow B(y))$	集合 Y に含まれるすべてのyは条件A(y)がなりたつならば、条件B(y)が成り立つ。
$\exists!\, z \in Z\neg(C(z) \vee D(z))$	集合 Z に含まれるzのうち、条件C(z)とD(z)をともに満たさない z がただ一つ存在する。

その他重要単語

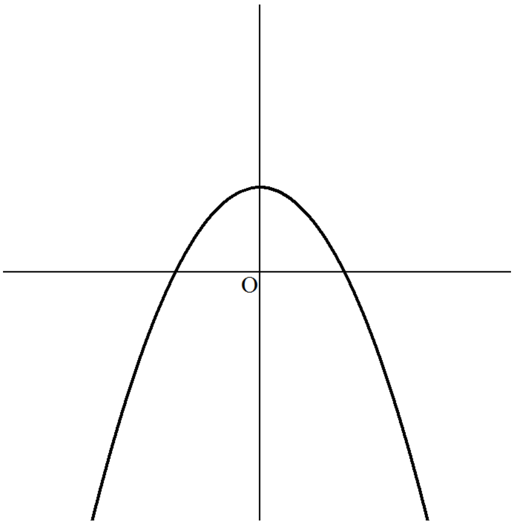
(集合Aの)上界	任意の$x \in A$に対して、$x \leq b$となる$b \in \mathbb{R}$
(集合Aの)下界	任意の$x \in A$に対して、$x \geq b$となる$b \in \mathbb{R}$
(集合Aの)上限	集合Aの上界の最小値。supAとあらわす。
(集合Aの)下限	集合Aの下界の最大値。infAとあらわす。
(集合Aの)最大元	集合Aの最大値。maxAとあらわす。
(集合Aの)最小元	集合Aの最小値。minAとあらわす。
(集合Aは)有界	集合Aが上界と下界を持つ。

f(x)の局所的な最大点	ある正数$\delta > 0$が存在して、$\|x - x_0\| < \delta$ならば、$f(x) \leq f(x_0)$となるようなx_0
f(x)の局所的な最大値	x_0が局所的な最大点である時の、$f(x_0)$
f(x)の極大点	ある正数$\delta > 0$が存在して、$0 < \|x - x_0\| < \delta$ならば、$f(x) < f(x_0)$となるようなx_0
f(x)の極大値	x_0が極大点である時の、$f(x_0)$

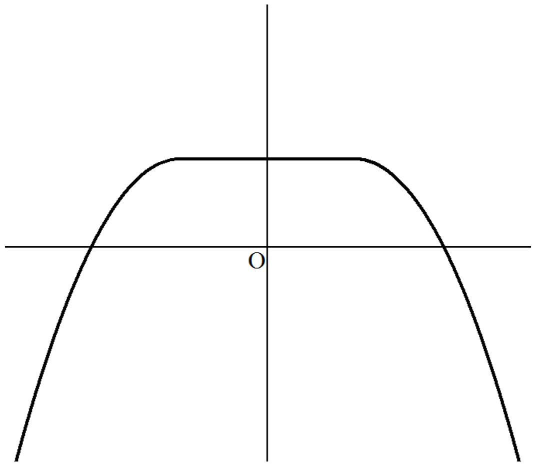
注：局所的な最小値、局所的な最小点、極小点、極小値も同様に定義できる。

参考

局所的な最大と極大の違いが分かりにくい場合は、以下のように視覚的にイメージしておくとよいと思います。



極大



局所的に最大

第一問
$A = \{1,2,3 \ldots n\}$とする。$A \times A$の部分集合Vで、

$$(\forall y \in A)(\exists x \in A)((x,y) \in V)$$

を満たすものの個数を、$f(n)$

$$(\exists x \in A)(\forall y \in A)\big((x,y) \in V\big)$$

を満たすものの個数を、$g(n)$とする。
(1) $f(n)$を求めよ。
(2) $g(n)$を求めよ。
【数理科学基礎演習問題 4 月 21 日分　改】

ポイント
時間があまりなかったので、ただ演習問題を一般化しただけです。すみません。
(1)(2)
この問題文の違いを理解しやすくするため、日本語に直してみましょう。すると、(1)は、集合Yに含まれるすべてのyに対して、集合Xに含まれるxのうち少なくとも一つを定めると、$(x,y) \in V$を満たす。(2)は、集合Xに含まれるxのうち、少なくとも一つは、任意の$y \in Y$に対して、$(x,y) \in V$を満たす。という意味になります。この違いに留意しながら問題を解きます。

解答
(1)

	x					
y		1	2	3	…	n
	1					
	2					
	3					
	⋮					
	n					

上のような表を作る。上の表の各ますは$A \times A$の部分集合Vに要素を含むかどうかを表すものとする。Vにそのますの要素が含まれているならば 1、そうでないなら 0 を記入する。たとえば、$n = 5$だと仮定して、$V = \{(2,1),(3,5),(4,3)\}$ならば、

	x					
y		1	2	3	4	5
	1	0	1	0	0	0
	2	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	1	0
	4	0	0	0	0	0
	5	0	0	1	0	0

となる。
さて、題意より、n本ある横列に対して少なくとも 1 ます 1 が含まれていればよい。横列一つにつきnますのうち少なくとも一つが 1 である場合の数は、すべて 0 である場合の余事象だから、

$$2^{\mathrm{n}} - 1$$

通り。
よって、横列は全部でn本なのだから、求める値は、

$$f(n) = (2^{\mathrm{n}} - 1)^{\mathrm{n}}$$

(2)
求めるのは、<u>任意の$\mathrm{x} \in \mathrm{A}$の縦列の$\mathrm{n}$ますに対して、少なくともひとつ 0 が含まれている場合</u>の余事象である。全部でますはn^2個あるので、$\mathrm{A} \times \mathrm{A}$の部分集合$\mathrm{V}$の個数は$2^{\mathrm{n}^2}$個であり、下線部の場合の数は、実質(1)と同じはずなので、求める値は、

$$g(n) = 2^{\mathrm{n}^2} - (2^{\mathrm{n}} - 1)^{\mathrm{n}}$$

参考
記号$\exists!$は共通資料に乗っていませんが、植田教授が授業中に使っていた記号なのでもしかするとテストに出るかもしれないので、

$$(\forall \mathrm{y} \in \mathrm{A})(\exists!\, \mathrm{x} \in \mathrm{A})((\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{V})$$

についても考えてみると、各横列に対して一つだけ、1 が入ればよいのであるから、部分集合Vの数はn^{n}通りです。

第二問
次の集合Aについて、supA, infA, maxA, minAが存在すればその値を求めよ。

(1) $A=\left\{\log\frac{x^2+1}{x^2+2}\middle|x\in\mathbb{R}\right\}$

(2) $A=\{x+y|x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R},x^2+y^2<4\}$
【自作】

ポイント
上限を定義から考えていくのは面倒なので、以下のように上限を意味づけておくと便利です。

集合Pの上限supPは、
1, 任意の元$x\in P$は、$\sup P\geq x$である。
2, 任意の$\varepsilon>0$は、ある元$x\in P$に対して、$\sup P-\varepsilon<x$である。
をともに満たしている。

*下限も同様に考える。
しかし、この意味づけをもとに、上限下限の値を示すときには、あらかじめ上限下限の値を予想する必要があります。
また、最大値が存在するときにはその値がそのまま上限の値、最小値が存在するときにはその値がそのまま下限の値になることを留意していくと便利です。

解答
(1)

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2}$$

とおく。ここで、$f(x)=k$と定めると、

$$(1-k)x^2-(2k-1)=0$$

$k\neq1$として、このxの二次方程式が実数解を持つ範囲は判別式Dを用いて

$$D=(1-k)(2k-1)\leq0$$

$$\frac{1}{2}\leq k<1(\because k\neq1)$$

したがって、f(x)のとりうる最小値は$\frac{1}{2}$であり、$\min A=\log\frac{1}{2}$

よって、$\inf A=\log\frac{1}{2}$

上の判別式より、$\frac{x^2+1}{x^2+2}<1$であるから、$\log\frac{x^2+1}{x^2+2}<0$が成立。

また、$\varepsilon > 0$を一つ定めると、

$$x^2 > \frac{2 - e^{\varepsilon}}{e^{\varepsilon} - 1}$$

とおくと、

$$(e^{\varepsilon} - 1)x^2 > 2 - e^{\varepsilon}$$
$$x^2 + 2 < e^{\varepsilon}(x^2 + 1)$$
$$\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} < e^{\varepsilon}$$
$$\log\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} < \varepsilon$$

すなわち、

$$\log\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} > -\varepsilon + 0$$

$$\log\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} > -\varepsilon + 0$$
を先に組立て、これを逆算して
$$x^2 > \frac{2 - e^{\varepsilon}}{e^{\varepsilon} - 1}$$
を得る。

だから、$\sup A = 0$
しかし、$f(x) \neq 1$であるから、最大値はない。$\max A$はなし。
(2)

$$x^2 + y^2 < 4$$

なので、$x = a\cos\theta, y = a\sin\theta (0 \leq a < 2)(0 \leq \theta < 2\pi)$とおける。
この時、

$$x + y = a(\cos\theta + \sin\theta) = \sqrt{2}\,a\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) < 2\sqrt{2}$$

つまり、任意の$x, y \in \mathbb{R}$に対して、$x + y < 2\sqrt{2}$
また、$0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} < 2$だから、任意の$\varepsilon > 0$に対して、

$$a > 2 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \theta = \frac{\pi}{4}$$

と定めると、

$$\sqrt{2}a > 2\sqrt{2} - \varepsilon$$
$$\sqrt{2}\,a\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) > 2\sqrt{2} - \varepsilon$$
$$x + y > 2\sqrt{2} - \varepsilon$$

であるから、$\sup A = 2\sqrt{2}$である。
しかし、$x + y \neq 2\sqrt{2}$なので、$\max A$は存在しない。
同様に考えて、$\inf A = -2\sqrt{2}$で、$\min A$は存在しない。

第七回　導関数と原始関数

ポイント確認

微分可能の定義

開区間Iの点x_0について、次の極限値が存在するとき、関数f(x)は点x_0で微分可能であると言う。

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

また、定義域すべての点において微分可能である時、f(x)は微分可能という。

また、f(x)がn回微分可能で、$(n \geq 0)f^{(n)}(x)$が連続であるならば、f(x)はC^n級と呼び、f(x)が任意の$n \geq 0$に関して、C^n級であるならば、C^∞級と呼ぶ。

平均値の定理

関数f(x)が閉区間$[a,b]$で連続で、開区間(a,b)で微分可能ならば、

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c), a<c<b$$

を満たす実数cが存在する。

これを変形する。$a<c<b$を満たすcは$c=a+\theta(b-a), (0<\theta<1)$と書けるので、

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(\theta(b-a)+a), (0<\theta<1)$$

$b-a=h$とおくと、

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+h\theta), (0<\theta<1)$$

第一問
次の不定積分を求めよ。

(1)$\int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx$

(2)$\int \frac{sinx}{1+\cos^2 x} dx$

(3)$\int arcsinxdx$

【(1)(2)2010 年冬学期 数学 IA 坂井教授試験問題】

ポイント
おそらく、ほとんどの人は、受験期に積分はたくさんやってきていると思うので、大学に入って初めて扱うであろう積分をメインに抜粋しました((1)は除く)。

解答
(1)

$$\int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\log|x+1| - \frac{1}{x+1} - \log|x-1| - \frac{1}{x-1}\right\} + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}\right] + \mathrm{C}$$

$$\frac{1}{(\mathrm{x}^2-1)^2} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}+1} + \frac{\mathrm{b}}{(\mathrm{x}+1)^2} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{x}-1} + \frac{\mathrm{d}}{(\mathrm{x}-1)^2}$$

とおいて、これがxについての恒等式になるように、a, b, c, dを定める。

(2)

$$\int \frac{sinx}{1+\cos^2 x} dx$$

$\mathrm{cosx} = \mathrm{t}$とおくと、$\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx}} = -\mathrm{sinx}$であるから、

$$= -\int \frac{1}{1+t^2}dt$$

さらに、$t = \tan\theta$と定めると、$dt = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$であるから、

$$= -\int \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= -\int d\theta$$

$$= -\theta + C$$

$$= -\mathrm{arctan}t + C$$

$$= -\arctan(\cos x) + C$$

(3)

まず、

$$\int x(arcsinx)'\,dx$$

の積分を考える。

$$\int x(arcsinx)'\,dx$$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$t = 1 - x^2$とおくと、$\frac{dt}{dx} = -2x$であるから、

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + C$$

よって、

$$\int arcsinxdx$$

$$x\arcsin x - \int x(arcsinx)'dx$$

$$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

参考
逆三角関数に関する微分積分公式をまとめてみました。

$$(\mathrm{arcsinx})' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{arccosx})' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{arctanx})' = \frac{1}{1+\mathrm{x}^2}$$

$$(\mathrm{arccotx})' = -\frac{1}{1+\mathrm{x}^2}$$

$$(\mathrm{arcsecx})' = \frac{1}{|\mathrm{x}|\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\mathrm{arccscx})' = -\frac{1}{|\mathrm{x}|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\int arcsinxdx = xarcsinx + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int arccosxdx = xarccosx - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int arctanxdx = xarctanx - \frac{\log(x^2+1)}{2} + C$$

$$\int arccotxdx = \frac{\log(x^2+1)}{2} + xarccotx + C$$

$$\int arcsecdx = xarcsecx - \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\, x\log\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}} + C$$

$$\int arccscx = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\, x\log\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}} + xarccscx + C$$

【wolfram alpha】

第二問
$f(x)$が閉区間$[a,b]$で連続、開区間(a,b)で

$$f'(x)=0$$

ならば、f(x)は閉区間[a,b]で定数であることを平均値の定理を用いて示せ。
【微分積分学講義】

ポイント
一応平均値の定理が範囲にあったので、載せておきます。

解答
$x\in[a,b]$であるxに対して平均値の定理より

$$a<c<x,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

を満たすcが存在する。条件より、開区間(a,b)において、$f'(x)=0$なので、
$f'(c)=0$であるから、

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$$

$$f(x)=f(a)$$

つまり、f(x)は定数である。

第九回　微分方程式入門

ポイント確認

微分方程式の種類と一般的難易度

	線形	非線形
常微分	いちばんやさしい	かなり難しい
偏微分	それなりに難しい	げきむず

今回の範囲は入門なので、常微分方程式がメインだと思われます。

常微分方程式…1 変数関数の微分方程式
偏微分方程式…多変数関数の微分方程式
線形…f, gが解の時、任意の定数α, βに対して、$f\alpha + g\beta$も解になる。すなわち、解空間(その解全体がなす集合)が線形空間である時。

微分方程式$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$が第n次導関数に依存しているとき、これをn階の微分方程式と呼ぶ。

微分方程式を解く上での注意点

微分方程式を解く上で大半の人が戸惑うと思うのが、0 で割ってよいのかどうかという点です。たとえば、

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

という微分方程式は変数分離型なので、形式上

$$\frac{1}{y}dy = 2xdx$$

と変形しますが、このとき、$y = 0$は場合分けする必要がないのかという点です。この点では私も悩みましたので、さまざまな参考書で調べた結果、

・無視する。【新版 微分方程式入門 など】
・場合分けする。【微分積分学講義 など】

の二通りの意見があり、何とも言えませんでした。そこで、個人的に一応以下のように結論付けました。とはいえ、あくまで個人的判断です。正しい解決法が分かる方はぜひ教えてください。

そもそも微分方程式には、初期条件等が与えられていない場合、二種類の解がある。(少なくとも今習っている範囲では)

一般解

n階の微分方程式において、n個の任意定数を含む解。このうち、任意定数のうち一部またはすべてに具体的数値を代入して得られる解を特殊解と呼ぶ。

特異解

一般解に含まれない解

たとえば、

$$y' = y(1 - y)$$

では、一般解は$\frac{C}{e^{-x}+C}$、特殊解は$\frac{1}{e^{-x}+1}$、特異解は1となる。特異解は経験上、0で割らないように場合分けした値であるから、

一般解を求めよ。という問題では場合分け不要。

解をすべて求めよ。という問題では場合分けが必要。

と考えました。

ちなみに、微分方程式は解が実数全体で定義されるとは限らないので、一般解があるxに対して、yの値が、特異解の値に一時的になっても問題はないです。

第一問
微分方程式

$$xy' = y^2 - 1$$

の一般解を求めよ。また、$y(1) = 2$の時の解を求めよ。
【新版 微分方程式入門】

ポイント
このように、

$$y' = f(x)g(y)$$

の形であらわされる微分方程式を変数分離型と呼びます。(今回は、$f(x) = \frac{1}{x}, g(y) = y^2 - 1$)このタイプの問題は微分方程式の中で最も簡単です。両辺をそれぞれ(y の式)=(x の式)として、両辺を積分します。

解答
与方程式より、

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$$

$$\frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

両辺を積分して

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y - 1} - \frac{1}{y + 1}\right) dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y - 1}{y + 1}\right| = \log x + C_1$$

$$\log\left|\frac{y - 1}{y + 1}\right| = \log x^2 + C_2$$

$$\frac{y - 1}{y + 1} = Cx^2$$

$$y = \frac{1 + Cx^2}{1 - Cx^2}$$

Cは負の数を取るので、絶対値を外してもよい。

また、$y(1) = 2$の時、$C = \frac{1}{3}$だから

$$y = \frac{3 + x^2}{3 - x^2}$$

となる。

参考

今回の問題では以下のようなインチキくさい変形があります。

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$$

$$\frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int \frac{dx}{x}$$

しかし、この方法は実際には

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$$

$$\frac{1}{y^2 - 1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{y^2 - 1}\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{y^2 - 1} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

置換積分の公式

を便宜的に表しているのです。

第二問
以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y' = \frac{x+y}{x}$

(2) $y' = \frac{\mathrm{x+2y+6}}{\mathrm{2x+y+6}}$

【新版 微分方程式入門】

ポイント
(1)
このように、

$$\mathrm{y}' = \mathrm{f}\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形であらわされる微分方程式を同次型と呼びます。このパターンの場合は、

$$\mathrm{y} = \mathrm{u(x)x}$$

とおくことでうまく解くことができます。
(2)

$$\mathrm{y}' = \mathrm{f}\left(\frac{a_0x + b_0y + c}{ax + by + c}\right)$$

であらわされる微分方程式は一見複雑な形をしていますが、同次型に変形することができます。連立方程式の

$$\begin{cases} a_0\alpha + b_0\beta + c_0 = 0 \\ a\alpha + b\beta + c = 0 \end{cases}$$

の解(α, β)について、$\mathrm{x} = \mathrm{X} + \alpha, \mathrm{y} = \mathrm{Y} + \beta$とおいて考えます。

解答
(1)

$$\mathrm{y} = \mathrm{ux}$$

とすると、与式より、

$$\mathrm{y}' = \frac{\mathrm{x} + \mathrm{ux}}{\mathrm{x}} = 1 + \mathrm{u}$$

また、

$$\mathrm{y}' = (\mathrm{ux})' = \mathrm{u}'\mathrm{x} + \mathrm{u}$$

であるから、

$$\mathrm{u}'\mathrm{x} + \mathrm{u} = 1 + \mathrm{u}$$
$$\mathrm{u}'\mathrm{x} = 1$$

$$\mathrm{x}\left(\frac{du}{dx}\right) = 1$$

$$\mathrm{du} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$$

$$\int \mathrm{du} = \int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$$

$$\mathrm{u} = \log|\mathrm{x}| + \mathrm{C}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{x}(\log|\mathrm{x}| + \mathrm{C})$$

(2)

連立方程式

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 6 = 0 \\ 2\alpha + \beta + 6 = 0 \end{cases}$$

を解くと、$\alpha = -2, \beta = -2$であるから、$\mathrm{x} = \mathrm{X} - 2, \mathrm{y} = \mathrm{Y} - 2$とおくと、

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dY}{dX}\right)\left(\frac{dX}{dx}\right) = \frac{dY}{dX}$$

かつ、

$$\mathrm{y}' = \frac{\mathrm{X} + 2\mathrm{Y}}{2\mathrm{X} + \mathrm{Y}}$$

とおけるので、

$$\frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{dX}} = \frac{\mathrm{X} + 2\mathrm{Y}}{2\mathrm{X} + \mathrm{Y}}$$

である。これは、同次型の微分方程式であるから、$\mathrm{Y} = \mathrm{U}(\mathrm{X})\mathrm{X} = \mathrm{UX}$とおくと、

$$\mathrm{U}'\mathrm{X} + \mathrm{U} = \frac{\mathrm{X} + 2\mathrm{UX}}{2\mathrm{X} + \mathrm{UX}} = \frac{1 + 2\mathrm{U}}{2 + \mathrm{U}}$$

$$\mathrm{U}'\mathrm{X} = \frac{1 - \mathrm{U}^2}{\mathrm{U} + 2}$$

$$\frac{U + 2}{1 - U^2}\mathrm{dU} = \frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{X}}$$

$$\int \frac{U + 2}{1 - U^2}\mathrm{dU} = \int \frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{X}}$$

$$\int \frac{1}{2}\left(\frac{3}{1 - U} + \frac{1}{1 + U}\right) = \int \frac{dX}{X}$$

$$-\frac{1}{2}\log(1 - U)^3 + \frac{1}{2}\log(1 + U) = \log X + C_1$$

さて、

$$\mathrm{X = x - 2, Y = y - 2, U = \frac{y - 2}{x - 2}}$$

なので、代入して、

$$-\frac{1}{2}\log\left(\frac{x-y}{x-2}\right)^3 + \frac{1}{2}\log\frac{x+y-4}{x-2} = \log(x-2) + C_1$$

$$\log\frac{x+y-4}{(x-y)^3} = C_2$$

$$\mathrm{x + y - 4 = C(x - y)^3}$$

やや、違和感がありますが、答えがxと y の式であらわされていれば、それは立派な解です。

第三問
(1)
微分方程式
$$y' - xy = x$$
の一般解を求めよ。
(2)
(1)を利用して、微分方程式
$$2y' + xy = -xy^3$$
の一般解を求めよ。
【(1)新版 微分方程式入門 (2)自作】

ポイント
(1)
このように、
$$y' + f(x)y = g(x)$$
の形であらわされる微分方程式を同次方程式と呼びます。このタイプではまず、
$$y' + f(x)y = 0$$
を解いて、解の見当をつけることから始まります。
(2)
このように、
$$y' + f(x)y = g(x)y^n$$
の形であらわされる微分方程式をベルヌイの微分方程式と呼びます。$z = y^{1-n}$とおくことにより、うまく(1)の形に持ち込みます。

解答
(1)
$$y' - xy = 0$$
の解をまず考える。
$$y' - xy = 0$$
を変形して、
$$\frac{dy}{dx} = xy$$
$$\frac{dy}{y} = xdx$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx$$

$$\log y=\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$\mathrm{y}=\mathrm{C}_2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{x}^2}{2}}$$

さて、

$$\mathrm{y}'-\mathrm{xy}=\mathrm{x}$$

の解をC_2をxの関数$\mathrm{f(x)}$に置き換えて、

$$\mathrm{y}=\mathrm{f(x)}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{x}^2}{2}}$$

としておく。この時、

$$\mathrm{y}'=\mathrm{f}'(\mathrm{x})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{x}^2}{2}}+\mathrm{xf(x)}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{x}^2}{2}}$$

$$\mathrm{y}'=\mathrm{f}'(\mathrm{x})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{x}^2}{2}}+\mathrm{xy}$$

であるから、

$$\mathrm{y}'-\mathrm{xy}=\mathrm{x}$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{x}^2}{2}}+\mathrm{xy}-\mathrm{xy}=\mathrm{x}$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x})=\mathrm{xe}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}}$$

積分して、

$$\mathrm{f(x)}=\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$-\frac{\mathrm{x}^2}{2}=\mathrm{t}$とおくと、$\mathrm{dt}=-\mathrm{xdx}$であるから、

$$\mathrm{f(x)}=-\int e^t dt$$

$$\mathrm{f(x)}=-\mathrm{e}^{\mathrm{t}}+\mathrm{C}$$

$$\mathrm{f(x)}=-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}}+\mathrm{C}$$

よって、

$$\mathrm{y}=\left(-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}}+\mathrm{C}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{x}^2}{2}}$$

$$\mathrm{y}=\mathrm{Ce}^{\frac{\mathrm{x}^2}{2}}-1$$

(2)

$$y^{-2}=z$$

とすると、

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

であるから、

$$z'=(-2y^{-3})\cdot y'$$

とおける。よって

$$2y'+xy=-xy^3$$

$$y'+\frac{xy}{2}=-\frac{xy^3}{2}$$

両辺に$-2y^{-3}$をかけて、

$$z'-xy^{-2}=x$$

$$z'-xz=x$$

(1)よりこの解は

$$z=Ce^{\frac{x^2}{2}}-1$$

とおけるので、

$$y^{-2}=Ce^{\frac{x^2}{2}}-1$$

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{Ce^{\frac{x^2}{2}}-1}}$$

別解

実は変数分離法を用いれば簡単に解くこともできます。

(1)

$$\frac{dy}{dx}-xy=x$$

$$\frac{dy}{dx}=(y+1)x$$

$$\frac{dy}{y+1}=xdx$$

$$\int\frac{dy}{y+1}=\int xdx$$

$$\log|y+1| = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{Ce}^{\frac{\mathrm{x}^2}{2}} - 1$$

別解

(1)は両辺に、$\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}}$をかけることによっても解決します。

$$\mathrm{y}'\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}} - \mathrm{xye}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}} = \mathrm{xe}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}}$$

$$\left(y \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = \mathrm{xe}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}}$$

$$\mathrm{ye}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}} = \int \mathrm{xe}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}} dx$$

$-\frac{\mathrm{x}^2}{2} = \mathrm{t}$とおくと、$\mathrm{dt} = -\mathrm{xdx}$であるから、

$$\int \mathrm{xe}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}} dx = \int -e^t dt$$

$$= -\mathrm{e}^{\mathrm{t}} + \mathrm{C}$$

$$= -\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}} + \mathrm{C}$$

よって、

$$\mathrm{ye}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}} = -\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}} + \mathrm{C}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{Ce}^{\frac{\mathrm{x}^2}{2}} - 1$$

第十一回　偏微分係数と接平面

ポイント確認

偏微分とは
二変数関数

$$\mathrm{f(x,y)}$$

の場合、yを定数とみなして、f(x, y)をxについて、微分することができるとき、変数xについて、偏微分化可能と呼び、その微分結果を、

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} f(x,y) = f_x(x,y) = f_x$$

のように表す。このような微分を行うことをxについて偏微分すると呼ぶ。同様に、yについての偏微分も定義する。
例

$$\mathrm{f(x,y) = x^2 + y^2}$$

のとき、

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \mathrm{f(x,y) = 2x}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \mathrm{f(x,y) = 2y}$$

である。

ヤングの法則
関数f(x, y)において、$\mathrm{f_{xy}}$と$\mathrm{f_{yx}}$が連続ならば、

$$\mathrm{f_{xy} = f_{yx}}$$

が成立する。

接平面、勾配ベクトル
ある二変数関数$\mathrm{z = f(x,y)}$上の点$\mathrm{(x_0, y_0, f(x_0, y_0))}$において、

$$\mathrm{z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)}$$

であらわされる平面を接平面と呼ぶ。この式はさらに

$$\left(\mathrm{f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0) - 1}\right) \cdot \left((\mathrm{x - x_0}), (y - y_0), (z - z_0)\right) = 0$$

とあらわすことができる。ゆえに、接平面の法線ベクトルは、

$$\left(\mathrm{f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0) - 1}\right)$$

である。この法線ベクトルから、z方向の成分を取り除いた平面ベクトル

$$\mathrm{(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))}$$

を勾配ベクトルと呼び、∇fとあらわす。

<u>停留点</u>

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

を満たす点

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

を停留点と呼ぶ。(この時、勾配ベクトルは0になる。)

以上のポイント確認の出拠
【wikipedia】
【微分積分学講義】
【演習 微分積分】

第一問
次の関数の偏導関数を求めよ。
(1) $z = e^{xy+x^2}$
(2) $z = xy\sin\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right)$
【(1)微分積分学講義 (2)演習 微分積分】

ポイント
偏微分においても、通常の微分と同じように、積の微分公式
$$(fg)_x = f_x g + f g_x$$
や、合成関数の微分
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$
を用いることができます。

解答
(1)
$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}(xy + x^2) \cdot e^{xy+x^2}$$
$$z_x = (y + 2x)e^{xy+x^2}$$
また、
$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}(xy + x^2) \cdot e^{xy+x^2}$$
$$z_y = xe^{xy+x^2}$$
(2)
$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}(xy)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + xy\frac{\partial}{\partial x}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$z_x = y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + xy\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$z_x = y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + xy\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$$
$$z_x = y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \left(\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
元の式の対称性より、

$$\mathrm{z_y} = \mathrm{x}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \left(\frac{xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right) cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

第二問
二変数関数

$$z = k\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right) - xy$$

が持つ停留点の個数をkの値によって場合分けして答えよ。
【1996 東京大 文理共通(1) 改】

ポイント
全然停留点に関する問題が見つからないので、東大入試の過去問を改造して作りました。正直、偏微分をやってしまえば、あとはただの入試問題です。解と係数の関係を用いて解いていきます。
何か下の解答いろいろミスってるっぽいので、空気を読んでください。

解答

$$z_x = k(x - x^3) - y$$
$$z_y = k(y - y^3) - x$$

であるから。題意より連立方程式

$$\begin{cases} y = k(x - x^3) \ldots \mathfrak{A} \\ x = k(y - y^3) \ldots \mathfrak{B} \end{cases}$$

の解の個数を考えればよい。
(i) $x = y$のとき
与式より

$$x = k(x - x^3)$$
$$kx^3 - (k - 1)x = 0$$
$$x\{kx^2 - (k - 1)\} = 0$$

ゆえに、

$k < 0, k > 1$のとき、解 3 個$(0, \pm\sqrt{\frac{k-1}{k}})$

$0 \leq k \leq 1$のとき、解 1 個(0)
(ii) $x + y = 0, x \neq 0$のとき
$y = -x$を代入すると二式は同じ式になる。
この式より、

$$-x = k(x - x^3)$$
$$x\{kx^2 - (k + 1)\} = 0$$

ゆえに、

$k < -1, k > 0$のとき、解 2 個($\pm\sqrt{\frac{k+1}{k}}$)

$-1 \leq k \leq 0$のとき、解 0 個

(iii) (i)(ii)以外

$k = 0$とする。また、

$$x + y = u, xy = v$$

とする。$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$より、

$$u^2 - 3v - 1 = -\frac{1}{k} \dots \mathcal{C}$$

また、$\mathfrak{B} - \mathfrak{A}$より、

$$u^2 - v - 1 = \frac{1}{k} \dots \mathcal{D}$$

$\mathcal{C}$と$\mathcal{D}$を連立して解くと、

$\frac{2}{k} + 1 \geq 0$すなわち、$k > 0, k \leq -2$の時、$u = \pm\sqrt{\frac{2}{k} + 1}, v = \frac{1}{k}$

$-2 < k < 0$の時、解なし。

$k > 0, k \leq -2$の時、解と係数の関係より、tの二次方程式

$$t^2 - ut + v = 0$$

の判別式

$$D = u^2 - 4v$$

の符号を考えればよい。(この時点では$x \neq \pm y$を考慮しないで考える。)

$$D = \frac{2}{k} + 1 - \frac{4}{k}$$

であるから、

$k > 2, k < -2$の時、解 2 個

$k = 2$の時、解 1 個

$0 < k < 2$の時、解なし

しかし、実際には、$x \neq \pm y$であるから、これを考慮する。

$x = y$ならば、判別式は 0(重解)であるから、除く。つまり、$k = 2$の時、解なし。また、$x = -y$である場合。すなわち$u = 0$である場合は$k = -2$であるから、$k = -2$の時、解なし。

つまり、実際には、

$k > 2, k < -2$の時、解 2 個

$-2 \leq k < 0, 0 < k \leq 2$の時、解 0 個

また、$k = 0$ならば、

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

であるが、これは、$x \neq y$でないので、解なし。
以上より、

$$\begin{cases} 9\ (k > 2, k < -2) \\ 5\ (1 < k \leq 2, -2 \leq k < -1) \\ 3\ (0 < k \leq 1, -1 \leq k < 0) \\ 1\ (k = 0) \end{cases}$$

参考
おそらくもっと簡単な解法があるので、見つけた方は教えていただけると助かります。

付録

植田教授用語

共通資料には載っていないが、授業で登場した単語を紹介しておきます。(雑談部分は除く。)おそらく、テストで出ることはないと思いますが、問題が未知数なので、念のためです。(正直しけたい任命前は、授業をあまり聞いていなかったので、聞き漏らしがあるかもしれないです。)

e.g.	英語でいう For example ラテン語の Exampli gratia の略
i.e.	すなわちという意味。英語でいう that is ラテン語の id est の略
Def	Definition の略。定義。
Thm	Theorem の略。定理。
Rem	Remark の略。思い出す、注意する。
波動方程式	$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}\right)$$ のような形をした偏微分方程式
ODE	Ordinary Differential Equation の略。常微分方程式
N.B.	注意せよという意味。英語でいう Note well ラテン語、イタリア語の Note bene の略。
Δ	ラプラシアン、記号。
ベクトル場	例えば、3次元ユークリッド空間においてある領域Dが定義され、その値がベクトルであらわされる関数 $$\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = (\mathrm{X}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}),\mathrm{Y}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}),\mathrm{Z}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}))$$ のこと。同様に、スカラーで値があらわされる関数をスカラー場と呼ぶ。さらにこれを一般化したものがテンソル場。
Prop	Proposition の略。命題。
ランダウの記号	解析学で、誤差項を表すために使われる。

【http://blog.masahiko.info/entry/2004/04/17/145007】
【http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1460605534】
【http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q10134180915】
【http://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1035490685】
【https://support.google.com/zagat/answer/1705395?hl=ja】
【http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%86%E3%83%B3%E3%82%BD%E3%83%AB%E5%A0%B4】
【数学小辞典 第 2 版】

アルキメデスの原理

第五回の問題の解答にアルキメデスの原理が登場しました。これの意味が分からないというクラスメイトがいらっしゃいましたので、以下に定義を記しておきます。

正数xを、2倍3倍…n倍すれば、どんな数よりも大きくなることができる。すなわち、与えられた任意の数yに対して、必ず、$y < nx$となる自然数nが存在するという主張

【数学小辞典 第2版】

植田教授のアドバイス

植田教授が授業中にしたアドバイス一覧です。(表記変更有)

・ノートをとるときは、自分でノートにとるところと取らないところを取捨選択せればいいと思うな。

・よい例を知る。抽象的な理論を学ぶときは本質を損なわない範囲で、元も簡単な例を思う。

・切るのが高次元を調べる最も簡単な方法。

・ε δ論法は後出しじゃんけん