微分積分学試験対策プリント

学習編

制作　ks
協力　om tt

目次

§1 微分の定義と導関数

関数$f(x)$は開区間$I \subset \mathbb{R}$において定義されている。関数$f(x)$が$a \in I$で微分可能であるとは、

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在することであり、これをε δ論法を用いて表すと、

$$(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap I \setminus \{a\}) \left(\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \alpha \right| < \varepsilon \right)$$

つまり、すべての正の実数$\varepsilon > 0$に対して、ある$\delta > 0$が存在しており、
$0 < |x - a| < \delta$であるようなxに対して常に

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \alpha \right| < \varepsilon$$

を満たすようなαが存在しているということである。このαは$x = a$における微分係数と呼ばれ、$f'(a)$とあらわされる。また、fがI上のすべての点で微分可能ならば、fはI上で微分可能であるという。このとき、I上の各店の微分係数をその点の関数とみなすことができる。これを導関数と呼び、$f'(x)$とあらわす。

ここから、以下の定理が導かれる

Theorem
$I \subset \mathbb{R}$は開区間である。写像$f: I \to \mathbb{R}$を定める。fが$a \in I$において、微分可能ならば、fは連続である。

Dem
$\varepsilon > 0$をとる。fがaで微分可能なので、

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap I \setminus \{a\}) \left(\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < 1 \right)$$

とおける。

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < 1$$

より三角不等式を用いて、

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| - |f'(a)| < 1$$

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| < |f'(a)| + 1 \ldots \mathfrak{A}$$

であるから、

$$\delta_1 = min\left\{\delta, \frac{\varepsilon}{|f'(a)|+1}\right\}$$

と定めると、$\mathfrak{A}$より

$$|f(x)-f(a)| < |f'(a)||x-a| + |x-a|$$
$$|f(x)-f(a)| < \big||f'(a)|+1\big||x-a|$$
$$|f(x)-f(a)| < (|f'(a)|+1)|x-a|$$
$$|f(x)-f(a)| < (|f'(a)|+1)\left(\frac{\varepsilon}{|f'(a)|+1}\right)$$
$$|f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

また、$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |x-a| < \delta$が成立する。
したがって、

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta_1 > 0)(|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon)$$

が成り立つ。

さて、では実際に具体的な関数の導関数を求めてみよう。

e.g.

$$f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N})$$

この時、

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1})}{x-a}$$
$$= \lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1})$$
$$= na^{n-1}$$

同様に、ほかの関数の導関数も求めることができます。以下に基本的な関数のうち皆さんが高校でおそらく学んでいないであろう関数の導関数をまとめておきます。

---

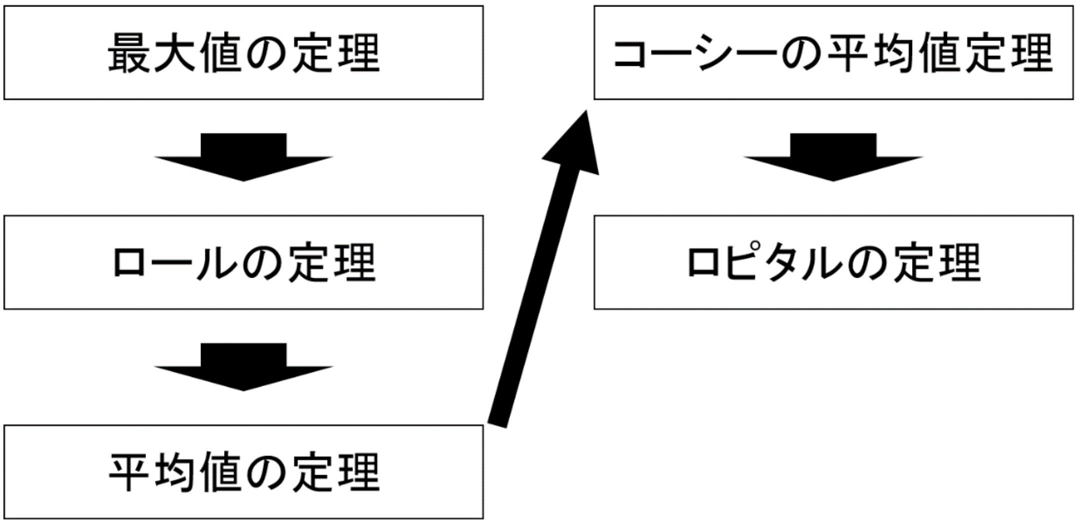
c.f.
導関数表

$f(x)$	$f'(x)$
$cscx$	$-cscxcotx$

$secx$	$tanxsecx$
$cotx$	$-csc^2 x$
$arcsinx$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccosx$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctanx$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arccscx$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$arcsecx$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$arccotx$	$-\frac{1}{x^2+1}$
$sinhx$	$coshx$
$coshx$	$sinhx$
$tanhx$	$1-tanh^2 x$
$cschx$	$-cothxcschx$
$sechx$	$-tanhxsecx$
$cothx$	$1-coth^2 x$
$arcsinhx$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$arccoshx$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$arctanhx$	$\frac{1}{1-x^2}$
$arccschx$	$-\frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$
$arcsechx$	$-\frac{1}{x(x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$
$arccothx$	$\frac{1}{1-x^2}$

§2 微分からの論展開

微分の概念を展開することにより、さまざまな定理を順を追って証明することができます。授業では平均値の定理を既知として、定理を証明していきましたが、ここでは、さらに元をたどって、最大値の定理を既知として、以下の順番で定理を証明していきます。最後のロピタルの定理は複雑な極限値を容易に求めることを可能にしてくれる便利な定理です。



ちなみに、ここでは既知とした最大値の定理は、実数体の連続性にかかわる緻密な議論が必要とされるためここでは証明を省略します。

まずは、最大値の定理の内容を確認しておきます。

Theorem 最大値の定理
有界な閉区間$[a, b]$で定義された連続な関数$f(x)$はそこで最大値と最小値を取る。
【微分積分学講義】

この定理から、ロールの定理を導きます。

Theorem ロールの定理
$f(x)$は閉区間$[a,b]$で連続、開区間(a,b)で微分可能である。

$$f(a)=f(b)=0$$

ならば、

$$f'(c)=0\ (a<c<b)$$

を満たすcが少なくとも一つ存在する。
【微分積分学講義】

Demonstration
$[a,b]$において、$f(x)=0$ならば、$a<c<b$なる任意のcに対し、$f'(c)=0$であるから、定理は成り立つ。もし$f(x)$の値が正になるところであれば、最大値の定理より$f(x)$はある点で最大値を取る。$f(x)$が$x=c$で最大になるとすると、$a<c<b$である。このとき、$f'(c)=0$を示そう。$f(c)$は最大値であることに注意して、

$$f(c+h)-f(c)\leq 0$$

上の式で、$h>0$として極限を取れば、

$$f'_{+}(c)=\lim_{h\to+0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0$$

また、$h<0$として極限を取れば、

$$f'_{-}(c)=\lim_{h\to-0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0$$

f(x)はx = cで微分可能だから右極限と左極限が等しいので、

$$f'_{+}(c)=f'_{-}(c)=0$$

すなわち、

$$f'(c)=0$$

である。同様に処理をすれば$f(x)$の値が負になるところがある場合はその点をcとすれば、$f'(c)=0$ である。以上より恒常的に$f(x)=0$とならないならば、$f(x)\neq 0$となるようなところが少なくとも一方は存在するから、定理は証明されたことになる。■

この定理から平均値の定理を導きます。

Theorem　平均値の定理

$f(x)$が閉区間$[a,b]$で連続、開区間(a,b)で微分可能ならば、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ (a<c<b)$$

を満たすcが少なくとも一つ存在する。

【微分積分学講義】

Demonstration

2 点$(a,f(a))$と$(b,f(b))$を通る直線の方程式は、

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

で与えられる。$f(x)$と上の式の差を

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

とおけば、明らかに

$$F(a)=F(b)=0$$

を満たす。$f(x)$が閉区間$[a,b]$で連続、開区間で(a,b)で微分可能であるから、$F(x)$もまた、$[a,b]$で連続、(a,b)で微分可能となり、ロールの定理の仮定を満たす。したがって、$F(x)$にロールの定理を適用すると、

$$F'(c)=0$$

を満たすcが存在する。よって、平均値の定理は示された。

つぎに、平均値の定理を用いて、コーシーの平均値定理を証明します。こちらの証明は授業で紹介があったので、授業のものに準拠します。(ただし、定義は参考書準拠)

Theorem　コーシーの平均値定理

$f(x),g(x)$は閉区間$[a,b]$で連続、開区間(a,b)で微分可能で、$g'(x)\neq 0$ならば、

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\ (a<c<b)$$

を満たすcが存在する。

【微分積分学講義】

Demonstration

$$\phi(x) = \big(g(b) - g(a)\big)f(x) - \big(f(b) - f(a)\big)g(x)$$

と定める。この時$\phi(x)$は$[a, b]$で連続、(a, b)で微分可能であり、

$$\phi(a) = g(b)f(a) - g(a)f(b) = \phi(b)$$

であるから平均値の定理を適用して、$a < c < b$であるcに対して、

$$\phi'(c) = 0$$

とできる。すなわち、

$$\phi'(x) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(x) - \big(f(b) - f(a)\big)g'(x)$$

に$x = c$を代入して、

$$\big(g(b) - g(a)\big)f'(c) = \big(f(b) - f(a)\big)g'(c) \ldots \mathfrak{A}$$

ここで、仮に、定理の仮定、$g'(x) \neq 0$から、平均値の定理より、$g(b) \neq g(a)$であるから(仮に$g(b) = g(a)$だと、平均値の定理より、$g'(d) = 0$であるdが、存在することになる。)、

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \ (a < c < b)$$

と変形できる。これで定理は示された。■

ちなみに授業ではコーシーの平均値定理は別の形で表現されていました。具体的には、

Theorem　コーシーの平均値定理

$f(x), g(x)$は閉区間$[a, b]$で連続、開区間(a, b)で微分可能で、$g(a) \neq g(b)$とし、$f'(x)$と$g'(x)$が同時に0にならないものとすると、

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \ (a < c < b)$$

を満たすcが存在する。

この場合$\mathfrak{A}$以降の証明が以下のように変わります。

$g'(c) = 0$と仮定するならば、$g(b) \neq g(a)$なので、$f'(c) = 0$となる必要がある。しかし、

$f'(c) = g'(c)$は同時に0にならないという仮定に反するので、$g'(c) \neq 0$である。

したがって、

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \ (a < c < b)$$

は示された。■

最後にロピタルの定理の証明ですが、参考書をいろいろ見た結果、参考書によって定義がまちまちで、どれを採用すればいいかわからなかったので、一応定義は書くだけ書いて、証明については授業で扱ったものだけを書こうと思います。

Theorem　ロピタルの定理 1（授業による定義）

$f(x), g(x)$は$(a,b) \to \mathbb{R}$で微分可能であるとする。この時、

(1) $\forall x \in (a,b), g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$

(2) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

(3) $\exists \alpha = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

であるならば、$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$も存在しその値は$\alpha$である。

Demonstration

$\varepsilon > 0$をとると、(3)より

$$\big(\exists d \in (a,b)\big)\big(\forall x \in (a,d)\big)\left(\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \alpha\right| < \varepsilon\right) \ldots \mathfrak{A}$$

$\bar{f}$は$[a,d] \Rightarrow \mathbb{R}$であるとして

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x)(x \in (a,d]) \\ \quad 0\ (x = a) \end{cases}$$

と定める。(2)より$\bar{f}, \bar{g}$はそれぞれ$[a,d]$にて連続な関数なので、$\bar{f}, \bar{g}$にコーシーの平均値定理を適用して、((1)より適用できる)

$$\big(\exists c \in (a,x)\big)\left(\frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(a)}{\bar{g}(x) - \bar{g}(a)} = \frac{\bar{f}'(c)}{\bar{g}'(c)}\right)$$

すなわち、

$$\frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} = \frac{\bar{f}'(c)}{\bar{g}'(c)}$$

$c \in (a,d)$なので、$\mathfrak{A}$より、

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - \alpha\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \alpha\right| < \varepsilon$$

したがって、

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

となる。■

Theorem ロピタルの定理 2 （授業による定義）

$f(x), g(x)$は$(a, \infty) \to \mathbb{R}$で微分可能であるとする。この時、

(1) $\forall x \in (a, b), g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$

(2) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$

(3) $\exists \alpha = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

であるならば、$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$も存在しその値は$\alpha$である。

Demonstration

F, Gを、$\left(0, \frac{1}{a}\right) \to \mathbb{R}$にて、$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$と定める。

$x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$に対して、$G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) \neq 0, G'(x) = g'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \neq 0$

これは、F, Gに対して、(1)が成り立っていることを表す。

さて、

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{t \to \infty} f(t) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} G(x) = \lim_{t \to \infty} g(t) = 0$$

であって、

$$\lim_{x \to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{t \to \infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \alpha$$

ロピタルの定理 1 を、F, Gに適応させれば、

$$\lim_{x \to \infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \alpha$$

つまり、

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \alpha \ ■$$

§3 テイラーの定理

テイラーの定理を述べる前に次の記号を授業より一般化した形で定義しておきます。

Definition
$I \subset \mathbb{R}$で0を含む閉区間について、$f: I \to \mathbb{R}$とすれば、

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \Leftrightarrow (\exists c > 0)(\exists \delta > 0)\left(x \in (-\delta, \delta) \cap I \setminus \{0\} \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq c\right)$$

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

これをわかりやすく表現すると
$f(x) = O(g(x))$ならば、$f(x)$はg(x)と0に近づくスピードが同じか、$g(x)$より速い。

$f(x) = o(g(x))$ならば、$f(x)$は$g(x)$と0に近づくスピードが速い。
という意味になります。すなわち、$O(f(x)) \supset o(f(x))$である。（形式的には）
授業ではこの記号Oとoをラージオーダー、スモールオーダーと呼んでいましたが、【数学小辞典　第二版】ではランダウの記号と呼んでいました。

では本題のテイラーの定理です。授業では0付近限定で定義していたので、一般化して書きます。

Theorem テイラーの定理
$f(x)$は区間Iで$n+1$回微分可能であるならば次が成り立つ。
(i)

$$(\exists \xi \in (0,1))\left(f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}\big(a + \xi(x-a)\big)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right)$$

(ii)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x^n)\ when\ x \to a$$

(iii)
$f^{(n+1)}$がaで連続ならば、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{O}(x^{n+1})\ when\ x \to a$$

実際にいくつか例示してみると、(iii)を用いて、

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + O(x^{n+1})$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!} + O(x^{2n+3})$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$logx = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

§4 テイラー級数と収束半径

0を含む開区間IにおいてC^n級の写像$f: I \to \mathbb{R}$ を定めると、

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = f(0) - [(x-t)f'(t)]_0^x + \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

$$= f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

$$= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_{n+1}(x) \quad \left(R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right)$$

よって、

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$$

であるならば、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

とあらわせる。これをテイラー級数と呼びます。テイラー級数で$f(x)$があらわされる条件として以下の定理が成り立ちます。

Theorem

$$(\exists M > 0)(\forall t \in I)(\forall n \in \mathbb{N})\left(\left|f^{(n)}(t)\right| \leq M\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$$

Demonstration

まず、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0 \ (c > 0)$$

を示す。アルキメデスの公理より、

$$\frac{c}{N} < \frac{1}{2}$$

を満たすような自然数Nが存在する。このようなNに対して、$n \geq N$であるようなnにおいて、

$$0 < \frac{\mathrm{c^n}}{\mathrm{n!}} = \left(\frac{c}{1}\cdot\frac{c}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{c}{N-1}\right)\cdot\frac{c}{N}\cdot\frac{c}{N+1}\cdot\ldots\cdot\frac{c}{n}$$
$$< \left(\frac{c}{1}\cdot\frac{c}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{c}{N-1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N+1}$$
$$\to 0\ (n\to\infty)$$
はさみうちの原理より
$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!} = 0\ (c > 0)$$
が成立する。さて、
$$|R_{n+1}(x)| \le \left|\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right|$$
$$\le \frac{M}{n!}\int_0^x x^n dt$$
$$\le \frac{M}{n!}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$\to 0\ (n\to\infty)$$
題意は示された。■

テイラーの級数を用いると、ある数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$に対して、
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
と定めることができる。このとき、
$$(\exists R \in [0,\infty])\left(\begin{cases}\forall x \in (-R,R) \Rightarrow f(x)\ converges\ absolutely \\ \forall x \in \mathbb{R}/[-R,R] \Rightarrow f(x)\ doesn't\ converge\end{cases}\right)$$
が成立する。この時の、Rを収束半径と呼ぶ。(converge は収束、converge absolutely 絶対収束を意味する。絶対収束とは、数列$b_n = |a_n|$が収束することである。)たとえば、
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
の収束半径は1で、
$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$
の収束半径は∞である。収束半径に関して以下のような公式が成り立つ。

Theorem
(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

の収束半径と、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

の収束半径は等しい。
(ii)
写像fが$(-R,R)$で微分可能ならば、

$$(\forall x \in (-R,R))\left(f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}\right)$$

(iii)

$$(\forall x \in (-R,R))\left(\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right)$$

収束半径を求める方法の一つにダランベールの収束判定法があります。次のような方法です。

Theorem ダランベールの収束判定法(ratio test)
無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

について、$a_n \neq 0$であって

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

であるならば、収束半径は、

$$\frac{1}{\mathrm{L}}$$

である。

§5 二変数関数

$D \subset \mathbb{R}^2$に対して$f: D \to \mathbb{R}$なる写像を定めることができます。これが、二変数関数です。具体的には、

$$f(x, y) = x + y$$
$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

のような関数のことを二変数関数と呼びます。二変数関数も一変数関数と同様に、連続、微分可能を定めることができます。

Definition 二変数関数の連続

$f: D \to \mathbb{R}$が$\mathbb{a}$で連続であるとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\big(\forall (x, y) \in B(\mathbb{a}, \delta)\big)(|f(x, y) - f(0,0)| < \varepsilon)$$

を満たすことである。ただし、

$$B(\mathbb{a}, \delta) \coloneqq \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^2 | \|\mathbb{x} - \mathbb{a}\| < \delta\}$$

Definition 二変数関数の(全)微分可能

$f: D \to \mathbb{R}$が$\mathbb{a}$で微分可能であるとは、

$$\phi(x, y) = Ax + By + C$$

が存在して、

$$\begin{cases} \phi(\mathbb{a}) = f(\mathbb{a}) \\ \phi(\mathbb{a} + \mathbb{h}) = \phi(\mathbb{a}) + o(\|\mathbb{h}\|) \end{cases}$$

を満たしうることである。

辞書には微分可能の定義は以下のように記載されていました。

Definition 二変数関数の(全)微分可能【数学小辞典 第2版】

$f: D \to \mathbb{R}$が(a, b)で微分可能であるとは、

$$f(a + h, b + k) = hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + \varepsilon(h, k)$$

と定めるとき、

$$\lim_{h,k \to 0} \frac{\varepsilon(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

となることである。

ちょうど、$\phi(x, y)$は$f(x, y)$のグラフの接平面に当ります。しかし、この定義だけ読んでも、微分可能をとらえにくいので、微分可能の判断は次の定理を使うと便利です。

Theorem
$D \subset \mathbb{R}^2$であって、$f: D \to \mathbb{R}$を定めたとき、fがD上でx, y方向に偏微分可能で、かつ、f_x, f_yが連続ならば、fはD上で(全)微分可能。

この定理は逆が成立しません。また、(全)微分可能な二変数関数は連続です。

二変数関数にも一変数関数と同様に合成関数の微分の公式があります。

Theorem1
閉区間$I \subset \mathbb{R}$と閉集合$D \subset \mathbb{R}^2$を定める。また、写像$C: I \to D, f: D \to \mathbb{R}$を定める。このとき、$C(t) = (C_1(t), C_2(t))$とおいて、$C_1, C_2$が$t_0 \in I$で微分可能であり、$f$が$C(t_0)$上で微分可能であるならば、$\mathrm{f \circ C: I \to \mathbb{R}}$は$\mathrm{t_0}$で微分可能で、

$$(f \circ C)' = f_x\big(C(t_0)\big)C_1'(t_0) + f_y\big(C(t_0)\big){C_2}'(t_0)$$

別の表現であらわすと、

$$\frac{d(f \circ C)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dC_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dC_2}{dt}$$

Theorem2
開集合$\Omega \subset \mathbb{R}^2$と閉集合$D \subset \mathbb{R}^2$を定める。また、写像$\Phi: \Omega \to D, f: D \to \mathbb{R}$を定める。このとき、$\Phi(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$とおいて、$\Phi$が$\omega = (u_0, v_0) \in \Omega$で$u_0, v_0$について偏微分可能で$f$が、$\Phi(\omega)$で微分可能であるならば、$f \circ \Phi: \Omega \to \mathbb{R}$は$\omega$で$u, v$について偏微分可能で、

$$\begin{cases} (f \circ \Phi)_u(\omega) = f_x\big(\Phi(\omega)\big)\varphi_u(\omega) + f_y\big(\Phi(\omega)\big)\psi_u(\omega) \\ (f \circ \Phi)_v(\omega) = f_x\big(\Phi(\omega)\big)\varphi_v(\omega) + f_y\big(\Phi(\omega)\big)\psi_v(\omega) \end{cases}$$

別の表現であらわすと、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \psi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{cases}$$

さらにこれを行列であらわすと、

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Theorem2 の合成関数公式を利用すると、極座標とデカルト座標の導関数の書き換えができます。Theorem2 の公式に、$\Omega=(0,\infty)\times\mathbb{R}, D=\mathbb{R}^2$であり、

$$\Phi(r,\theta)=(x,y)=(rcos\theta,rsin\theta)$$

とおけば、

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r}\\ \frac{\partial f}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_u & \psi_u\\ \varphi_v & \psi_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r}\\ \frac{\partial f}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & sin\theta\\ -rsin\theta & rcos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\\ -rsin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+rcos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\dots\mathfrak{A}$$

また、$\begin{pmatrix}\cos\theta & sin\theta\\ -rsin\theta & rcos\theta\end{pmatrix}$の逆行列は、ケーリーハミルトンの定理より

$$\frac{1}{r}\begin{pmatrix}rcos\theta & -sin\theta\\ rsin\theta & cos\theta\end{pmatrix}$$

であるから$\mathfrak{A}$の両辺の左側から、この値をかけると

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=\frac{1}{\mathrm{r}}\begin{pmatrix}rcos\theta & -sin\theta\\ rsin\theta & cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r}\\ \frac{\partial f}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\\ sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\end{pmatrix}$$

これと同様の処理は、Theorem2 を三次元に拡張することにより空間極座標においても適用できます。すなわち、

$$x=rsin\theta cos\varphi, y=rsin\theta sin\varphi, z=rcos\theta$$

で定められるこの極座標の微分を極座標であらわすと、

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r}\\ \frac{\partial f}{\partial \theta}\\ \frac{\partial f}{\partial \varphi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sin\theta cos\varphi & sin\theta sin\varphi & cos\theta\\ rcos\theta cos\varphi & rcos\theta sin\varphi & -rsin\theta\\ -rsin\theta sin\varphi & rsin\theta cos\varphi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}$$

また、この逆の式は、

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sin\theta cos\varphi & cos\theta cos\varphi & -sin\varphi\\ sin\theta sin\varphi & sin\theta sin\varphi & cos\varphi\\ cos\theta & -sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\\ \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\end{pmatrix}$$

であらわすことができます。

付録

数学用語英訳

微分積分学に登場した単語の英訳を下に書いておきます。

微分	differential
微分可能	differentiable
微分する	differentiate
ネイピア数	Nepier’s number
極限	limit