微分積分学試験対策プリント

問題編

制作　ks
協力　om tt

目次

はじめに
・このファイルについて
このファイルは微分積分学の問題をいくつか掲載しています。問題の解答は、解説編のほうに載せてあるので、そちらをご覧ください。
・問題の選択
問題は、以下のいずれかから採用しています。
1, 教授が授業中に扱った問題、配布した問題
2, 自作問題
3, 参考書から、引っ張ってきた問題
4, 過去問
5, 1,3,4,5 を改造した問題
基本的な指針としては、1,4 を優先的に採用し、授業で扱った範囲にもかかわらず、それに関する演習問題がなかった場合などは適宜 2,3 を採用します。また、複数の項目にわたって融合問題が作れる場合は、5 の手段を取ることもあります。
・出典の掲載
1 の問題以外は出典を【】で括って掲載します。
・問題の難易度
基本的な問題を多く掲載し、応用問題を少しだけ掲載します。ここでいう基本的な問題は、教授が授業中に扱っていた問題や参考書などに乗っている問題のことを指します。また、難問は自分が理解できないので、掲載を控えさせていただきます。

§0 高校範囲

第一問

nを自然数とするとき、

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

とおく。

(1) $L_1(x), L_2(x)$を求めよ。

(2) $L_n(x)$はn次の多項式であることをnに関する数学的帰納法で示せ。

【過去問】

§1 微分の定義と導関数

第一問

以下の関数の導関数を微分の定義にしたがって求めよ。ただし、

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

であるとする。

(1) $f(x) = e^x$

(2) $f(x) = sinx$

【(2)微分積分学講義】

第二問

f(x), g(x)がともにn回微分可能であるならば、

$$(fg)^{(n)} = \binom{n}{0}f^{(n)}g + \binom{n}{1}f^{(n-1)}g' + \cdots + \binom{n}{n}fg^{(n)}$$

が成立している。以下の問いに答えよ。

(1) $y = arctanx$とする。この時、

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0$$

を示せ。

(2) $y^{(n)}(0)$を求めよ。

【微分積分学講義　改】

§2 微分からの論展開

第一問
次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{x-arcsinx}{x^3}$

(2) $\lim_{x\to 0}(cosx)^{\frac{1}{x^2}}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-1}-\sqrt{1-x}\right)$

【(1) 微分積分学講義 (2)(3) 過去問】

第二問
極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-(1+ax)^b+1}{x^3}$$

が有界な確定値になるように、a,bを求めよ。さらに、その時の極限値を求めよ。
【過去問】

§3 テイラーの定理

第一問
次の値を、小数第四位を切り捨てして小数第三位までの近似値を求めよ。ただし、$2 < \mathrm{e} < 3$を既知とする。
(1) sin1
(2) $\sqrt{e}$

第二問
(1) 次が成り立つ実数$\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n}$を求めよ。

$$\log(a+x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)\ (x \to 0)$$

(2) 次が成り立つ実数$\mathrm{c}_0, \mathrm{c}_1, \ldots, \mathrm{c}_5$を求めよ。

$$\frac{x}{\log(2+x) - \log(2-x)} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_5 x^5 + o(x^5)(x \to 0)$$

【過去問】

§4 テイラー級数と収束半径

第一問

次の関数の$x = 0$の周りのテイラー級数を求めよ。また、収束半径を求めよ。

(1) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $\frac{1}{1+\mathrm{x}+\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^4}$

【自作】

§5 二変数関数

第一問

二変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

に関して次の問いに答えよ。

(1) $f(x,y)$は$(x,y)=(0,0)$においてx,y方向にそれぞれ偏微分可能であることを示せ。

(2) $f(x,y)$は$(x,y)=(0,0)$において全微分可能か。

【過去問】