微分積分学試験対策プリント

解説編

制作　ks
協力　om tt

目次

§0 高校範囲

ここでは、高校範囲で解ける過去問の問題を紹介しています。

第一問
nを自然数とするとき、

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

とおく。
(1) $L_1(x), L_2(x)$を求めよ。
(2) $L_n(x)$はn次の多項式であることをnに関する数学的帰納法で示せ。
【過去問】

ポイント
(1) 計算ミスだけが怖い。
(2) 帰納法を利用するので$x^{k+1}e^{-x}$を$x^k e^{-x}$が含まれる形にうまく変形します。

解説
(1)

$$L_1(x) = 1 - x$$
$$L_2(x) = 2 - 4x + x^2$$

(2)
$n = 1$のとき、(1)より$L_1(x)$は一次の多項式である。…$\mathfrak{A}$
$n = k$のとき、$L_k(x)$がk次の多項式であると仮定する。このとき、$n = k + 1$ならば、

$$L'_{k+1}(x) = \left(e^x \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} x^{k+1} e^{-x}\right)'$$

$$= e^x \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} x^{k+1} e^{-x} + e^x \frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}} x^{k+1} e^{-x}$$

$$= e^x \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left(x^{k+1} e^{-x} + \frac{d}{dx} x^{k+1} e^{-x}\right)$$

$$= e^x \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} (x^{k+1} e^{-x} + (k+1) x^k e^{-x} - x^{k+1} e^{-x})$$

$$= e^x (k+1) \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} x^k e^{-x}$$

$$= e^x (k+1) \frac{d}{dx} \frac{L_k(x)}{e^x}$$

$$= e^x(k+1)\frac{L_k{}'(x)e^x - L_k(x)e^x}{e^{2x}}$$
$$= (k+1)\left(L_k{}'(x) - L_k(x)\right)$$

よって、$L_{k+1}{}'(x)$はk次式であるから、$L_{k+1}(x)$は$k+1$次式…$\mathfrak{B}$

$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$より数学的帰納法を用いて、題意は示された。■

参考

この関数$L_n(x)$はラゲールの多項式と呼ばれており、量子力学の世界に登場するものだそうです。

§1 微分の定義と導関数

第一問

以下の関数の導関数を微分の定義にしたがって求めよ。ただし、

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

であるとする。

(1) $f(x) = e^x$

(2) $f(x) = sinx$

(3) $f(x) = arxsinx$

【(1)授業 (2)微分積分学講義 (3)過去問】

ポイント

一応授業で扱ったものなので取り上げました。特に言うことはないです。

解答

(1)

まず、

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

を示す。

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

は二項定理より、

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{x}{n}+\binom{n}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\cdots+\binom{n}{n}\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

さて、

$$\left|\binom{n}{k}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}\right)^k\right| = \left|\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\times\frac{1}{n^k}x^k\right| < \frac{1}{k!}|x|^k$$

よって、

$$\left|\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}-1\right| = \left|\binom{n}{2}\frac{x}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{x^2}{n^3}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{x^{n-1}}{n^n}\right|$$

$$\leq \left|\binom{n}{2}\frac{x}{n^2}\right|+\left|\binom{n}{3}\frac{x^2}{n^3}\right|+\cdots+\left|\binom{n}{n}\frac{x^{n-1}}{n^n}\right|$$

三角不等式を用いた。

$$\leq \frac{|x|}{2!}+\frac{|x|^2}{3!}+\cdots+\frac{|x|^{n-1}}{n!}$$

$0<x<1$とすれば、

$$\leq \left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)|x| \ldots \mathfrak{A}$$

ところで、

$$\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}=1$$

であるから、

$$\mathfrak{A}<|x|$$

したがって、

$$0<\left|\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}-1\right|<|x|$$

であるから、$x \to 0$とすれば、挟み撃ちの原理より、

$$\lim_{n\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

よって、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}e^a$$

$$=e^a$$

したがって、導関数は

$$f'(x)=e^x$$

(2)

$$(sinx)'$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-sinx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\times\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

$$=cosx$$

したがって、導関数は、

$$f'(x) = cosx$$

(3)

$$y = arcsinx$$

と定めると、

$$x = siny$$

両辺をyで微分すると、

$$\frac{dx}{dy} = cosy$$

両辺に$\frac{dy}{dx}$をかけて、

$$1 = \frac{dy}{dx}cosy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

つまり、導関数は

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

参考

・三角不等式

実数$\mathbb{R}$において以下の不等式が成り立ちます。

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

この不等式を三角不等式と呼びます。（正確には、これは三角不等式を拡張したもので本来はa_1とa_2の間の二項で成立することを示しますが、帰納的に、このように定義して問題ないです。）この不等式は距離関数の定義の一つであり、ゆえに、距離空間であればこの不等式は常に成立しますが、大分脱線するので、このぐらいにしておきます。

・二項係数

高校では、二項係数を${}_nC_r$の形で記述しましたが、これは、nを自然数の範囲に限定した書き方です。以降は、nを任意の実数、kを自然数か0として、

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}(k \neq 0)\ ,\binom{n}{0} = 1$$

とします。

第二問
$f(x), g(x)$がともにn回微分可能であるならば、

$$(fg)^{(n)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \cdots + \binom{n}{n} f g^{(n)}$$

が成立している。以下の問いに答えよ。
(1) $y = arctanx$とする。この時、

$$(1 + x^2) y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1) y^{(n-1)} = 0$$

を示せ。
(2) $y^{(n)}(0)$を求めよ。
【微分積分学講義　改】

ポイント
与えられた公式は、ライプニッツの公式と呼ばれています。証明に関しては、数理科学基礎の共通資料、第七回の第一問にのっているのでそちらを参照してください。

解説
(1)

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

であるから、

$$(1 + x^2) y' = 1 \ldots \mathfrak{A}$$

ところで、$f(x) = 1 + x^2$と定めると、

$$f'(x) = 2x, f''(x) = 2, f^{(k)}(x) = 0 \ (k \geq 3)$$

であるから、$g(x) = y'$とすれば、$\mathfrak{A}$より両辺をn回微分するとライプニッツの公式より、

$$\binom{n}{0} (1 + x^2) y^{(n+1)} + \binom{n}{1} 2xy^{(n)} + \binom{n}{2} 2y^{(n-1)} = 0$$

$$(1 + x^2) y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1) y^{(n-1)} = 0$$

与式は示された。■
(2)
(1)の式に$\mathrm{x} = 0$を代入して、

$$y^{(n+1)}(0) + n(n-1) y^{(n-1)}(0) = 0$$

よって、

$$y^{(n+1)}(0) = -n(n-1) y^{(n-1)}(0)$$

が成立する。

$$y(0) = 0, y'(0) = 1$$

であるから、

$$y''(0) = 0, y^{(4)} = 0, y^{(6)} = 0 \ldots$$

一方、

$$y'''(0) = -2 \times 1$$
$$y^{(5)}(0) = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$y^{(7)}(0) = -6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$\ldots$$

したがって

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! \, when \; n \; is \; odd \\ 0 \; when \; n \; is \; even \end{cases}$$

§2 微分からの論展開

第一問
次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{x - arcsinx}{x^3}$

(2) $\lim_{x \to 0} (cosx)^{\frac{1}{x^2}}$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x - 1} - \sqrt{1-x}\right)$

【(1) 微分積分学講義 (2)(3) 過去問】

ポイント
ロピタルの定理を複数回用いて極限を求めます。この際、適応する式が不定形であることを確認してから、ロピタルの定理を使います。

解説
(1)

$$\frac{x - arcsinx}{x^3}$$

は、$x \to 0$の時、$\frac{0}{0}$の不定形であり、

$$\frac{(x - arxsinx)'}{(x^3)'} = \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$$

この値は、$x \to 0$の時、$\frac{0}{0}$の不定形であり、

$$\frac{\left(\sqrt{1-x^2} - 1\right)'}{\left(3x^2\sqrt{1-x^2}\right)'} = -\frac{x}{-9x^3 + 6x} = -\frac{1}{9x^2 + 6} \to -\frac{1}{6}$$

したがって、ロピタルの定理より、

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - arcsinx}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

(2)
まず、与式の対数を取った値の極限、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(cosx)}{x^2}$$

を求める。これは、$\frac{0}{0}$の不定形であるから、

$$\frac{(\log(cosx))'}{(x^2)'}=-\frac{tanx}{2x}\to -\frac{1}{2}$$

したがって、ロピタルの定理より、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(cosx)}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

であり、求める極限は、

$$\lim_{x\to 0}(cosx)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

(3)

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-1}-\sqrt{1-x}\right)$$

は、$x\to 0$の時、$\frac{0}{0}$の不定形であり、

$$\frac{\left(\frac{x}{e^x-1}-\sqrt{1-x}\right)'}{(\mathrm{x}^2)'}=\frac{\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}\ldots\mathfrak{A}$$

ところで、

$$\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$$

は、$x\to 0$の時、$\frac{0}{0}$の不定形であり、

$$\frac{(e^x-1-xe^x)'}{\{(e^x-1)^2\}'}=-\frac{xe^x}{2(e^x-1)e^x}=-\frac{1}{2}$$

であるから、ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}=-\frac{1}{2}$$

よって$\mathfrak{A}$は、$x\to 0$の時、$\frac{0}{0}$の不定形である。

$$\frac{\left(\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)'}{(2x)'}$$

$$=\frac{\frac{-xe^x(e^x-1)^2-2\{(1-x)e^x-1\}e^x(e^x-1)}{(e^x-1)^4}+\frac{1}{4(1-x)^{\frac{3}{2}}}}{2}$$

$$=\frac{\frac{e^x(xe^x-2e^x+x+2)}{(e^x-1)^3}+\frac{1}{4(1-x)^{\frac{3}{2}}}}{2}\dots\mathfrak{B}$$

さて、

$$\frac{e^x(xe^x-2e^x+x+2)}{(e^x-1)^3}$$

は、$x\to0$の時、$\frac{0}{0}$の不定形であり、

$$\frac{\{e^x(xe^x-2e^x+x+2)\}'}{\{(e^x-1)^3\}'}=\frac{2xe^x-3e^x+x+3}{3(e^x-1)^2}$$

これは、$x\to0$の時、$\frac{0}{0}$の不定形であり、

$$\frac{(2xe^x-3e^x+x+3)'}{(3(e^x-1)^2)'}=\frac{-e^x+2xe^x+1}{6(e^x-1)e^x}$$

これは、$x\to0$の時、$\frac{0}{0}$の不定形であり、

$$\frac{(-e^x+2xe^x+1)'}{\{6(e^x-1)e^x\}'}=\frac{1+2x}{6(e^x-1)+6e^x}$$

$$\to\frac{1}{6}\ (\mathrm{x}\to0)$$

よって、ロピタルの定理より、

$$\frac{e^x(xe^x-2e^x+x+2)}{(e^x-1)^3}\to\frac{1}{6}\ (x\to0)$$

よって、

$$\mathfrak{B}=\frac{\frac{e^x(xe^x-2e^x+x+2)}{(e^x-1)^3}+\frac{1}{4(1-x)^{\frac{3}{2}}}}{2}\to\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{5}{24}$$

以上より求める極限は

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-1}-\sqrt{1-x}\right)=\frac{5}{24}$$

別解

(2)

ロピタルの定理を用いず解く方法です。

$$\lim_{x\to0}(cosx)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\{1-(1-cosx)\}^{\frac{1}{1-cosx}\frac{1-cosx}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}e^{-\frac{1-cosx}{x^2}}$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

第二問
極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-(1+ax)^b+1}{x^3}$$

が有界な確定値になるように、a, bを求めよ。さらに、その時の極限値を求めよ。
【過去問】

ポイント
ロピタルの威力を実感する問題。

解説

与式は$x\to 0$の時、$\frac{0}{0}$の不定形になるので、ロピタルの定理より、

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\log(1+x)-(1+ax)^b+1)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-ab(1+ax)^{b-1}}{3x^2}\ldots\mathfrak{A}$$

と等しい。ここで、分母が$x\to 0$で0に収束するので、少なくとも分子も0に収束する。すなわち、

$$\frac{1}{1+x}-ab(1+ax)^{b-1}\to 1-\mathrm{ab}=0$$

$$ab=1$$

となる。ここで、$ab=1, b=\frac{1}{a}$を$\mathfrak{A}$に代入すれば、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-(1+ax)^{\frac{1}{a}-1}}{3x^2}$$

与式は$x\to 0$の時、$\frac{0}{0}$の不定形になるので、ロピタルの定理より、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{1+x}-(1+ax)^{\frac{1}{a}-1}\right)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}-a\left(\frac{1}{a}-1\right)(1+ax)^{\frac{1}{a}-2}}{6x}\ldots\mathfrak{B}$$

ここで、分母が$x\to 0$で0に収束するので、少なくとも分子も0に収束する。すなわち、

$$\frac{-1}{(1+x)^2}-\left(\frac{1}{a}-1\right)(1+ax)^{\frac{1}{a}-1}\to -1-\mathrm{a}\left(\frac{1}{\mathrm{a}}-1\right)=0$$

$$a=2, b=\frac{1}{2}$$

となる必要がある。これを、$\mathfrak{B}$に代入すれば、

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}+(1+2x)^{-\frac{3}{2}}}{6x}$$

ここで、分母が$x\to 0$で0に収束するので、少なくとも分子も0に収束する。すなわち、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{(1+x)^2}+(1+2x)^{-\frac{3}{2}}\right)'}{(6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{(1+x)^3}-3(1+2x)^{-\frac{5}{2}}}{6}=-\frac{1}{6}$$

たしかにこのa,bは与式を有限確定値に収束させるので、このa,bは適当である。

§3 テイラーの定理

第一問
次の値を、小数第四位を切り捨てして小数第三位までの近似値を求めよ。ただし、$2 < e < 3$を既知とする。
(1) sin1
(2) $\sqrt{e}$

ポイント
テイラーの定理を用いて近似を行います。テイラー級数の余剰項の誤差範囲を先に考えておけば、何次まで近似を行うべきか推定できます。

解説
(1)

$$f(x) = sinx$$

と定める。これを0の周りでテイラーの定理を用いて、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(k+1)}(cx)}{(k+1)!} x^{k+1} \ (0 < c < 1)$$

$n = 6$とすれば、

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{coscx}{7!} x^7$$

$x = 1$を代入して、

$$sin1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{cosc}{7!}$$

したがって、

$$0 < cosc < 1$$

であるから、

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} < sin1 < 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}$$

$$0.841468 \ldots < sin1 < 0.841666 \ldots$$

ゆえに求める近似値は、

$$0.841$$

(2)

$$f(x) = e^x$$

と定める。(1)と同様に0の周りでテイラーの定理を適応させて、$n=4, x=\frac{1}{2}$と

すれば、

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3!}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{4!}\times\frac{1}{16}+\frac{1}{5!}\times\frac{1}{32}+\frac{e^{\frac{c}{2}}}{6!}\times\frac{1}{64}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{384}+\frac{1}{3840}+\frac{e^{\frac{c}{2}}}{46080}\quad(0<c<1)$$

よって、$2<e<3, 0<c<1$より、

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{384}+\frac{1}{3840}+\frac{1}{46080}<\sqrt{e}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{384}+\frac{1}{3840}+\frac{3}{46080}$$

$$1.64871<\sqrt{e}<1.64876$$

ゆえに求める近似値は、

$$1.648$$

参考

出題してきそうな値の近似値を書いておきます。暗記しておけば検算に使えるかもしれないです。

e	2.718281…
$\frac{1}{e}$	0.367879…
e^2	7.389056…
e^3	20.085536…
$\sqrt[3]{e}$	1.395612…
sin1	0.841470…
cos1	0.540302…

参考

テイラーの定理を利用して、πの近似値も求めることができますが、手段は技巧的です。§1 の第二問に出した問題の答えを利用すれば、$arctanx$を書き換えると、

$$arctanx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n+1}+\frac{(-1)^n x^{2n} sincx}{2n!}\quad(0<c<1)$$

が算出できる。(グレゴリ級数) ここに、$x=1$を代入すれば、

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}+\frac{(-1)^n sinc}{(2n)!}$$

ここから、πの近似が可能です。(この式をライプニッツの公式と呼びます。名

前がかぶっていて紛らわしいです。）これだとかなり収束速度が遅いので、

$$4arctan\left(\frac{1}{5}\right)-arctan\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{\pi}{4}$$

を利用する方法もあります。（この式のことを、マチンの公式と呼びます。たしか数理科学基礎の共通資料第四回の演習問題に載っていました。）

第二問
(1) 次が成り立つ実数$a_0, a_1, \ldots, a_n$を求めよ。

$$\log(a+x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)\ (x \to 0)$$

(2) 次が成り立つ実数$c_0, c_1, \ldots, c_5$を求めよ。

$$\frac{x}{\log(2+x) - \log(2-x)} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_5 x^5 + o(x^5) (x \to 0)$$

【過去問】

ポイント
(1) テイラーの定理を適用するだけです。
(2) 単純にテイラーの定理を適用しようとすると、微分が煩雑になりすぎて詰みます。オーダーを利用して計算を簡略化しながら、複数の関数を組みあわせて考えるとやりやすいです。

解説
(1)

$$f(x) = \log(a+x)$$

と定めると、

$$f'(x) = \frac{1}{a+x}, f''(x) = -\frac{1}{(a+x)^2}, f'''(x) = \frac{2}{(a+x)^3} \cdots$$

と続くので、

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(a+x)^n}$$

である。よって、テイラーの定理を$x \to 0$の時について適応すれば、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$= loga + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{na^n} + o(x^n)$$

したがって、

$$a_n = \begin{cases} loga\ (n = 0) \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{na^n}\ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(2)
(1)で求めた式より、$a = 2, n = 6$を代入すると、

$$log(2+x)=log2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{24}-\frac{x^4}{64}+\frac{x^5}{160}-\frac{x^6}{192}+o(x^6)$$

さらに、この式のxの符号を変えると、

$$log(2-x)=log2-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^4}{64}-\frac{x^5}{160}-\frac{x^6}{192}+o(x^6)$$

これを与式の左辺に代入すれば、

$$\frac{x}{x+\frac{x^3}{12}+\frac{x^5}{80}+o(x^6)}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{12}+\frac{x^4}{80}+o(x^5)}$$

となる。ところで、$x\to 0$では無限等比級数

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+o(x^6)$$

が成立するから、この式においてx^2を$\frac{x^2}{12}+\frac{x^4}{80}+o(x^5)$に置き換えれば、

$$\frac{1}{1+\frac{x^2}{12}+\frac{x^4}{80}+o(x^5)}$$

$$=1-\left(\frac{x^2}{12}+\frac{x^4}{80}+o(x^5)\right)+\left(\frac{x^2}{12}+\frac{x^4}{80}+o(x^5)\right)^2-\left(\frac{x^2}{12}+\frac{x^4}{80}+o(x^5)\right)^3+o(x^6)$$

$$=1-\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{180}+o(x^5)$$

以上より

$$\begin{cases} a_0=1 \\ a_1=0 \\ a_2=-\frac{1}{12} \\ a_3=0 \\ a_4=-\frac{1}{180} \\ a_5=0 \end{cases}$$

参考

オーダーが含まれる計算は、加法減法においてもっとも小さい次数のオーダーにそれより大きな次数の項をまとめることができます。また、掛け算割り算においては、次数を足し合わせることができます。たとえば、

$$f(x)=2x+x^2+o(x^3),g(x)=5x+o(x^2)$$

とすれば、$f(x) \times g(x)$を計算すると、

$$f(x) \times g(x) = 10x^2 + 2xo(x^2) + 5x^3 + x^2 o(x^2) + 5xo(x^3) + o(x^5)$$
$$= 10x^2 + o(x^3) + 5x^3 + o(x^4) + o(x^4) + o(x^5)$$
$$= 10x^2 + 5x^3 + o(x^3)$$

ちなみに、本来オーダーの記号は関数ではないので、このように数字のように扱って計算すると木田教授は不快に思うかもしれませんので、

$$o(x^2) = \mu(x^2)$$

などと適当な関数に置き換えて計算したほうがいいかもしれません。

§4 テイラー級数と収束半径

第一問
次の関数の$x=0$の周りのテイラー級数を求めよ。また、収束半径を求めよ。

(1) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $\frac{1}{1+\mathrm{x}+\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^4}$

【自作】

ポイント
問題によって、解き方はそれぞれですが、一応授業で扱ったものの類題などから抜粋しました。

解説
(1)

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

ここで右辺を一般二項展開すると、

$$(1+\mathrm{x}^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{n} x^{2n}$$

$\mathrm{y}=\mathrm{x}^2$とおくと、

$$(1+y)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{n} y^n$$

ダランベールの収束判定法より、

$$\mathrm{a_n} = \binom{-\frac{3}{2}}{n}$$

とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-\frac{3}{2}-n}{n+1}\right| = 1$$

であるから、収束半径は$\sqrt{1}=1$
$-1<\mathrm{x}<1$の範囲で両辺を積分すると、

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{-\frac{3}{2}}{n}x^{2n+1}+C$$

$x=0$の時、$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=0$なので、$C=0$であるから、

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{-\frac{3}{2}}{n}x^{2n+1}$$

(2)
与式より、

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4}=\frac{1-x}{1-x^5}$$

ところで、初項1公差xの等比数列の級数の公式より、$-1<x<1$にて、

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

ここで、両辺のxをx^5に置き換えて、

$$\frac{1}{1-x^5}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{5n}$$

両辺に$1-x$をかけて

$$\frac{1-x}{1-x^5}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^{5n}$$

したがって、

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^{5n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

ただし、

$$a_n=\begin{cases}0\ (n\equiv 2,3,4)\\ 1\ (n\equiv 0)\\ -1\ (n\equiv 1)\end{cases}$$

また、収束半径は右辺に注目して1とわかる。

別解
(1)

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

である。一般二項定理より、

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$$

よって両辺にxをかけて、

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$$

§5 二変数関数

第一問
二変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

に関して次の問いに答えよ。
(1) $f(x,y)$は$(x,y)=(0,0)$においてx,y方向にそれぞれ偏微分可能であることを示せ。
(2) $f(x,y)$は$(x,y)=(0,0)$において全微分可能か。
【過去問】

ポイント
(1) 定義から示します。
(2) 直接全微分可能性を示すのは面倒なので、連続でない→全微分でない。を利用します(授業に出ていない人は学習編を参照してください。)。ちなみに、全微分可能とはイコール二変数関数の微分可能のことです。

解説
(1)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

よって、偏微分可能である。

(2)

$\varepsilon=\frac{1}{3}$と定める。この時、任意の$\delta>0$に対して、

$$\mathbb{a}=\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4\delta^2}}{2}},\frac{-1+\sqrt{1+4\delta^2}}{2}\right)$$

を定めると、この$\mathbb{a}$は、

$$\|\mathbb{a}\|<\delta$$

を満たしており、

$$\left| f\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4\delta^2}}{2}}, \frac{-1+\sqrt{1+4\delta^2}}{2} \right) - f(0,0) \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon$$

である。したがって、$f(x,y)$が$(0,0)$で連続ではないから、$f(x)$は全微分可能ではない。