微分積分学 A セメスター試験対策プリント

【まとめ編】

制作 ks
協力 om tt

目次

§1 二変数関数の偏微分

二変数関数の偏微分に関して、以下の定理が成り立つ。

ヤングの定理
D上でf_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}が存在して、f_{xy}, f_{yx}はD上連続とする。このときD上で、

$$f_{xy} = f_{yx}$$

が成り立つ。

この性質を拡張すると以下のように、いうことができる。すなわち、

fがC^n級ならば、fをx, yに関して、n回偏微分して得られる関数は偏微分の順序によらない。

ただし二変数関数のC_n級は以下のように定義される。

fがC_n級$\Leftrightarrow$ fをx, yについて、n回偏微分したものがD上存在して連続。
ただし、C_0はfがD上連続であることを表し、C_∞はfがD上任意のnに対して、
n回微分可能であることを表す。

もちろん、f_x, f_yが連続でない場合などは

$$f_{xy} \neq f_{yx}$$

となる場合もある。この場合については、演習編にて紹介する。

§2 二変数関数のテイラー展開

Iを開区間とし、$f: I \to \mathbb{R}, C^{n+1}$級とする。また、$a \in I$とする。
$a + h \in I$となるように、任意にhを定めると、ある$\xi \in (0,1)$が存在して、

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\xi h)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

が成立する。これを、$a + h = x, x_0 = a$として書き換えると、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(k+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

となる。ただし、cはxとx_0の間の数である。これをテイラーの定理と呼ぶ。

一変数関数と同様に二変数関数についてもテイラーの定理を適用できる。
開集合$D \in \mathbb{R}^2$上の写像$f: D \to \mathbb{R}$があり、C^{N+1}級とする。この時、
$(a, b) \subset D$なる点に対して、(a, b)と$(a + h, b + k)$を結ぶ線分がDに含まれるようにh, kを定めると、$\exists \xi \in (0,1)$に対して

$$\begin{aligned} & f(a+h, b+k) \\ & \quad = f(a,b) + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}} (a,b) h^i k^{n-i} \\ & \quad + \frac{1}{(N+1)!} \sum_{i=0}^{N+1} \binom{N+1}{i} \frac{\partial^{N+1} f}{\partial x^i \partial y^{N+1-i}} (a + \xi h, b + \xi k) h^i k^{N+1-i} \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{1}{(N+1)!} \sum_{i=0}^{N+1} \binom{N+1}{i} \frac{\partial^{N+1} f}{\partial x^i \partial y^{N+1-i}} (a + \xi h, b + \xi k) h^i k^{N+1-i}$$

を、$R_{N+1}(a, b; \xi)$と書き換え、式を変形すると、

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \right] (a,b) + R_{N+1}(a, b; \xi)$$

となる。ここで、$a = x_0, b = y_0, a + h = x, b + k = y$に置き換え、$R_{N+1}(a, b; \xi)$をオーダーで表示すると、

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\left[\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\right](a,b)$$
$$+\,\mathrm{O}\left(\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^{N+1}\right)$$

となる。

例えば、$N=2,(x_0,y_0)=(0,0)$とすると、

$$f(x,y)=f(0,0)+\left(f_x(0,0)x+f_y(0,0)y\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right)+\mathrm{O}\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\right)$$

となる。

§3 極値問題

二変数関数の極値は以下のように定義される。

開集合$D \subset \mathbb{R}^2$上の写像$f: D \to \mathbb{R}$に関して、$(a,b) \in D$で狭義極大であるとは、

$$\exists r > 0 \ \forall (x,y) \in B_r(a,b) \cap D \setminus \{(a,b)\} \ f(x,y) < f(a,b)$$

が成立することであり、広義極大であるとは、

$$\exists r > 0 \ \forall (x,y) \in B_r(a,b) \cap D \ f(x,y) \leq f(a,b)$$

ただし、$B_r(a,b)$は(a,b)を中心とする半径rの開円盤である。
極小についても不等号の向きを変えて、同様に考える。

C^3級の二変数関数$f: D \to \mathbb{R}$の極値を求めるには、以下の手順に従って解けばよい。

(I)
極値は必ず停留点であることから、$f_x = 0, f_y = 0$となるような$(x,y) \in D$をすべて求める。
(II)
ヘッセ行列

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

の行列式(ヘシアン)$detH = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$と、固有和$trH = f_{xx} + f_{yy}$を求める。
(III)
$detH$とtrHに(I)で求めた座標を代入して符号を見る。
$detH > 0, trH > 0$ならば、その点は狭義極小
$detH > 0, trH < 0$ならば、その点は狭義極大
$detH < 0$ならば、その点は極値ではない。(鞍点)
以上の条件にどれにも当てはまらない場合もある。
(IV)
(III)の条件が使えなかった(I)の座標を個別に調べる。具体的な方法は、演習編に回す。

fが二次形式である場合は、つまり、$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$であらわされる場合は平方完成により簡単に解くことができる。ただし、別に上の方法でも難なく解けるので、スルーする。

§4 数列の収束

数理科学基礎で私たちは、イプシロンデルタ論法を用いて厳密に関数の収束を定義した。今回は、イプシロンエヌ論法を用いて数列の収束を以下のように厳密に定義する。

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が$\alpha \in \mathbb{R}$に収束するとは、

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成立することである。

また、発散に関しては以下のように定義する。

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が正の無限大に発散するとは、

$$\forall M > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; a_n \geq M$$

が成立することである。負の無限大に関しても不等号の向きを変えて定義できる。

同様に、関数に関しては定義した、有界の概念を取り入れる。

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が上に有界であるとは、

$$\exists M > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; a_n \leq M$$

となることを言う。下に有界であることも不等号の向きを変えて定義できる。上にも下にも有界である時、有界であるという。

一般に、上に有界な広義単調増大な数列は収束する。また、任意の有界な数列は収束する部分列を持つ(ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理)。ただし、部分列とは、ある数列からいくつかの項を取り除いてできる数列のことである。例えば、数列$a_n = 2n$の部分列の一つに、$\{2,10,18,26 \ldots\}$がある。

ちなみに、こういった定理の証明には実数体の公理をひとつ定めなければならない。例えば、授業で上に有界な広義単調増大な数列は収束するという定理を証明したとき、暗黙の前提として$\mathbb{R}$内の空でない有界集合は$\mathbb{R}$内に上限を持つものとしていた。つまり有界であれば、上限が存在すると証明なしに使用していたが、授業ではこれを公理とみなしたのである。しかし、公理は必ずしもこれと決める必要はない。以下に挙げる主張はいずれも同値でありすべて公理とみなしてよい。

(I) 実数体ℝ内の有界単調列はℝ内で収束する。
(II) 実数体ℝ上の閉区間の縮小列には少なくとも 1 点が残留する。
(III) 実数体ℝのコーシー列は収束する。(コーシー列については以下を見よ)
(IV) 実数体ℝ内の空でない有界集合はℝ内に上限を持つ。

続いて数列に関してコーシー列と絶対収束を定義する。コーシー列は基本列とも呼ぶ。

数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$がコーシー列であるとは、
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ m, n \geq N\ |a_m - a_n| < \varepsilon$$
となるときを言う。コーシー列は一般に収束する。当然逆も成立する。

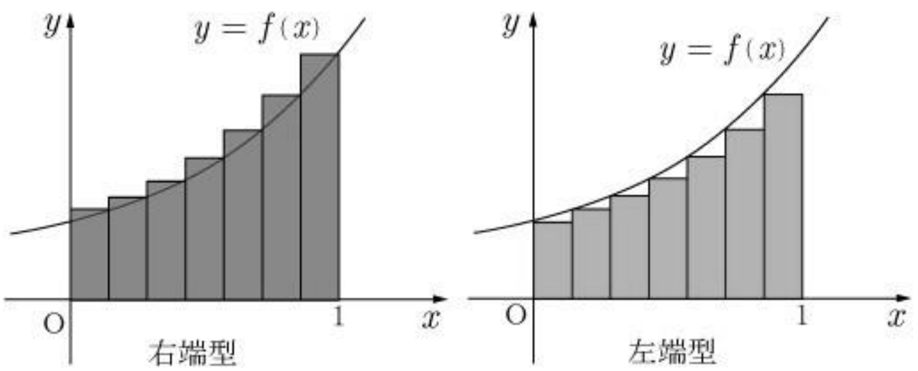
また、級数
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
が絶対収束するとは、級数
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$
が収束することをいう。絶対収束する級数は収束する。

§5 リーマン積分

このセクションは演習問題につながる内容が少ないため、ほかのセクションに比べて論理説明に重点が置かれている。

私たちが高校で習った積分は「微分の逆」と意味づけされた。しかし、この積分によって面積が求まる理由の説明が非常にあいまいであり、積分を、求積するという要請に基づいて再定義する必要がある。定義方法にはさまざまあるが、ここではリーマン積分を採用する(このほかには、ルベーグ積分、スティルチェス積分がある。)。この方法を用いれば、積分を連続関数以外にも拡張できる。

求積要請から、私たちがすぐに思い浮かぶのは、区間を細かくn等分して図のように長方形を作り、このnを無限大に近づける、すなわち区分求積法であろう。



しかし、この方法には大きな欠点がある。求積要請に基づく以上、面積は結合可能な指標であるから、以下の式が成り立つはずである。

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\sqrt{2}} f(x)dx = \int_0^{\sqrt{2}} f(x)dx$$

$\sqrt{2}$は無理数であるから、この式の右辺について、区間$[0, \sqrt{2}]$をどのように等分しても、等分点は1の上にこない。一方左辺は1の点の上で面積を分割している。ここに上記の区分求積法における矛盾が生じる。この問題を避けるためには、分割方法を任意のものにする必要がある。また、分割方法を任意のものとした場合、分割方法によっては区間が非常に広く、本来の面積の形状から大きく逸脱した長方形が考慮されうる。このため、単純に分点の個数を増やすことによって当該の面積に近づけるという考え方で限界があり、分割された区間の幅を狭くするという指標を考える必要がある。以上を踏まえて積分を以下のように再定義する。

fが$[a,b]$上積分可能であるとは、ある$S\in\mathbb{R}$が存在して、任意の$\varepsilon>0$に対して、以下を満たすδが存在することを言う。

「$[a,b]$の分割$\varDelta=\langle a_0,a_1,\dots,a_n\rangle\Big((\forall k\in\{0,1,\dots,n-1\}\ a_k<a_{k+1})\wedge$

$\big((a_0,a_n)=(a,b)\big)\Big)$のうち、幅$|\Delta|=\max\{a_{k+1}-a_k|k\in\{0,1,\dots n-1\}\}$が$\delta$未満である任意のものに対して、任意に代表値系$\xi=(\xi_k)_{k=0}^{n-1}\ (\xi_k\in[a_{k+1}-a_k])$を定めたときに、

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)(a_{i+1}-a_i)-S\right|<\varepsilon$$

となる。」
この時のSを、

$$\int_a^b f(x)dx$$

と定める。また、

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)(a_{i+1}-a_i)$$

をリーマン和と呼ぶ。

教科書などほかのところでは代表値系の上限下限を考えるなどしているが、授業では扱われていないのでスルーする。

以上の定義から、任意の連続関数が積分可能であり、リーマン積分が微分の逆であることを示すことができる。

§6 有理関数の積分

有理関数とは、実多項式$P(x),Q(x)$に対して、

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

の形であらわされる関数のことである(実際には複素多項式でも定義上問題はない)。このタイプの関数はすべて以下の手順に従って原始関数を求めることができる。

(I)

$Q(x)$を実数の範囲で因数分解する。すなわち二次式と一次式の積の形にする。

(II)

部分分数分解する。この分解によって最終的に以下のいずれかの形に各項を表せる。

$$\frac{dx}{(x+a)^m}, \frac{px+q}{(x^2+bx+c)^n} \ (m,n \in \mathbb{N} \ \ a,b,c,p,q \in \mathbb{R} \ \ b^2-4c<0)$$

(III)

各項を積分する。

(I)については、代数学の基本定理より因数分解が可能なことは直感的にわかるはずであり(数理科学基礎演習の中村教授の第二回の補充問題プリントの問題にもなっている)、(II)については、さまざまなテクニックが必要となるが、どちらかというと演習問題をやったほうが分かりやすいので演習編に回す。ここでは(III)について説明する。

(II)の段階ですでに多項式は上記の二つの形まで絞れた。このためこの二つの積分ができれば十分である。

前者について、公式よりほぼ自明であるが一応書いておくと、

$$\int \frac{dx}{(x+a)^m} = \begin{cases} \dfrac{-1}{m-1}\dfrac{1}{(x+a)^{m-1}} \ where \ m \geq 2 \\ \log|x+a| \ where \ m=1 \end{cases}$$

問題は後者である。こちらの積分はやや複雑だ。与式を変形すると、

$$p\int \frac{x}{(x^2+bx+c)^n}dx + q\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^n} \dots \mathfrak{A}$$

$\mathfrak{A}$の第一項について、

$$\int \frac{x}{(x^2+bx+c)^n}dx = \int \frac{x+\frac{b}{2}}{\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}\right)^n}dx - \int \frac{\frac{b}{2}}{\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}\right)^n}dx$$

この式の第一項は、

$$\int \frac{x+\frac{b}{2}}{\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}\right)^n}dx = \int \frac{t}{\left(t+c-\frac{b^2}{4}\right)^n}dt$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-1}{2(n-1)} \dfrac{1}{\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}\right)^{n-1}} \ where\ n \geq 2 \\ \dfrac{1}{2}\log\left|\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}\right| \ where\ n=1 \end{cases}$$

この式の第二項は

$$\frac{b}{2}\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}\right)^n}$$

$c-\frac{b^2}{4}>0$なので、これを$\alpha^2(\alpha \in \mathbb{R})$とすると、

$$= \frac{b}{2}\int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^n} = \frac{b}{2\alpha^2}\int \frac{dt}{\left(\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2+1\right)^n} = \frac{b}{2\alpha^2}\int \frac{ds}{(s^2+1)^n}$$

と変形できる。ここで、

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

とすると、

$$I_1 = \mathrm{arctan}x$$

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} - \int x \frac{-2nx}{(x^2+1)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}dx - 2n\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$$

よって、

$$I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n + \frac{x}{2n(x^2+1)^n}$$

漸化式を計算すれば、任意のnに対して、I_nが計算できる。

以上より第二項の値が求まるから、$\mathfrak{A}$が計算できる。

§7 広義積分

今まで私たちが学んだ積分はあくまで、閉区間の範囲でのみ定義された。これを拡張する。

(I)
連続関数$f:(a,b]\to\mathbb{R}$に関して、

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$$

が存在するならば、fは$(a,b]$上で広義積分可能であり、

$$\int_{a}^{b}f(x)dx$$

と表す。

(II)
連続関数$f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$に関して、

$$\lim_{t\to\infty}\int_{a}^{t}f(x)dx$$

が存在するならば、fは$[a,\infty)$上で広義積分可能であり、

$$\int_{a}^{\infty}f(x)dx$$

と表す。

広義積分可能のことを収束すると表現する場合もある。

与えられた広義積分が可能かどうかは定義に従って判定することができるが、以下の定理を利用することもできる。

連続関数$f:(a,b]\to\mathbb{R}$に関して、以下の条件を満たすとき、

$$\int_{a}^{b}f(x)dx$$

は収束する。
*$(a,b]$上で常に$f(x)=\tilde{f}(x)$となるような連続関数$\tilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$が存在する。

また、連続関数$f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$に関して、以下のいずれかの条件を満たすとき、

$$\int_{a}^{\infty}f(x)dx$$

は収束する。
1,$f \geq 0$であり、

$$\exists M > 0, \forall t > a, \int_a^t f(x)dx \leq M$$

である。
2,$\forall x \in [a, \infty)$において、$|f(x)| \leq g(x)$となるような$g: [a, \infty) \to \mathbb{R}$に関して、

$$\int_a^\infty g(x)dx$$

が収束する。
3,

$$\int_a^\infty |f(x)|dx$$

が収束する。

収束の判定には以下の定理を利用することもある。

コーシーの判定法 1
連続関数$F: [a, \infty) \to \mathbb{R}$に関して、

$$\exists \lim_{t \to \infty} F(t) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall p, q > 0, |F(p) - F(q)| < \varepsilon$$

コーシーの判定法 2
連続関数$\mathrm{G}: (\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$に関して、

$$\exists \lim_{x \to a+0} G(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \forall x, y \in (a, a+\delta) \cap (a, b], |G(x) - G(y)| < \varepsilon$$

広義積分の考え方を利用して無限級数の収束判定が行える場合がある。すなわち、以下の定理が成り立つ。

$a_n \geq 0$とし、$f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$は連続で単調減少であり、常に0以上である。
ここで、$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = a_n$が成り立っているならば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

が収束することと、

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

が収束することは同値である。

§8 二変数関数の積分

§5 では、高校では明確に扱われなかった一変数関数の積分の具体的な定義を示した。この定義の仕方は二変数関数にも拡張することができる。すなわち、二変数関数の積分は以下のように定義される。

集合$R=[a,b]\times[c,d]$上において定義される二変数関数$f\colon R\to\mathbb{R}$がR上積分可能であるとは、次が成り立つことを言う。$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$に関して、

$$|\Delta|=\max\{x_{i+1}-x_i,y_{j+1}-y_j\}\ where\ 0\le i\le n-1,0\le j\le m-1$$

を$|\Delta|<\delta$となるように幅Δを定め、その代表値系$\xi=(\xi_{ij})$を、

$$\forall 0\le i\le n-1,\forall 0\le j\le m-1,\xi_{ij}\in R_{ij}=[x_{i+1}-x_i]\times[y_{j+1}-y_j]$$

満たすように決定したとき、あるSに対して、

$$\left|\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_{ij})(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)-S\right|<\varepsilon$$

となる。なお、この時のSを、

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

と表す。

なにやら複雑な定義だが、実際には、連続関数に関していえば、x方向とy方向それぞれについて積分するだけでよい。つまり、

$$\iint_R f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

を計算すればよい。

上記の公式は長方形の範囲内でのみに使える積分公式だが、一般の領域に関しても積分は可能である。これに関して以下の定理が成り立つ。

関数$\varphi,\psi\colon[a,b]\to\mathbb{R}$があって、$[a,b]$で$\varphi(x)\le y\le\psi(x)$を満たしているならば、$y=\varphi(x),y=\psi(x),y=a,y=b$が囲む領域$D$上での積分は

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\right)dx$$

である。

同様の定義で三変数関数に関しても、連続関数であれば積分できる。すなわ

ち、以下の公式が成り立つ。

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_p^q \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz$$

§9 変数変換

§8で扱った積分では、x, y, z方向のみに関して積分を行ったが、場合によっては極座標などのように、別の変数を利用して積分したほうが、計算が楽になることがある。

Ω, Dは、$\Omega, D \subset \mathbb{R}^2$なる有界で面積確定な閉集合である。写像$\Phi: \Omega \to D$に関して、$\Phi(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$と定める。ここで、$\Phi$が$C^1$級であり、全単射であるものとする。また、行列

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{pmatrix}$$

を定めたとき(この行列をヤコビ行列と呼ぶ。)、この行列式が0でないものとする。

この時、連続関数$f: D \to \mathbb{R}$に対して、

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(\Phi(u,v))|det(J(u,v))|dudv$$

が成立する。

例えば、極座標ならば、変数変換は

$$\Phi(r,\theta) = \Phi(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

で表すことができるから、

$$det\, J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

より、連続関数$f: D \to \mathbb{R}$に対して、

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(\Phi(u,v)) \cdot r\, drd\theta$$

(極座標の変数変換は全単射ではありませんが、全単射になっていない部分が、面積0ならば、例外的にOKです。)

変数変換は三変数関数にも適応することができる。
$\Omega, D \subset \mathbb{R}^3$とする。適当な設定の下で、連続関数$f: D \to \mathbb{R}$を定めると、

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Omega f(\Phi(u,v,w))|det(J(u,v,w))|dudvdw$$

が成り立つ。

ただし、ヤコビ行列$J(u,v,w)$は、$\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$とおくと、

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1u} & \varphi_{1v} & \varphi_{1w} \\ \varphi_{2u} & \varphi_{2v} & \varphi_{2w} \\ \varphi_{3u} & \varphi_{3v} & \varphi_{3w} \end{pmatrix}$$

で与えられる。

例えば、空間極座標、

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ \quad z = r\cos\theta \end{cases}$$

のとき、ヤコビ行列の行列式は、$r^2\sin\theta$で与えられる。

極座標に関するヤコビ行列の行列式は暗記しちゃって大丈夫です。

§10 二変数関数の広義積分

広義積分の考え方を二変数関数にも適用する。一変数関数とだいぶ定義の仕方が異なるので注意する。

広義積分を定義するために閉集合とは限らない領域Dに収束する増大列(Dのとりつくし列)という新たな言葉を導入する。Dに収束する増大列とは、列$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$のうち以下の二つの条件を満たすもののことである。
(I) D_nは有界閉集合で、$D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n \subset \cdots \subset D$
(II) $E \subset D$なる任意の有界閉集合Eに関して、あるnに対して、$E \subset D_n$

では、広義積分を定義する。関数の形によって、定義が異なるので注意。

A,$f \geq 0$が常に成立するとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$

である。

B,A 以外のとき

$$f_+ = \max\{f(x,y), 0\}$$
$$f_- = -\min\{f(x,y), 0\}$$

と定義する。これでいずれの関数も常に0以上になっている。広義積分は

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f_+(x,y)dxdy - \iint_D f_-(x,y)dxdy$$

である。

定義だけ読んでもわかりにくいと思うので、詳しい解き方は演習編に回す。

§11 各点収束と一様収束

§10までで積分に関しては片付いた。これ以降は、関数そのものの性質についてみていく。

$I \subset \mathbb{R}, f_n, f: I \to \mathbb{R}$と、関数列$\{f_n\}_{n-1}^{\infty}$を考える。
関数列$\{f_n\}_{n-1}^{\infty}$が各点収束であるとは、

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

となることであり、一様収束であるとは、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

となることである。よく似た概念だが、一様収束のほうが各点収束より条件が厳しい。すなわち、一様収束ならば各点収束である。定義を感覚的にわかりやすく書くならば、各点収束とは、「f_n上のすべての点は、nを大きくしていくとfの点に近づいていくこと」を表し、一様収束とは、「nが十分大きいとき、f_n上のすべての点はfに近いこと」を表している。

一様収束であることは、以下のようにも表せる。

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

$I \subset \mathbb{R}, f_n, f: I \to \mathbb{R}$とする。一様収束な関数列$\{f_n\}_{n-1}^{\infty}$は以下の定理が成り立つ。
(I) fが連続
(II) $I = [a, b]$ならば、

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b f(x) dx$$

$I \subset \mathbb{R}$を開区間とし、$f_n: I \to \mathbb{R}$がC^1級であるとする。$\{f_n\}_{n-1}^{\infty}$がある$f: I \to \mathbb{R}$に各点収束し、$\{f'_n\}_{n-1}^{\infty}$がある$g: I \to \mathbb{R}$に一様収束するならば、

$$\frac{d}{dx} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{d}{dx} f(x) \right)$$

である。
(III)
$I \subset \mathbb{R}, \varphi_n: I \to \mathbb{R}$とすると、

$$\exists \{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall x \in I, \forall n, |\varphi_n(x)| \leq c_n \wedge \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ が収束}$$

ならば、関数列

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

はI上一様収束

以上はnが自然数である場合に限って、話を進めていたが実はnを、実数rに置き換えても以上の定理は成立する。

§12 巾級数

S セメスターで扱った収束半径などの理論はあまり証明を厳密に行わなかった。そこで、最後にこのあいまいな部分を補充していく。

巾級数とは数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$に関して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

の形で表されるもののことである。

巾級数には次の性質を満たす$R \in [0, \infty]$が存在している。すなわち、
$|x| < R$では、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

が絶対収束、さらには一様収束し、$|x| > R$では、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

が発散する。このようなRを収束半径と呼ぶ。収束半径を求めるには以下の定理が便利である。

ダランベールの収束判定法
数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$が十分大きいすべてのnに関して$a_n \neq 0$であり、

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \in [0, \infty]$$

が存在しているとき、この値が収束半径である。

収束半径の内側の範囲では様々な便利な性質がある。例えば、積分や微分とシグマの順序を入れ替えることができる。すなわち、

$f: (-R, R) \to \mathbb{R}$を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

で定めたとき、$\forall x \in (-R, R)$に関して、

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

また、

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

§13 付録

・特殊な定理

授業中で扱った特殊な定理を以下に載せておく。

ディリクレ積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

バーゼル問題

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

アーベル変換(正確にはアーベル変換ではないような気がするのですが…)

数列$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$は広義単調減少であり、

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

であるとする。また数列$\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$に対して、

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

と定めたとき、$\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$は有界であるとする。このとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$$

は収束する。