微分積分学Aセメスター試験対策プリント

【演習編】

制作　ks

協力　om tt

目次

授業で扱った内容に関連する主要な問題を 22 問集めました。(半分ぐらい自作)
問題数自体は少ないですが、授業内容はほぼ網羅しているので、これらを一通り解いて理解すれば単位は来ると思います。

A 授業に登場した問題の類題
B 授業内容を理解していれば解けそうな問題
C 授業内容をやや発展させた問題

第一問　二変数関数の積分…A
第二問　体積 1…B

§9 変数変換
第一問　変数変換…A
第二問　体積 2…C

§10 二変数関数の広義積分
第一問　収束条件…A
第二問　e^{-x^2}の積分…A
第三問　必ずしも 0 以上ではない関数の広義積分…C

§11 各点収束と一様収束
第一問　各点収束と一様収束…B

§12 巾級数
第一問　収束半径…A
第二問　無限級数…C

§1 二変数関数の偏微分

第一問　定義に従った偏微分

$\mathbb{R}^2$上の二変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

について以下の問いに答えよ。

(1) $f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$を計算せよ。

(2) fは$(0,0)$で連続か。

§2 二変数関数のテイラー展開

第一問　二変数関数のテイラー展開

剰余項を$O\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n\right)$の形にするものとして以下の問いに答えよ。

(1)
$\mathbb{R}^2$上の二変数関数

$$f(x,y)=\sin(x\cos y)$$

を(0,0)の周りでテイラー展開せよ。ただし$n=3$とする。
(2)
$\mathbb{R}^2$上の二変数関数

$$f(x,y)=(x+y)e^{xy}$$

を(1,1)の周りでテイラー展開せよ。ただし$n=4$とする。

第二問　係数比較

$$f(x,y)=\log(1+2x+y)$$

とする。

$$\frac{\partial f^9}{\partial x^4\partial y^5}(0,0)$$

を求めよ。

§3 極値問題

第一問　極値問題

以下の二変数関数$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$の極値を求めよ。

(1)

$$f(x,y) = (x + y^2)e^{-x^2}$$

(2)

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2} - 2x^2 - y^2$$

第二問　和と積の関係

a, α, β, γを正の実数とする。x, y, zを$x + y + z = a$となるように正の実数の範囲で動かしたとき、

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

の最大値を求めよ。

§4 数列の収束

第一問　極限の計算

(1)

次の数列の極限を、イプシロンエヌ論法を用いて厳密に求めよ。

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

(2)

次の無限級数が収束することを証明せよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$$

第二問　極限の証明

次の命題のうち正しいものは証明し、間違っているものは反例を示せ。

(1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

のとき、

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$$

(2)

数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$が発散すれば、

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$$

は発散する。

(3)

全てのa_nに関して$0 < a_n < 1$ならば、

$$\lim_{k\to\infty}(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k) = 0$$

である。

§5 リーマン積分

第一問　リーマン積分

リーマン積分の定義に従って、次の式を証明せよ。

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

ただし、$a > 0$とする。

第二問　単調増加関数のリーマン和

区間$[a, b]$で広義単調増加な関数は積分可能であることを示せ。

§6 有理関数の積分

第一問　有理関数の積分

不定積分せよ。

$$\int \frac{x}{(x^2-2)(x^2+2)^2}\,dx$$

§7 広義積分

第一問　広義積分 1
広義積分せよ。
(1)

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$$

第二問　広義積分 2
次の広義積分が収束する場合は値を求め、そうでなければ「発散する」と記せ。
(1)

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}dx$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

§8 二変数関数の積分

第一問　二変数関数の積分

次の関数を指定された領域D内で重積分せよ。ただし、aは定数である。

(1)

$$f(x,y)=\frac{1}{(x+y+1)^2}\ (D=[0,1]\times[0,1])$$

(2)

$$f(x,y)=x\ \left(D=\left\{0\leq x\leq a,\frac{x^2}{a}\leq y\leq 2a-x\right\}\right)$$

第二問　体積 1

三次元空間において、次の領域の体積を求めよ。

$$|x|+|y|\leq 1$$
$$0\leq z\leq x^2+y^2$$

§9 変数変換

第一問　変数変換

次の関数が収束するならば、指定された領域D内で重積分せよ。ただし、αは実定数とする。

(1)

$$f(x,y)=\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha}dxdy\ (D=\{x^2+y^2\le 1\})$$

(2)

$$f(x,y)=\iint_D \frac{(2x-y)^5}{(x+3y)^4}dxdy\ (D=\{0\le 2x-y\le 2,1\le x+3y\le 3\})$$

第二問　体積 2

三次元空間において次の6つのグラフで囲まれた立体の体積を求めよ。

$$x=\frac{1}{\sqrt{yz}},x=\frac{2}{\sqrt{yz}},y=\frac{1}{\sqrt{zx}},y=\frac{2}{\sqrt{zx}},z=\frac{1}{\sqrt{xy}},z=\frac{2}{\sqrt{xy}}$$

§10 二変数関数の広義積分

第一問　二変数関数の広義積分
以下の問いに答えよ。
(1)

$$0 \le y \le x$$

の領域で

$$\frac{1}{(1+x+y)^3}$$

を広義積分せよ。
(2)

$$x^2 + y^2 \le 1$$

の領域で

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

を広義積分せよ。
(3)

$$x^2 \le y \le x\ without\ (0,0)$$

の領域で

$$\frac{x \sin y}{y}$$

を広義積分せよ。

第二問　e^{-x^2}の積分
(1) 広義積分せよ。

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

(2) 領域Dを第一象限とする。広義積分せよ。

$$\int_D (x+y) e^{-x^2-y^2} dxdy$$

第三問　必ずしも0以上ではない関数の広義積分
領域$D = [0,\infty) \times [0,\infty) \setminus (0,0)$内で次の広義積分をせよ。

$$\iint_D \frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{x+y} \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

§11 各点収束と一様収束

第一問　各点収束と一様収束

次の関数列$f_n(x)$は$f(x)$に各点収束するか、また一様収束するか。

(1)

$$f_n, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ f_n(x) = \frac{n^3x^3}{1+n^2x^2}\ f(x) = 0$$

(2)

$$\mathrm{f_n}, \mathrm{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \mathrm{f_n}(x) = \frac{\sin(nx)}{n}\ f(x) = 0$$

§12 巾級数

第一問　収束半径

次の巾級数の収束半径を求めよ。

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

第二問　無限級数

関数$f(x)$を

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

で定めたとき、

$$\int_0^{\pi} f(x)dx$$

を求めよ。