記号論理学　練習問題解答解説2014

文責：理科１類１８組平出一郎（WEB 長）

2014/7/3

はじめに：このシケプリは、2014 年度に東京大学教養学部前期課程において開講された「記号論理学⊠（理科生）」（教員　齋藤 浩文）の試験対策として制作されたものである。過去問 (2010〜2013 年度) において４〜５割程度を占める、証明図を書く問題の対策として基本的な部分をカバーしている。より演習量を確保したい、あるいは難しい問題に取り組みたい諸君は証明可能な論理式（授業内での配布プリントに記載）や過去問の問題に取り組んでほしい。それらの問の解答については、「超簡易纏め」（2011 年度制作）や「記号論理学　証明図徹底攻略」（2013 年度制作　文責：谷本悠太（上クラパ長））等を参照されたい。本シケプリの制作にあたっては、前述の「記号論理学　証明図徹底攻略」を元にして、本年度の練習問題の形に添うよう問を追加した。また誤植と思われる箇所、より詳しい説明が必要だと判断した箇所において解説を変更した。そのような経緯を鑑みて、本シケプリの配布範囲は本年度中では 18 組に限ってほしい。

本シケプリに出てくる問題は全て「前提の主演算子の除去則」「結論の主演算子の導入則」「結論の否定の仮定」という３つの方針で解けるようになっている。易しい前者２つをまず念頭におき、要素還元的に証明を構成していってほしい。それを目指す試みとして、証明図を変更したり別解を掲載したりしている箇所もある。「結論の否定の仮定」が必要になる古典論理の証明図は難易度が高いものではあるが、過去問においては２〜３問出題されておりマスターしておきたいところである。

注意：[] つきの仮定をディスチャージする際につける数字は、授業ではマル付数字が使われているが、文字コードの関係でマル無しの数字になっている。また、× 記号は授業では二重線のバツ印が使われている。テストでは板書で使われている方の記号を使うべきであろう。

1-1 $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$

$$\dfrac{\dfrac{P \wedge Q}{Q} \quad \dfrac{P \wedge Q}{P}}{Q \wedge P}$$

一見してごくあたりまえのことではあるが、証明図においては左右の順番は大事である。必ず推論規則通りにかくこと。例えば下の２つはダメな例である。

$$\dfrac{\neg\varphi \quad \varphi}{\times} \qquad \dfrac{\varphi \to \psi \quad \varphi}{\psi}$$

1-2 $(P \wedge Q) \wedge R \vdash P \wedge (Q \wedge R)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(P\wedge Q)\wedge R}{P\wedge Q}}{P} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(P\wedge Q)\wedge R}{P\wedge Q}}{Q} \qquad \dfrac{(P\wedge Q)\wedge R}{R}}{Q\wedge R}}{P\wedge(Q\wedge R)}$$

結論から P と $Q \wedge R$ を導けばよいということがわかる。これと前提とを合わせれば、前提をくずして P, Q, R を導けばよいという見通しがつく。

1-2' $P \wedge (Q \wedge R) \vdash (P \wedge Q) \wedge R$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P\wedge(Q\wedge R)}{P} \qquad \dfrac{\dfrac{P\wedge(Q\wedge R)}{Q\wedge R}}{Q}}{P\wedge Q} \qquad \dfrac{\dfrac{P\wedge(Q\wedge R)}{Q\wedge R}}{R}}{(P\wedge Q)\wedge R}$$

1-2 と同様である　基本に忠実にやればよい。

1-3 $P, Q, R \vdash (P \wedge Q) \wedge R$ (2011 年度出題)

$$\dfrac{\dfrac{P \quad Q}{P\wedge Q} \quad R}{(P\wedge Q)\wedge R}$$

主演算子は最後に導入することにだけ注意すればよい。

1-4 $P \vdash P \wedge P$ (2013 年度出題)

$$\dfrac{P \quad P}{P\wedge P}$$

前提は何度使ってもよいということに注意すればよい。

1-5 $P \wedge Q, R \wedge S \vdash Q \wedge S$

$$\dfrac{\dfrac{P\wedge Q}{Q} \quad \dfrac{R\wedge S}{S}}{Q\wedge S}$$

結論から Q と S を導けばよいことは明らかである。あとは前提の 2 つの論理式から導ける。

2-1 $P \vee Q \vdash Q \vee P$

$$\dfrac{P\vee Q \quad \dfrac{[P]^1}{Q\vee P} \quad \dfrac{[Q]^1}{Q\vee P}}{Q\vee P}\,1$$

連言の推論規則通りに解くだけである。1-1 でも述べた通り、順番の入れ替えは自明でないことに注意。

2-2 $(P \vee Q) \vee R \vdash P \vee (Q \vee R)$

$$\dfrac{(P \vee Q) \vee R \qquad \dfrac{[P \vee Q]^2 \qquad \dfrac{[P]^1}{P \vee (Q \vee R)} \qquad \dfrac{\dfrac{[Q]^1}{Q \vee R}}{P \vee (Q \vee R)}}{P \vee (Q \vee R)}\;1 \qquad \dfrac{\dfrac{[R]^2}{Q \vee R}}{P \vee (Q \vee R)}}{P \vee (Q \vee R)}\;2$$

$\vee$ の除去規則から、$P \vee Q$ でも R でも $P \vee (Q \vee R)$ が成り立つことを示せばよい。さらには、$P \vee Q$ に対して $\vee$ の除去規則を用いて、P でも Q でも $P \vee (Q \vee R)$ が成り立つことを示す。このように、$\varphi \vee \psi$ を導くには φ と ψ のどちらか一方だけでもわかっていれば良いという点に注意。

2-2' $P \vee (Q \vee R) \vdash (P \vee Q) \vee R$

$$\dfrac{P \vee (Q \vee R) \qquad \dfrac{\dfrac{[P]^2}{P \vee Q}}{(P \vee Q) \vee R} \qquad \dfrac{[Q \vee R]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[Q]^1}{P \vee Q}}{(P \vee Q) \vee R} \qquad \dfrac{[R]^1}{(P \vee Q) \vee R}}{(P \vee Q) \vee R}\;1}{(P \vee Q) \vee R}\;2$$

2-2 と同様である。

2-3 $P \vee (Q \wedge R) \vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$$\dfrac{\dfrac{P \vee (Q \wedge R) \quad \dfrac{[P]^1}{P \vee Q} \qquad \dfrac{\dfrac{[Q \wedge R]^1}{Q}}{P \vee Q}}{P \vee Q}\;1 \qquad \dfrac{P \vee (Q \wedge R) \qquad \dfrac{[P]^2}{P \vee R} \qquad \dfrac{\dfrac{[Q \wedge R]^2}{R}}{P \vee R}}{P \vee R}\;2}{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)}$$

2-3 $P \vee (Q \wedge R) \vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ の別解

$$\dfrac{P \vee (Q \wedge R) \qquad \dfrac{\dfrac{[P]^1}{P \vee Q} \qquad \dfrac{[P]^1}{P \vee R}}{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[Q \wedge R]^1}{Q}}{P \vee Q} \qquad \dfrac{\dfrac{[Q \wedge R]^1}{R}}{P \vee R}}{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)}}{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)}$$

はじめに示した解は、結論の主演算子である $\wedge$ に着目し、左右の論理式をそれぞれ証明している。それに対して、別解では前提の主演算子である $\vee$ に着目し $\vee$ の除去規則を使っている。どちらの方針も大切なものであるのでしっかりと身に付けておきたい。この問題のように、着眼点によって別解が存在することがありうる。

2-3’ $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \vdash P \vee (Q \wedge R)$

$$\dfrac{\dfrac{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)}{P \vee Q} \qquad \dfrac{[P]^1}{P \vee (Q \wedge R)} \qquad \dfrac{\dfrac{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)}{P \vee R} \qquad \dfrac{[P]^2}{P \vee (Q \wedge R)} \qquad \dfrac{\dfrac{[Q]^1 \quad [R]^2}{Q \wedge R}}{P \vee (Q \wedge R)}}{P \vee (Q \wedge R)}\ 2}{P \vee (Q \wedge R)}\ 1$$

本問は方針こそ立てやすいが、証明図の書き方の点では難問といえるかもしれない。特に証明図の右上に $[Q]$ が出てくることに戸惑った諸君も多いと思われるが、仮定は最終的にキャンセル (つまり $\vee$ の除去則、$\rightarrow$ の導入則、$\neg$ の導入則のいずれかの完結によってディスチャージ) されるという条件を満たしていれば、どこでも、また何度でも登場させることができる。また、前提も何度でも使ってよいということに注意しよう。

2-4 $P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$$\dfrac{\dfrac{P \wedge (Q \vee R)}{Q \vee R} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{P \wedge (Q \vee R)}{P} \qquad [Q]^1}{P \wedge Q}}{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{P \wedge (Q \vee R)}{P} \qquad [R]^1}{P \wedge R}}{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}}{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}\ 1$$

結論から、$P \wedge Q$ と $P \wedge R$ のいずれかを導けばよいと考えるかもしれないが、Q と R は $Q \vee R$ の $\vee$ の除去規則から仮定することしかできないから、どちらか一方を単独に導くのは不可能であるということがわかる。

2-4’ $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$

$$\dfrac{\dfrac{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \qquad \dfrac{[P \wedge Q]^1}{P} \qquad \dfrac{[P \wedge R]^1}{P}}{P}\ 1 \qquad \dfrac{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \qquad \dfrac{\dfrac{[P \wedge Q]^2}{Q}}{Q \vee R} \qquad \dfrac{\dfrac{[P \wedge R]^2}{R}}{Q \vee R}}{Q \vee R}\ 2}{P \wedge (Q \vee R)}$$

2-3’ でも書いたように、仮定は何度でも使うことができることに注意。

2-5 $P \wedge Q, R \vdash (Q \wedge R) \vee (P \vee S)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \wedge Q}{Q} \qquad R}{Q \wedge R}}{(Q \wedge R) \vee (P \vee S)} \quad \text{または} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{P \wedge Q}{P}}{P \vee S}}{(Q \wedge R) \vee (P \vee S)}$$

結論の式は P さえ成り立っていれば証明可能である。前提に含まれていない S が現れるのが唐突であると思う人は、$\vee$ の導入則を確認してほしい。

2-6 $P \vee P \vdash P$

$$\dfrac{P \vee P \quad [P]^1 \quad [P]^1}{P}\ 1$$

$\vee$ の除去規則に従うだけである。

2-7 $P, Q \vdash Q \vee P$

$$\dfrac{P}{Q \vee P} \quad \text{または} \quad \dfrac{Q}{Q \vee P}$$

$\vee$ の導入則そのものである。

3-1 $P \to (Q \to R) \vdash Q \to (P \to R)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Q]^2 \qquad \dfrac{[P]^1 \quad P \to (Q \to R)}{Q \to R}}{R}}{P \to R}\,1}{Q \to (P \to R)}\,2$$

前提の $\to$ を除去するために、まず P を仮定する必要があると考える。また結論の式から、P と Q は仮定してもキャンセルできることがわかる。よって P と Q を仮定して 2 つの $\to$ を除去するという方針が立てられる。

3-2 $P \to Q, Q \to R \vdash P \to R$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1 \quad P \to Q}{Q} \qquad Q \to R}{R}}{P \to R}\,1$$

結論から P を仮定することができる。基本的に、前提に条件法が出てきた場合は $\to$ を除去し続けることを考えればよい。

3-3 $P \to (Q \to R) \vdash (P \wedge Q) \to R$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P \wedge Q]^1}{Q} \qquad \dfrac{\dfrac{[P \wedge Q]^1}{P} \qquad P \to (Q \to R)}{Q \to R}}{R}}{(P \wedge Q) \to R}\,1$$

結論から、$P \wedge Q$ が仮定できる。これは即ち、P と Q の 2 つが仮定されているということに変わりないから、あとは 3-1 と同様に示せる。

3-3' $(P \wedge Q) \to R \vdash P \to (Q \to R)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1 \quad [Q]^2}{P \wedge Q} \qquad (P \wedge Q) \to R}{R}}{Q \to R}\,2}{P \to (Q \to R)}\,1$$

結論から P と Q を仮定できることから、$P \wedge Q$ もまた導くことができる。

3-4 $P \to (Q \land R) \vdash (P \to Q) \land (P \to R)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1 \quad P \to (Q \land R)}{Q \land R}}{Q}}{P \to Q}\,1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^2 \quad P \to (Q \land R)}{Q \land R}}{R}}{P \to R}\,2}{(P \to Q) \land (P \to R)}$$

結論から、P を仮定して Q を導き、それとは別にまた P を仮定して R を導けばよいことがわかる。

3-4' $(P \to Q) \land (P \to R) \vdash P \to (Q \land R)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1 \quad \dfrac{(P \to Q) \land (P \to R)}{P \to Q}}{Q} \qquad \dfrac{[P]^1 \quad \dfrac{(P \to Q) \land (P \to R)}{P \to R}}{R}}{Q \land R}}{P \to (Q \land R)}\,1$$

結論から、P を仮定して $Q \land R$ を導けばよいということがわかる。ここでも、仮定は何度でも使えることに注意しよう。

3-5 $(P \to Q) \lor (P \to R) \vdash P \to (Q \lor R)$ (2010 年度出題)

$$\dfrac{\dfrac{(P \to Q) \lor (P \to R) \qquad \dfrac{\dfrac{[P]^1 \quad [P \to Q]^2}{Q}}{Q \lor R} \qquad \dfrac{\dfrac{[P]^1 \quad [P \to R]^2}{R}}{Q \lor R}}{Q \lor R}\,2}{P \to (Q \lor R)}\,1$$

パターン通りに結論から P を仮定し、また前提の主演算子の $\lor$ の除去則を考えればよい。ここで、$[P]$ と $[P \to Q]$ は別の規則によって仮定されている、いわば「次元の違う」仮定であることに注意しよう。

3-5' $P \to (Q \lor R) \vdash (P \to Q) \lor (P \to R)$ は後述

3-6 $(P \lor Q) \to R \vdash (P \to R) \land (Q \to R)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1}{P \lor Q} \quad (P \lor Q) \to R}{R}}{P \to R}\,1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[Q]^2}{P \lor Q} \quad (P \lor Q) \to R}{R}}{Q \to R}\,2}{(P \to R) \land (Q \to R)}$$

パターン通りに証明していくだけである。P と Q を仮定できるので、どちらにしろ $P \lor Q$ が導けて $\to$ が除去できる。

3-6' $(P \to R) \land (Q \to R) \vdash (P \lor Q) \to R$

$$\dfrac{\dfrac{[P \lor Q]^1 \quad \dfrac{[P]^2 \quad \dfrac{(P \to R) \land (Q \to R)}{P \to R}}{R} \quad \dfrac{[Q]^2 \quad \dfrac{(P \to R) \land (Q \to R)}{Q \to R}}{R}}{R}\,2}{(P \lor Q) \to R}\,1$$

結論から、$P \lor Q$ を仮定して R を導く、つまり $\lor$ を除去して R を導けばよいということがわかる。

3-7 $(P \to R) \lor (Q \to R) \vdash (P \land Q) \to R$

$$\dfrac{\dfrac{(P \to R) \lor (Q \to R) \quad \dfrac{\dfrac{[P \land Q]^1}{P} \quad [P \to R]^2}{R} \quad \dfrac{\dfrac{[P \land Q]^1}{Q} \quad [Q \to R]^2}{R}}{R}\,2}{(P \land Q) \to R}\,1$$

パターン通り、前提と結論の主演算子に注目すればよい。

3-7' $(P \land Q) \to R \vdash (P \to R) \lor (Q \to R)$ は後述。

3-8 $P \to (Q \to R) \vdash (P \to Q) \to (P \to R)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1 \quad [P \to Q]^2}{Q} \quad \dfrac{[P]^1 \quad P \to (Q \to R)}{Q \to R}}{R}}{P \to R}\,1}{(P \to Q) \to (P \to R)}\,2$$

$\to$ の導入則、除去則を繰り返し用いるだけである。

3-8' $(P \to Q) \to (P \to R) \vdash P \to (Q \to R)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^2 \quad \dfrac{\dfrac{[Q]^1}{P \to Q} \quad (P \to Q) \to (P \to R)}{P \to R}}{R}}{Q \to R}\,1}{P \to (Q \to R)}\,2$$

はじめの $P \to Q$ の導き方に戸惑いを覚える諸君も多いかもしれないが、これは 3-12 と同様である。詳しくはそちらを参照されたい。$P \to Q$ さえ導ければあとは基本問題であろう。

3-9 $\vdash (P \land Q) \to P$

$$\dfrac{\dfrac{[P \land Q]^1}{P}}{(P \land Q) \to P}\,1$$

前提の無い証明というのは、用いることができるのは仮定のみということである。結論から $P \land Q$ を仮定して P を導けばよいということがわかる。

3-10 $\vdash P \to P$

$$\dfrac{[P]^1}{P \to P}\,1$$

このような証明図の書き方が許されることに注意しよう。

3-11 $Q \vdash P \to P$

$$\dfrac{[P]^1}{P \to P}\,1$$

3-10 に前提が加わっただけである。前提は任意の回数使える、つまり使わなくてもよいということに注意しよう。

3-12 $Q \vdash P \to Q$

$$\dfrac{Q}{P \to Q}$$

前提と同様に、仮定も任意の回数使える、つまり使わなくてもよいということに注意しよう。

4-1 $P \to \neg\neg P$

$$\dfrac{\dfrac{P \quad [\neg P]^1}{\times}}{\neg\neg P}\,1$$

$\neg\neg P$ を示すのだから $\neg P$ を仮定して矛盾を導けばよい。パターン通りの問題である。

4-2 $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1 \quad P \to Q}{Q} \quad [\neg Q]^2}{\times}}{\neg P}\,1}{\neg Q \to \neg P}\,2$$

前提の $\to$ を除去するために P を仮定する。さらに結論から $\neg Q$ も仮定し矛盾を導き、$\neg P$ を示せばよいことがわかる。

4-2' $\neg Q \to \neg P \vdash P \to Q$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^2 \quad \dfrac{[\neg Q]^1 \quad \neg Q \to \neg P}{\neg P}}{\times}}{\neg\neg Q}\,1}{Q}}{P \to Q}\,2$$

4-2 に二重否定除去規則が加わっただけである。4-2 および本問が対偶証明法の正当性を示すことになる。

4-3 $\neg(P\vee Q)\vdash\neg P\wedge\neg Q$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1}{P\vee Q}\quad \neg(P\vee Q)}{\times}}{\neg P}\,1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[Q]^2}{P\vee Q}\quad \neg(P\vee Q)}{\times}}{\neg Q}\,2}{\neg P\wedge\neg Q}$$

前提の $\neg$ を除去するために $P\vee Q$ を導けばよい。$\neg$ の除去によって矛盾が導かれること、結論に $\neg P$ と $\neg Q$ があることから、P と Q を仮定し、$P\vee Q$ を導けばよいという方針が立つ。

4-3' $\neg P\wedge\neg Q\vdash\neg(P\vee Q)$

$$\dfrac{\dfrac{[P\vee Q]^2 \qquad \dfrac{[P]^1\quad \dfrac{\neg P\wedge\neg Q}{\neg P}}{\times}\qquad \dfrac{[Q]^1\quad \dfrac{\neg P\wedge\neg Q}{\neg Q}}{\times}}{\times}\,1}{\neg(P\vee Q)}\,2$$

結論から、$P\vee Q$ を仮定して矛盾を導けばよいとわかる。パターン通りに解ける問題である。

4-4 $\neg(P\wedge Q)\vdash\neg P\vee\neg Q$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1\quad [Q]^2}{P\wedge Q}\quad \neg(P\wedge Q)}{\times}}{\neg P}\,1}{\neg P\vee\neg Q}\quad [\neg(\neg P\vee\neg Q)]^3}{\times}}{\neg Q}\,2}{\neg P\vee\neg Q}\quad [\neg(\neg P\vee\neg Q)]^3}{\times}}{\neg\neg(\neg P\vee\neg Q)}\,3}{\neg P\vee\neg Q}}{}$$

前提にある $\neg$ の除去則を使うのはわかるかも知れないが、その後の方針は立てづらいであろう。結論の否定を仮定し矛盾を導き、その後二重否定除去規則によって結論を導く。このような証明方針はいくつかの問題で用いる必要があるが、難易度の高いものであろう。4-7(排中律) と合わせて確認しておきたい。

ちなみに、この方針が必要になる証明には (この練習問題の範囲では) 一定の共通項がある、考えてみよう。

4-4' $\neg P\vee\neg Q\vdash\neg(P\wedge Q)$

$$\dfrac{\dfrac{\neg P\vee\neg Q \qquad \dfrac{\dfrac{[P\wedge Q]^2}{P}\quad [\neg P]^1}{\times}\qquad \dfrac{\dfrac{[P\wedge Q]^2}{Q}\quad [\neg Q]^1}{\times}}{\times}\,1}{\neg(P\wedge Q)}\,2$$

パターン通りに解ける問題である。1-1 でも書いたが、くれぐれも P と $\neg P$ を逆に書いたりする

ことがないようにしたい。

4-5 $\vdash P \to (\neg P \to Q)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1 \quad [\neg P]^2}{\times}}{Q}}{\neg P \to Q}\,2}{P \to (\neg P \to Q)}\,1$$

Q を証明するには矛盾規則を使うしかないということは、前提が与えられていないということからわかる。P と $\neg P$ が与えられているので、そこから矛盾を導けばよいという方針も立つ。

4-6 $P \lor Q, \neg P \vdash Q$ （選言的三段論法）

$$\dfrac{P \lor Q \qquad \dfrac{\dfrac{[P]^1 \quad \neg P}{\times}}{Q} \qquad [Q]^1}{Q}\,1$$

パターン通りの問題である。特記事項はない。

4-7 $\vdash P \lor \neg P$ （排中律）

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1}{P \lor \neg P} \quad [\neg(P \lor \neg P)]^2}{\times}}{\neg P}\,1}{P \lor \neg P} \qquad [\neg(P \lor \neg P)]^2}{\times}}{\neg\neg(P \lor \neg P)}\,2}{P \lor \neg P}$$

$\neg(P \lor \neg P)$ を仮定し矛盾を導くために、P を仮定して $P \lor \neg P$ を導く。P の仮定をキャンセルすると $\neg P$ が導かれるので、さらにそこから $P \lor \neg P$ が導ける。

3-5' $P \to (Q \lor R) \vdash (P \to Q) \lor (P \to R)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1 \quad P \to (Q \lor R)}{Q \lor R} \quad \dfrac{\dfrac{[Q]^2}{P \to Q}}{(P \to Q) \lor (P \to R)} \quad \dfrac{\dfrac{[R]^2}{P \to R}}{(P \to Q) \lor (P \to R)}}{(P \to Q) \lor (P \to R)}\,2 \qquad [\neg((P \to Q) \lor (P \to R))]^3}{\times}}{Q}}{P \to Q}\,1}{(P \to Q) \lor (P \to R)} \qquad [\neg((P \to Q) \lor (P \to R))]^3}{\times}}{\neg\neg((P \to Q) \lor (P \to R))}\,3}{(P \to Q) \lor (P \to R)}$$

証明図の長さからわかると思うが、これは難問である。P を仮定しても、$P \to Q$ や $P \to R$ を

単独で導くことはできないので、結論を直接的に導くのは不可能である。そこで結論の否定を仮定し矛盾を導くという手法をとる。前提の $\to$ を除去するために仮定した P が、矛盾規則から Q を推論したタイミングでディスチャージされている点に注目してほしい。Q から $P \to Q$、R から $P \to R$ を導くのは 3-12 と同様である。古典論理の証明では、前提の演算子の除去のための仮定や、結論の否定を仮定したものなど、仮定が多くなりやすいので、すべての仮定がディスチャージされているか確認するよう気を付けたい。

3-7' $(P \land Q) \to R \vdash (P \to R) \lor (Q \to R)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[P]^1$}
\AxiomC{$[Q]^2$}
\BinaryInfC{$P \land Q$}
\AxiomC{$(P \land Q) \to R$}
\BinaryInfC{R}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$P \to R$}
\UnaryInfC{$(P \to R) \lor (Q \to R)$}
\AxiomC{$[\neg((P \to R) \lor (Q \to R))]^3$}
\BinaryInfC{$\times$}
\UnaryInfC{R}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$Q \to R$}
\UnaryInfC{$(P \to R) \lor (Q \to R)$}
\AxiomC{$[\neg((P \to R) \lor (Q \to R))]^3$}
\BinaryInfC{$\times$}
\RightLabel{3}
\UnaryInfC{$\neg\neg((P \to R) \lor (Q \to R))$}
\UnaryInfC{$(P \to R) \lor (Q \to R)$}
\end{prooftree}
$$

前提の $\to$ を除去するためには P と Q を仮定する必要がある。結論の主演算子は $\lor$ であり、$\to$ の導入則で両者を同時に仮定することはできない。したがって、結論の否定を仮定するという手法が必要であることに気付いてほしい。3-5' でも述べたようにすべての仮定をディスチャージしなければならないということに注意する必要がある。例えば、矛盾規則から R を導くところで、かわりに $Q \to R$ を導いてしまうと、Q がディスチャージされていないまま証明が完結してしまい誤りとなる。

5-1 $\forall x(Px \to Qx), Pa \vdash Qa$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{Pa}
\AxiomC{$\forall x(Px \to Qx)$}
\UnaryInfC{$Pa \to Qa$}
\BinaryInfC{Qa}
\end{prooftree}
$$

$\forall$ の除去は無条件に可能であるので、x を a にしてしまえばよい。

5-2 $\vdash \forall x(Px \to (Px \lor Qx))$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[Pa]^1$}
\UnaryInfC{$Pa \lor Qa$}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$Pa \to (Pa \lor Qa)$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to (Px \lor Qx)$}
\end{prooftree}
$$

$Pa \to (Pa \lor Qa)$ は、命題論理と同様に示せる。これを導いた時点で Pa の仮定はディスチャージされており、$\forall$ の導入は正当なものであるということを確認してほしい。

5-3 $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx \land \forall xQx$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \land Qx)}{Pa \land Qa}}{Pa}}{\forall xPx} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \land Qx)}{Pa \land Qa}}{Qa}}{\forall xQx}}{\forall xPx \land \forall xQx}$$

$\forall$ の導入、除去を繰り返していくだけである。

5-3' $\forall xPx \land \forall xQx \vdash \forall x(Px \land Qx)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall xPx \land \forall xQx}{\forall xPx}}{Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall xPx \land \forall xQx}{\forall xQx}}{Qa}}{Pa \land Qa}}{\forall x(Px \land Qx)}$$

同様に、$\forall$ の導入、除去を繰り返していくだけである。

5-4 $\forall xPx \lor \forall xQx \vdash \forall x(Px \lor Qx)$

$$\dfrac{\forall xPx \lor \forall xQx \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall xPx]^1}{Pa}}{Pa \lor Qa}}{\forall x(Px \lor Qx)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall xQx]^1}{Qa}}{Pa \lor Qa}}{\forall x(Px \lor Qx)}}{\forall x(Px \lor Qx)}\ 1$$

別解

$$\dfrac{\dfrac{\forall xPx \lor \forall xQx \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall xPx]^1}{Pa}}{Pa \lor Qa} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall xQx]^1}{Qa}}{Pa \lor Qa}}{Pa \lor Qa}\ 1}{\forall x(Px \lor Qx)}$$

同様に、$\forall$ の導入、除去を繰り返していくだけである。最後の $\forall$ の導入のタイミングで別解が存在する。

5-4' $\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx \lor \forall xQx$ の証明図（※誤りの例）

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx)}{Pa \lor Qa} \qquad \dfrac{\dfrac{[Pa]^1}{\forall xPx}}{\forall xPx \lor \forall xQx} \qquad \dfrac{\dfrac{[Qa]^1}{\forall xQx}}{\forall xPx \lor \forall xQx}}{\forall xPx \lor \forall xQx}$$

「$\forall$ を導入する際に添え字の a が、その時点で有効な仮定に含まれない」という条件に反する。インフォーマルな意味を考えれば、この証明は不可能でありそうだということは理解しやすい。

5-5 $\forall xPax, \forall x\forall y(Pxy \to Qyx) \vdash \forall xQxa$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall xPax}{Pab} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x\forall y(Pxy \to Qyx)}{\forall y(Pay \to Qya)}}{Pab \to Qba}}{Qba}}{\forall xQxa}$$

量化子 ($\forall$ と $\exists$) の除去、導入は左からであるということに注意しよう。また、a は仮定に含まれる何か具体的な定項、b は $\forall$ から出てきた一般の定項（つまり c でも d でも同じように用いることができる）であるという違いがあることを確認しておきたい。

6-1 $\forall xPx \vdash \exists xPx$

$$\dfrac{\dfrac{\forall xPx}{Pa}}{\exists xPx}$$

$\forall$ の除去則、$\exists$ の導入則には条件がないことの確認であろう。

6-2 $\exists x(Px \wedge Qx) \vdash \exists xPx \wedge \exists xQx$

$$\dfrac{\exists x(Px \wedge Qx) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[Pa \wedge Qa]^1}{Pa}}{\exists xPx} \qquad \dfrac{\dfrac{[Pa \wedge Qa]^1}{Qa}}{\exists xQx}}{\exists xPx \wedge \exists xQx}}{\exists xPx \wedge \exists xQx}\ 1$$

別解

$$\dfrac{\dfrac{\exists x(Px \wedge Qx) \qquad \dfrac{\dfrac{[Pa \wedge Qa]^1}{Pa}}{\exists xPx}}{\exists xPx}\ 1 \qquad \dfrac{\exists x(Px \wedge Qx) \qquad \dfrac{\dfrac{[Pa \wedge Qa]^2}{Qa}}{\exists xQx}}{\exists xQx}\ 2}{\exists xPx \wedge \exists xQx}$$

$\exists$ の除去規則を正しく使えるようにしたい。$\exists$ の除去規則に関する条件から、導かれる論理式 (推論規則での ω) にも量化子が含まれることが非常に多いということに注意しよう。

6-3 $\exists xPx \wedge Q \vdash \exists x(Px \wedge Q)$

$$\dfrac{\dfrac{\exists xPx \wedge Q}{\exists xPx} \qquad \dfrac{\dfrac{[Pa]^1 \qquad \dfrac{\exists xPx \wedge Q}{Q}}{Pa \wedge Q}}{\exists x(Px \wedge Q)}}{\exists x(Px \wedge Q)}\ 1$$

$\exists$ の除去則の練習であろう。導かれる論理式 (ω) に a が残ってはいけないことに注意。

6-4 $\forall x(Px \to Qx) \vdash \exists xPx \to \exists xQx$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists xPx]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[Pa]^1 \qquad \dfrac{\forall x(Px\to Qx)}{Pa\to Qa}}{Qa}}{\exists xQx}}{\exists xQx}\;1}{\exists xPx\to\exists xQx}\;2$$

Px が成り立つような x を a と置くと、$Pa \to Qa$ は前提から当然成り立っている。インフォーマルな意味を考えれば、自然な推論であろう。$\exists$ の除去則の制限から、$\exists xQx$ の $\exists x$ を導入するタイミングに気を付けたい。

本問の誤りの例

$$\dfrac{\dfrac{[\exists xPx]^2 \qquad \dfrac{[Pa]^1 \qquad \dfrac{\forall x(Px\to Qx)}{Pa\to Qa}}{Qa}}{Qa}}{\exists xQx}$$

$\exists$ の除去則の仮定 Pa に含まれる a が、除去で導かれる Qa のなかに含まれてしまうので、条件を満たさない。

6-5 $\neg\exists xPx \vdash \forall x\neg Px$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Pa]^1}{\exists xPx} \qquad \neg\exists xPx}{\times}}{\neg Pa}\;1}{\forall x\neg Px}$$

結論から、一般の a について $\neg Pa$ を導けばよいことがわかり、また前提の主演算子が $\neg$ なので、Pa を仮定して矛盾を導くという方針が立つ。

6-5' $\forall x\neg Px \vdash \neg\exists xPx$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists xPx]^2 \qquad \dfrac{[Pa]^1 \qquad \dfrac{\forall x\neg Px}{\neg Pa}}{\times}}{\times}\;1}{\neg\exists xPx}\;2$$

$\neg$ を導入しなければならないので、$\exists$ の除去則で導かれる論理式は $\times$ でなければならない。$\times$ は命題記号であり、単独で論理式を形成できることを思い出しておきたい。

6-6 $\neg\forall xPx \vdash \exists x\neg Px$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg Pa]^1}{\exists x\neg Px}\quad[\neg\exists x\neg Px]^2}{\times}}{\neg\neg Pa}\,1}{Pa}}{\forall xPx}\qquad\neg\forall xPx}{\times}}{\neg\neg\exists x\neg Px}\,2}{\exists x\neg Px}$$

最初に Pa を仮定し $\forall xPx$ を導き矛盾を導くという間違いをした諸君も多いのではないかと思う。これでは $\forall$ の除去則を満たさない。$\neg Pa$ を仮定し矛盾を導くことで $\forall xPx$ を推論するというのが正解への道である。また、結論の主演算子が $\exists$ である証明は、古典論理が必要な難問になりやすいので気を付けたい。

6-6' $\exists x\neg Px \vdash \neg\forall xPx$

$$\dfrac{\exists x\neg Px\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall xPx]^1}{Pa}\quad[\neg Pa]^2}{\times}}{\neg\forall xPx}\,1}{\neg\forall xPx}\,2$$

前提・結論の主演算子に注目すれば、証明の手順はさほど難しくないだろう。6-5' のように、$\neg$ の導入を $\exists$ の除去より後に行ってもよい。

6-7 $\forall x(Px\to\neg Qx)\vdash\neg\exists(Px\land Qx)$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x(Px\land Qx)]^2\qquad\dfrac{\dfrac{[Pa\land Qa]^1}{Qa}\qquad\dfrac{\dfrac{[Pa\land Qa]^1}{Pa}\quad\dfrac{\forall x(Px\to\neg Qx)}{Pa\to\neg Qa}}{\neg Qa}}{\times}}{\times}\,1}{\neg\exists x(Px\land Qx)}\,2$$

結論の主演算子が $\neg$ なので肯定形を仮定して矛盾をを導く。$\times$ の扱いについては 6-5' を参照されたい。

6-7' $\neg\exists(Px\land Qx)\vdash\forall x(Px\to\neg Qx)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Pa]^2\quad[Qa]^1}{Pa\land Qa}}{\exists(Px\land Qx)}\quad\neg\exists(Px\land Qx)}{\times}}{\neg Qa}\,1}{Pa\to\neg Qa}\,2}{\forall x(Px\to\neg Qx)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^2\quad[Q]^1}{P\land Q}\qquad\neg(P\land Q)}{\times}}{\neg Q}\,1}{P\to\neg Q}\,2$$

右図の証明を念頭におけば、難しくはないだろう。$\forall$ の導入までに a を含む仮定はすべてディスチャージされているので、確認しておこう。

6-8 $\exists y \forall x Pxy \vdash \forall x \exists y Pxy$

$$
\dfrac{\exists y \forall x Pxy \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x Pxb]^1}{Pab}}{\exists y Pay}}{\forall x \exists y Pxy}}{\forall x \exists y Pxy}\ 1
$$

5-5 でも述べたように導入・除去の順番に注意しよう。逆が成り立たないことも考えておこう。