

A^n の求め方

No.

Date

よくある問題

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -12 \\ 5 & 6 & -6 \\ 3 & 3 & -7 \end{pmatrix} \text{ とする. } A^n \text{ を求めよ}$$

前提知識

- ・逆行列
- ・基礎用語

手順

- ① 固有値を求める
- ② 固有ベクトルを求める
- ③ $A = PBP^{-1}$ となる P を求める
- ④ P^{-1} を求める
- ⑤ $A^n = PB^nP^{-1}$ から答えが得られる。

解答

- ① $\det(A - xE) = 0$ となる x を求める (固有値という)

$$\begin{vmatrix} 3-x & 2 & -12 \\ 5 & 6-x & -6 \\ 3 & 3 & -7-x \end{vmatrix} = \dots = -(x-1)(x+1)(x-2) = 0 \text{ となるのは}$$

$x = 1, -1, 2$ のとき

よって固有値は 1, -1, 2

- ② 各固有値 x に対して $(A - xE)v = 0$ となる v を求める (固有ベクトルという)

$x=1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -12 \\ 5 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ となる } x, y, z \text{ を求める (零ベクトルは } \times \text{)}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{固有ベクトルは } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} //$$