# 電磁気学

## 1　ガウスの法則

### 1.1　Coulomb の法則

Newton による万有引力を含んだ力学理論の完成後、この世界のあらゆることは力学を用いて表現できると考えられた. そんな中 Coulomb によって発見された次の現象も、当時の物理学者は力学理論を用いて解釈を試みた.

Coulomb の法則

ある二つの点電荷 $e_1$ と $e_2$ の間には、二点間の距離 $r^2$ に反比例する力

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e_1 e_2}{r^2} \tag{1}$$

が働く.

これは実験から求まった式である. 複数の点電荷が存在するとき、単純にこれらの力の和をとることで合力が求まるが、これは決して自明なことではないことに注意されたい. 実験から求められた事実である[*1].

さて、もしこれを Newton の力学体系で解釈するとどういうことになるだろう. この式は、力学で慣れ親しんだ万有引力の式に非常によく似ている. では、点電荷の間には遠隔作用的に力が働いているのだろうか. 実はそうではない. そもそもこの力と万有引力の間には大きな違いが二つある. すなわち

1. 電荷には正負 2 種類がある.
2. 働く力の大きさが、coulomb の力の方が桁違いに大きい[*2].

これほど決定的な違いがある二つの力を同種と見なすのはいささか無理があろう. そういうわけで、天才 Faraday の近接作用の考え方が光明をかざすのである.

近接作用

ある場所 $x$ の状態は、その場所から微小距離 $dx$ だけ離れた場所 $x + dx$ によって決定される.

[*1] そもそもこの関係は、ある二つの電荷の間に働く力は、他の電荷による影響を全く受けないことを前提としている

[*2] 具体的には、仮に人間の体を構成する電子が 1% でも多いと、1m 離れたところにいる君の隣人は、哀れきりもみ回転に飛び散り、銀河の彼方へと旅に出ることになるだろう. 一方で重力はそんなことはない. 空から太陽が超速で突っ込んできていないだろう

この考え方を Coulomb の法則に適用してみよう. すると、二つの点電荷は互いに全く魔術的に遠隔作用を及ぼしているのではなく、片方の点電荷が空間中に与えた影響が、あたかも波のように他方の点電荷へと到達し、結果影響を及ぼしているということになる. つまり、この現象の本質的なところは、二つ点電荷があることではない. 一つ電荷がある時、その電荷が周りの空間にある影響を与える、ということにある[*3].

このことを表現するには、(1) 式はいささか力量不足である. 先に述べたように、これは実験から得た式であるから、数値の関係式として成り立つものの、現象の実像を満足に表現できていないのである. 従って、まずは (1) 式を次の二式に書き換える.

$$\boldsymbol{F} = e_1 \boldsymbol{E} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e_2}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{3}$$

ここで $\boldsymbol{E}$ を電場(electric field) という. これが"揺らぎ"である. この表現は、未だ不完全だが、(1) 式に比べて幾分成長している.(1) 式では、$(e_1, e_2)$=$(0, 0)$ と、$e_1 = 0$ かつ $e_2 \neq 0$ の区別がつかなかったが、(3) 式で電場 $\boldsymbol{E}$ を定義することで、この両者に区別がつくようになっている. つまり、力 $\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{0}$ でも、電場が"揺らぎ"として存在することが表現できているのである.

とはいえ、これではまだ足りない. こんなんじゃ満足できない. 点電荷なんて甘ったれたことを言わずに、空間的な広がりを持った電荷を考えるべきだ. そうしなければ $x$ と $x + dx$ の関係が見えてこない. ここで思いつくべきは次の数学的事実である.

積分の意義

微小区間 $dx$ を掛けて足しあげる操作を積分とよぶ.

$dx.dx$ である. これはまさに近接作用を表現するにうってつけではないか. さらに空間的に広がりを持つ電荷を考えるならば、どう考えたって $dx$,$dy$,$dz$ が必要だ. つまりこの電荷が分布している空間中から取り出した微小体積を、微小区間を掛け合わせた形にして足しあげるのがこの時積分に相当し、そうすることで近接作用の要請を満たした式を導入できる. 点電荷はそうして得られた式の特別な場合に過ぎない[*4]

ここで、位置 $x$ の時間変化しない単位体積あたりの電荷の大きさを $\rho(\boldsymbol{x})$ とする. これを電荷密度関数という. 名前の由来は明らかだろう. この $\boldsymbol{x}$ はベクトルであることに注意. この時、空間中に広がっている電荷の総量 $Q$ は、先述の積分の意義から明らかなように、

$$Q = \iiint \rho(\boldsymbol{x}) dx dy dz \tag{4}$$

となる. ここで、積分記号が三つ出てくることに戸惑うかもしれない. しかし臆することも身構えることもない. これは単に末尾についてる $dx$,$dy$,$dz$ それぞれの微小区間に対応する和を表現しているだけであって、実際に行うのは言うなれば""偏微分の逆を三回それぞれの文字について行う"に過ぎない. 積分区間は、$(-\infty, \infty)$. というのも電荷のない場所はどうせ足しても 0 だからだ. この (4) 式を、慣習として次のように表記し直す.

$$Q = \int \rho(\boldsymbol{x}) d^3x \tag{5}$$

---

[*3] よりわかりやすく言うならば、水にビニール球を浮かべることを想像しよう. この時水面は、他にビニール球があるかどうかにかかわらず揺らいでいる. ここに新たに別のビニール球を浮かべると、先のビニール球が作った揺らぎによって置いたビニール球は動き出す.

[*4] 正確に言えば、点電荷の場合は電荷密度関数を $\delta$ 関数にすることでで表現できる

さて、ここで (5) 式を (3) 式に代入して、次の電荷密度関数と電場の関係式を得る.

電場と電荷密度の関係式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dx^3 \rho(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{6}$$

これでとりあえず一つの議論を終わりにしよう. これは電荷密度関数さえ与えられれば、電場が求まることを意味するが、この式は大抵の場合解けない. これから色々な議論をするための式であると思われたい.

## 1.2 ガウスの法則

(3) 式を見て欲しい. この式では $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx})$ とが互いに独立に定まる. これは近接作用の考え方に沿わない. と、なればこいつを華麗に表現する方法が求められる. それがこれから導入するガウスの法則である. この導出には面積分と立体角*5の話が出てくるが、先述の積分の意義さえ分かっていれば面積分は明らかだし、特に説明しない. ただし、電場はベクトルであるから、面積分する際に、微小平面 $ds$ に垂直な単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ をかける必要があることに注意.

まず、半径 $R$ の球の中心に点電荷 $Q$ を置いた系を考える. この時 (3) 式は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^2}$$

すなわち

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

となる. この意味を考えると、「球の中心に置かれた点電荷が作る電場を球面状で足し合わせると、その値は $Q$ を $\varepsilon$ で割ったものに等しい」くらいになろう.

この下線部が私たちに一つの夢を抱かせる. すなわち、この関係は任意の閉曲面を取っても、その表面上で同じ操作をすると成り立つのではないか?

実際、そうなのである. これを確かめるには、上の話で球を (電場ベクトルと表面が一度だけ交わる) 任意の閉曲面にするだけで良い. あとは思考実験 (というか暗算) すれば十分だ.

適当な閉曲面を書いて欲しい. その内部の点を無作為に選ぶ. この時この点の持っている条件は「閉曲面の内部にある」だけである. さて、この点から適当な半直線 (これが電場ベクトルに相当) を、周と交わるまで伸ばす. 交点における単位法線ベクトルをとる. このベクトルと電場ベクトルのなす角を $\theta$ とすると、立体角 $\Omega$ の対応関係を考えて簡単に

$$d\Omega = \frac{\cos\theta}{R^2}$$

という関係式が得られる*6.

これをさっきと同様の式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\cos\theta}{R^2}$$

に代入して閉曲面 $S$ にわたって面積分すれば、立体角の総和が $4\pi$ であることも併せて、この場合でも先の式が得られる*7.

---

*5 radian を立体に拡張したもの.radian は単位円の中心から見た弧の長さであったから、当然次元が上がって、立体角は単位球の中心から見た球面状の面積. 総和は $4\pi$

*6 得られない人は聴きに来てください

*7 得られない人は (ry

さて、あとは思考実験だ. 残されたパターンは、電荷が閉曲面の外にある場合と、内側にある電荷が生む電場ベクトルが、複数回閉曲面と交わる場合である. 説明も不要ではないかというくらいだ. これらは併せて一度に説明してしまおう.

電場ベクトルが偶数回閉曲面と交わった時を考えよう. この時、それぞれの交点での単位法線ベクトルには必ず向きが反対のペアとなる単位法線ベクトルを持つ交点が存在する. 積分は和の演算なので、これらの総和をとると 0 になる. すなわち、電荷が外側にある時、その歪みは全体として無視される[*8]. さらに、電荷が閉曲面の内側にある時でも、この関係は成り立つ. 図を描けばわかるが、どの電場ベクトルも奇数回閉曲面と交わる. 従って偶数回分は相殺し、残った一回分のみが和の結果として現れる. すなわち、上の関係はこの時にも成り立つ.

以上から、次の法則が確かめられた.

積分形のガウスの法則・点電荷 ver.

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n} Q_k \tag{7}$$

これを空間的な広がりを持つ電荷に拡大する. 微小体積に電荷密度関数をかけて足し合わせると、積分の意義より

積分形のガウスの法則・一般 ver.

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{x})d^3x \tag{8}$$

を得る. ここで数学上の重要な定理を紹介する. この定理は面積分と体積積分を結ぶ重要な式なので、覚えておきたい.

ガウスの定理

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})dS = \int_V div\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})d^3x \tag{9}$$

ここで右辺の”div”は発散という. 定義は

$$div\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$$

である. 意味は名前と定義から理解できよう. これを (8) 式に代入する. 任意の閉曲面の内部について成り立つので、被積分関数は恒等的に正しく、次の式が得られる.

微分系のガウスの法則

$$div\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x}) \tag{10}$$

これはのちに一般化され、電磁気学の基本定理である Maxwell 方程式の一角となる重要極まりない式であるから、肝に銘じよう.

[*8] 外にある点から閉曲面に半直線を引いた時、奇数回だけ交わるということはありえない

では、早速だがガウスの法則を一般化していくことを考える. まず、一つのことを断りたい. それは、「これまで色々議論してきたけれど、これらはすべて電場が時間変化しないことを前提としている」ということだ. こうした電場を静電場という. もちろん世の中に溢れている電場は、荒れ狂う風雨にさらされた稲のように絶えず時間変化を繰り返している. さらに、今までの議論では、真空中である、ということを暗黙の了解としてきた. これでは理論として不完全とのそしりを免れない. ゆえに、時間変化し、誘電体に包まれた場合に一般化される.

高校でも習ったかと思うが、原子に対して外部から静電場が働くと、静電誘導が起こる. 誘電体も原子の集まりであるから、全体として、電場の向きに対応する軸に沿って分極する. これは誘電体の両端がそれぞれ逆の電荷を帯びることに相当する[*9].

ここで、分極ベクトルというものを導入する. これは大したことではなくて、誘電体が分極するときに、誘電体中に適当な面[*10]を取り、その面の単位面積当たりを通過する正電荷の大きさと向きをベクトル化したものだ. 渋滞のときに前の車が動けば同じだけ後ろの車も動くように、これをその選んだ面全体で面積分すれば、どの面を選んでいようが等しくなる. つまり、先の面として $S_1$,$S_2$ の二つを取ったとしても、分極ベクトルを $\boldsymbol{P}$ として

$$\int_{S_1} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}_1 dS = \int_{S_2} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}_2 dS \tag{11}$$

が成り立つ.

さて、空間的な広がりを持つ正の帯電体 $A$ を考えよう. この周りには、はるか宇宙の果てまで続く (かもしれない) 誘電体がべっちょりと張り付いてる. この時、先述のように、誘電体が分極していることは、その両端において電荷が生じていることによってのみ確認できる. すなわち、$A$ と誘電体の境目と、はるか宇宙の彼方の二カ所に電荷が生まれていることが、誘電体があることで生まれる変化のすべてである. この時、$A$ が本来持っている電荷[*11]を $Q_e$ とする. 帯電体と誘電体の境目に生じた誘導電荷は、$A$ の表面を $S_0$ として

$$-\int_{S_0} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) dS$$

となる. 負号は、$A$ が正であるから誘導される電荷は負ですよ、という情報にすぎない. この式から、表面 $S_0$ より外側にあり、かといって遥か彼方にあるというわけでもない中途半端な面 $S$ において積分形のガウスの法則を立式すると

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) dS = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_e - \int_{S_0} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) dS) \tag{12}$$

(11) 式がここで生きてくる.(12) 式の積分領域に選んだ面に任意性があることを意味するこの式のおかげで (12) 式は

$$\int_S (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{n} dS = Q_e$$

となる. 先に得た真空中のガウスの法則と似ているのは当然だろう. ここで左辺のカッコの中身を新たに電束密度と呼ぶ. 由来から考えれば明らかだが、分極ベクトルは電場ベクトルと必ず何らかの関係を持つ. そして、大抵の誘電体では、それは比例 (平行) 関係である. この時の比例定数を電気感受率という. すると電束密

[*9] 逆に言えば、他に目に映る変化は起こらない.

[*10] これは平面でなくて良い

[*11] これを真電荷という. シン・ゴジラ面白かった

度の表式から、電束密度ベクトルも電場ベクトルと平行であることがわかる. この比例定数を一般の誘電率 $\varepsilon$ と呼ぶ. 真空中においては電気感受率を 0 にすることで、$\varepsilon$=$\varepsilon_0$ となり、真空中の話も含有できることが容易に知れる.

帯電体をあたかも点電荷のように $Q_e$ とおいたことに不審を抱いた人も、ここで疑念が晴れる. 電荷密度関数を用いて電荷を一般化しよう. すると、

$$Q_e = \int_V \rho_e(\boldsymbol{x}) d^3x$$

となるのはもういいだろう. 前ページ最後の式の左辺をガウスの定理を用いて体積積分の式にして、右辺を上式に置き換えると、任意の積分空間 V を選べることから被積分関数は恒等的に等しく

時間変化を無視した微分形のガウスの法則

$$divD(\boldsymbol{x}) = \rho_e(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

を得る. これは実は時間変化しても同様に成り立つ[*12].

一般的な微分形のガウスの法則

$$divD(\boldsymbol{x}, t) = \rho_e(\boldsymbol{x}, t) \tag{14}$$

これが Maxwell 方程式の一角、ガウスの法則である. 神の与えた世界がそのまま生じ続けることを示した画期的な式と言える[*13][*14].

この章の最後に静電場についてその回転が常に 0 となることと、そこから得られる話の概要だけ述べておく. 回転とは、記号 rot で表されるもので、定義としては

$$rotX = \nabla \times \ X$$

意味はもういいよね. これが 0 となるとは、次のストークスの定理より、線積分が道筋によらないことを意味する.

ストークスの定理

$$\int_C X(x)dx = \int_S rotX(x) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})dS \tag{15}$$

実際、(6) 式を使って成分ごとに計算すれば rotE=0 はすぐ求まる. 本当はこの後静電ポテンシャルの話とかしたいのだが、このプリントの目的は、Maxwell の方程式を形だけでも求め、最低限の武装だけはしてもらうことにあるので、とりあえず捨て置く. D=$\varepsilon$E から明らかだが、この時 rotD=0.

[*12] 説明は面倒なので気になったら来てください

[*13] 適当にいじくりまわして、世界の始まりの値を適当に置いてみてください

[*14] 実は Maxwell の導いた式はもっと複雑で整理されてなかったんだけど、ヘルツだったかな?が整理したらこんな綺麗な式になりました

## 1.3　磁場に関するガウスの法則

この続きを作る気の NASA