解析力学

本日 9 月 9 日に発表された A セメスターシラバスで、私の所属する理一 14 組はクソ化学実験のせいで、解析力学が履修できないことが発覚しました. 私は S セメスターの語学地獄を、A セメスターで理系科目のパラダイスに飛び込む自身を想像することで乗り切っていたものですから、このことが不満でなりません. 欲求不満なので、少し、具体的には Euler-Lagrange 方程式の導出とその先の展望を紹介するプリントを作ることにしました. あくまで初学者への導入程度のものにするつもりなので、すでに話の流れを知っている人には何の役にも立たないことを断っておきます.

1 最小作用の原理

まずはじめに断っておくが、力学において、力学的状態が定まるのは、座標と速度のすべてが同時に与えられる時である. 何故ならば、たとえ座標がすべて定まったとしても、その時の速度がわかっていなければ、次の瞬間系がどうなっているか誰にもわからないからだ. こういう意味で、速度もすべて与えられた時、力学的状態が一意に定まると言える.

ここで、力学系の運動法則における一つの原理を紹介する. もう知っていると思うが、原理とはそれより小さい法則に由来しないために原理と呼ばれる.

> 最小作用の原理
>
> 二つの時刻 $t = t_1$,$t = t_2$ において一般化座標 q をそれぞれ q_1,q_2 とした時、系の運動 $q(t)$ は、その系の作用
>
> $$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \tag{1}$$
>
> を停留させるように定まる. この汎関数 L をラグランジアン (Lagrangian) という.

ここで被積分関数が一階微分までしか含まないのは、先ほど説明したように、速度まで知れれば力学的状態が定まることに由来する. また、上の定義では厳密さにこだわって**停留**という表現にしたが、多くの場合これは最小と読み替えて差し支えない. 原理の名前が広く最小作用の原理と呼ばれるのはそれが原因である[*1].

天下り的な説明は好まないが、多くの系において Lagrangian は

$$L = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャル・エネルギー})$$

で与えられる[*2].

[*1] この話について語ると長くなるが、直観的なヒントを与えるとするならば、三次元の波動のグラフを想像してほしい. 停留点には山と谷があるけれど、安定な停留点は谷の方である

[*2] 初学のうちは我慢してほしい

2 Euler-Lagrange 方程式

さて、ではこの最小作用の原理から Euler-Lagrange 方程式を導出する. これは高校までに習ってきた Newton の運動方程式と数学的に全く等価である[*3]. 最小作用の原理で確かに運動 $q(t)$ の形は定まるのだが、だからと言っていつも系が与えられるたびに先の式からごちゃごちゃと計算して停留する q を求める... なんてやってたら使い物にならない. そういうわけで、微分方程式の形に変えていく.

最小作用の原理で決まった運動 $q(t)$ を考える.

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{2}$$

を満たす任意微小関数 $\delta q(t)$ だけずれた関数 $q(t) + \delta q(t)$ の作用

$$S[q + \delta q]$$

を $\delta q(t)$ について冪展開した時、δq の一次の項が存在しないならば $q(t)$ が $S[q]$ を停留させると言える. このべき展開を考えるために、まずは $L[q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t]$ を冪展開する.[*4]

二次以上の項はゴミのような存在であるから無視して、

$$\delta S[q] = S[q+\delta q] - S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt J = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)\delta q_i + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right]_{t=t_1}^{t=t_2}$$

ここで (2) 式より最右辺の第二項は明らかに 0. 先述のように、作用 $S[q + \delta q]$ を $\delta q(t)$ について冪展開した時に、δq の一次の項が存在しないことが条件であった. ここで最右辺の第 1 項を見ると、この条件は明らかに被積分関数が 0 であることと等価. したがって次の Euler-Lagrange 方程式を得る.

Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{3}$$

これが正しいことは、Newton の運動方程式の再現性からも納得できる[*5].

残念ながらここから先は萎えてしまって作る気がないのだが、流れだけ書く.

まず、Lagrangian を $\dot{q}$ について Legendre 変換したものを Hamiltonian と呼ぶ. こうした変換の中で、元のものと等価となり、式を簡単にするものを探す. これが正準変換の話となる. こうして運動を記述するのは終わる. 保存則の導出については、Noether の定理と呼ばれる非常に哲学的かつ美しい定理が登場するので頑張ってほしい. 未定乗数法とかはまあただのツールなので恐るるに足らない.

ついでにオススメの参考書を列記しておく. 上から順に初学者向けである.

『基幹講座　物理学　解析力学』　by 益川敏英、植松恒夫、青山秀明、畑浩之

『理論物理学教程　力学』　by ランダウ＝リフシッツ

『朝倉物理学体系　解析力学 1,2(別冊)』　by 山本義隆、中村孔一

以上である. 教務課はクソ.

[*3] 証明は容易であるから改めて書かない

[*4] 面倒だから書かないが、多変数関数の Taylor 展開より容易に求まる. 以下このべき展開の結果の項の一つである $L(q, \dot{q}, t)$ を $L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t)$ から引いたものを J と表記する.

[*5] 具体的に簡単な問題で式を立ててみてください