2016 年 10 月 15 日

振動・波動論（菊川）　試験対策プリント

はじめに

このシケプリは、2016 年度 A セメスター金曜 2 限菊川先生の振動・波動論の授業の重要そうなところのまとめと、典型的な問題の解き方を記したものです。**数弱物弱の僕が LaTeX の練習も兼ねてつくったもの**という意味合いがわりと強いので、間違いや文句などあるかもしれません。ごめんなさい。プロの方々に殴られるの怖いです。点数向上に少しでも貢献できたらなあと思っています。

MashiLiner

1　単振動

1.1　単振り子

長さ l の紐に質量 m の重りがついて、天井からぶら下がっている。紐の傾き角度を$\theta(|\theta| \ll 1)$ とする。重りの動径方向・接線方向の運動方程式は、

$$
\begin{cases}
-ml\ddot{\theta} = T + mg\cos\theta & (1) \\
ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta & (2)
\end{cases}
$$

このとき、$\theta \approx \sin\theta$が成り立つから、(2) 式を変形して$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$となり$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$の単振動をする。これは振り子の振幅によらない。(振り子の等時性)

1.2　安定な平衡点付近での振動

x におけるポテンシャル $V(x)$ として、力 $F(x) = \frac{dV(x)}{dx}$だから、$\frac{dV(x)}{dx} = 0$ の点は平衡点となる。ここで平衡点 x_iでの $V(x)$ の二階微分を考える。

$$
\begin{cases}
\frac{d^2V(x_i)}{dx^2} > 0 \text{ ならば安定} & (3) \\
\frac{d^2V(x_i)}{dx^2} < 0 \text{ ならば不安定} & (4)
\end{cases}
$$

ところで、$V(x)$ を x_i周辺で 2 次の項まで Taylor 展開すると、

$$
\begin{aligned}
V(x) &\approx V(x_i) + \frac{dV(x_i)}{dx}(x - x_i) + \frac{1}{2}\frac{d^2V(x_i)}{dx^2}(x - x_i)^2 & (5) \\
&= V(x_i) + \frac{1}{2}\frac{d^2V(x_i)}{dx^2}(x - x_i)^2 & (6)
\end{aligned}
$$

これは単振動の式。

2　連成振子の基準振動

2.1　振子の質量が同じ場合

2.1.1　振動の一般解を求める

2 つの振子 $1, 2$ の質量がともに m のとき、振子 $1, 2$ の運動方程式を変形して、以下のようになれば基準振動が求まる。

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k'(x_1 - x_2) & (7) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) & (8) \end{cases}$$

基準振動とは、**2 つの振子が共通の角振動数・位相で振動する**、その振動のことである。

共通の角振動数をω、初期位相をαとおけば、2 つの振子が基準振動をする時の運動は

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha) & (9) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha) & (10) \end{cases}$$

と表せる。これらを 2 回微分した上で運動方程式に代入し、$\cos(\omega t + \alpha)$ で 2 式の両辺を割ると、

$$\begin{cases} m(-\omega^2)A_1 = -kA_1 - k'(A_1 - A_2) & (11) \\ m(-\omega^2)A_2 = -kA_2 - k'(A_2 - A_1) & (12) \end{cases}$$

となる。これを A_1と A_2の連立方程式と捉えて A_2を消去すると、

$$\left(\left(\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) + \frac{k'}{m}\right)^2 - \left(\frac{k'}{m}\right)^2\right) A_1 = 0 \tag{13}$$

よって ($A_1 = 0$ の場合は除いて)、

$$\omega^2 = \frac{k}{m} + \frac{k'}{m} \pm \frac{k'}{m} = \frac{k}{m}, \frac{k+2k'}{m} \tag{14}$$

ここで、$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$のとき、これを (11) に代入して $A_1 = A_2$となり、$\omega^2 = \dfrac{k+2k'}{m}$のとき、これを (11) に代入すれば $A_1 = -A_2$となる。これが基準振動の 2 つのモードであり、甲・乙と名付ける。

甲乙それぞれのモードにおいて、2 振子の運動方程式は以下の通り。

$$\begin{cases} x_{甲1} = A_{甲} \cos(\sqrt{\dfrac{k}{m}} t + \alpha) & (15) \\ x_{甲2} = A_{甲} \cos(\sqrt{\dfrac{k}{m}} t + \alpha) & (16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{乙1} = A_{乙} \cos(\sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}} t + \alpha) & (17) \\ x_{乙2} = -A_{乙} \cos(\sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}} t + \alpha) & (18) \end{cases}$$

振子の振動の一般解は、甲・乙の解の重ね合わせである。以下のようになる。

$$\begin{cases} x_1 = A_{甲} \cos(\sqrt{\dfrac{k}{m}} t + \alpha) + A_{乙} \cos(\sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}} t + \alpha) & (19) \\ x_2 = A_{甲} \cos(\sqrt{\dfrac{k}{m}} t + \alpha) - A_{乙} \cos(\sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}} t + \alpha) & (20) \end{cases}$$

2.1.2　基準座標と系のエネルギー

この例において、2 つの振子の振幅の比 $A_1 : A_2$は、$1:1$ である場合と $1:-1$ である場合があった。これを踏まえて $Q_{\text{甲}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), Q_{\text{乙}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ を導入する。これが**基準座標**である。

系のエネルギー E は運動エネルギー K とポテンシャル V を用いて以下の通り。

$$E(x_1, x_2) = K(x_1, x_2) + V(x_1, x_2) \tag{21}$$

$$= \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{k}{2}x_1^2 + \frac{k}{2}x_2^2 + \frac{k'}{2}(x_1 - x_2)^2 \tag{22}$$

基準座標 $Q_{\text{甲}}$、$Q_{\text{乙}}$を用いて表せば、

$$E = \frac{m}{2}(Q_{\text{甲}}^2 + Q_{\text{乙}}^2) + \frac{k}{m}(Q_{\text{甲}}^2 + Q_{\text{乙}}^2) + \frac{k'}{m}Q_{\text{乙}}^2 \tag{23}$$

2.2　レポートの問題　～LC 回路～

提出締め切り後に更新、解答例が配布された場合は割愛。

2.3　レポートの問題　～質量が違う！～

提出締め切り後に更新、回答例が配布された場合は割愛。