2016 年度微分積分学 期末試験　理二三 18-20 組　　　　　　　担当：緒方芳子

すべての解答記入用紙に，氏名・学生証番号，及び問題の番号を書くのを忘れないようにしてください．全問につき，その解答に至った理由を明記してください．あいまいな記述は悪意に解釈します．ノート・教科書類の持ち込みは不可です．

問 1

区間$[0,1]$上の関数列 $f_n(x)=\frac{x^n}{1+e^{-nx}}$，$n=1,2,3,\ldots$ が $[0,1]$ 上で一様収束するか否かを理由を付して答えよ．

問 2

平面内の集合

$$A\coloneqq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2\le x^2-y^2,\qquad x,y\ge 0\}$$

上の関数 $f(x,y)=xy$ の積分を求めよ．（A が面積確定であることは認めてよい．）

問 3

関数 $(\tan x)^\alpha$ が区間 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上で広義積分可能であるような $\alpha\in\mathbb{R}$ の範囲を求めよ．

問 4

関数

$$f(x,y)\coloneqq\log\left(1+\sqrt{x^3+y}\right)-x-y,\qquad x,y\ge 0$$

について以下の問に答えよ．

(1) 平面内の集合

$$D\coloneqq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x\le y\le 3\}$$

を考える．集合 D 上で $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)<0$ であることを示せ．

(2) (1) の集合 D について，D 上で $f(x,y)$ のとる最大値を求めよ．

解答・解説

黒字：解答

赤字：解説

問 1

区間 $[0,1]$ 上の関数列 $f_n(x)=\frac{x^n}{1+e^{-nx}}, n=1,2,3,\ldots$ が $[0,1]$ 上で一様収束するか否かを理由を付して答えよ.

分子にある x^n は一様収束しない関数として有名です。それを知らなくても、各点収束先の関数に怪しげな不連続点があるので、そこを中心に見ていきましょう。

$n\to\infty$ のときの $f_n(x)$ の極限値を $f(x)$ とすると、

$$f(x)=\begin{cases}0 & (0\leq x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

となる。このとき、任意の n に対して $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ とすれば

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{\frac{1}{2}}{1+e^{-nx}}>\frac{1}{4}$$

より

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{4}$$

となる。したがって、$f_n(x)$ は $[0,1]$ 上で一様収束しない。　（終）

一般的な傾向として、関数の連続性や一様収束可能性について調べる問題は答えが not になることが多いと思います。特に関数が少し複雑な形をしている場合は十中八九そうです。まあ、そのほうが解く側にとっても簡単な上、採点する側もやりやすいからというのが理由だと思います。

問 2
平面内の集合

$$A \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2 \leq x^2 - y^2, \qquad x, y \geq 0\}$$

上の関数 $f(x,y) = xy$ の積分を求めよ．（A が面積確定であることは認めてよい.）

標準的な重積分の計算問題です。

境界を表す方程式の形から極座標変換が思いつくはずです。落ち着いて解いていきましょう。

$0 \leq (x^2+y^2)^2 \leq x^2 - y^2$ より $x \leq y$ であることに注意する。

これを忘れると致命傷です。あとで積分範囲に絡んできます。実際の試験では確認していなかった人が多く、試験終了後「あぁー！」と叫んでいる人が結構いました。なお、この時点でこれに気づかなくても、↓の段階で $r^2 \leq \cos 2\theta$ となることから気付くことができるはずです。

ここで極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を実行すると、

$$(x^2+y^2)^2 \leq x^2 - y^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 \leq \cos 2\theta$$

となるので、この変換で A に写る (r,θ) の集合を A' とすれば、これは

$$A' \coloneqq \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\theta}, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

と表される。したがって、題意の積分は

$$\begin{aligned}
\iint_A f(x,y)dxdy &= \iint_{A'} r^2 \sin\theta\cos\theta \cdot r dr d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^3 dr\right) \sin 2\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \sin 2\theta \, d\theta \\
&= -\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \, (\cos 2\theta)' d\theta \\
&= \frac{1}{48} \qquad \text{（終）}
\end{aligned}$$

問 3

関数 $(\tan x)^\alpha$ が区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上で広義積分可能であるような $\alpha \in \mathbb{R}$ の範囲を求めよ.

他の問題と比べると少々ややこしいかと思いますが、やるべきことが分かっていればやり方が多少強引でも解けてしまう問題です。

関数の極限に関する問題を解くときは、関数の局所的なふるまいに注意していればだいたい方針が立ちます。具体的に説明すると、本問で解析の対象となる $(\tan x)^\alpha$ は、区間の端以外の部分においては有限な値をとるので、区間の大部分で積分可能なはずです。よって注目しなければならないのは特異点（）まわりのふるまいだと分かります。

並の問題であれば、ここでただ直接 Talor 展開を実行すればいいのですが、tan の Talor 展開は普通覚えないのでひと手間加える必要があります。強引に解く場合、$\tan x = \sin x / \cos x$ の関係式から、α の正負で場合分けして分母のふるまいを調べればいけそうです。一応ここではもう少し丁寧に解いていきます。

tを用いて$t = \frac{\pi}{2} - x$と変換すると、題意の広義積分が可能なとき、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^\alpha \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left\{\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right\}^\alpha \cdot (-dt)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan t)^{-\alpha} \, dt$$

となるので、$\alpha \leq 0$ の場合を考えれば十分である。

三角関数の基本関係式を使った結果、かなり見通しが良くなりました。α の正負で場合分けする必要がなくなり、さらに $\sin x / \cos x$ を調べる代わりに $\cos x / \sin x$ だけを調べればよいことが分かります。

$\sin x\,/\cos x$ の特異点は $x=\frac{\pi}{2}$ なので、ここで Talor 展開しようとするとちょっと面倒です。一方 $\cos x/\sin x$ は特異点が $x=0$ なので Talor 展開しやすく便利です。よってここから先は $\alpha\leq 0$ の場合だけを調べることにします。

(i)　$-1<\alpha\leq 0$ のとき、区間 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上で

$$|(\tan x)^{\alpha}|=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{-\alpha}\leq\left(\frac{1}{x-\frac{1}{6}x^3}\right)^{-\alpha}\leq\left(\frac{1}{\frac{1}{3}x}\right)^{-\alpha}=3^{-\alpha}x^{\alpha}$$

が成り立つ。$-1<\alpha\leq 0$ であるから、上式の最右辺は区間 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上で広義積分可能である。よって $(\tan x)^{\alpha}$ は題意の広義積分が可能である。

(ii)　$\alpha\leq -1$ のとき、区間 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上で

$$(\tan x)^{\alpha}=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{-\alpha}\geq\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{-\alpha}$$

が成り立つ。ここで、$k\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ に対して

$$\int_k^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\alpha}\,dx\geq\int_k^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{-\alpha}dx>\int_k^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}\right)^{-\alpha}dx=\int_k^{\frac{\pi}{6}}2^{\alpha}x^{\alpha}dx$$

$$\longrightarrow\quad -\infty\quad(k\longrightarrow +0)$$

となるため、題意の広義積分は可能でない。
以上より、条件を満足する α の範囲は

$$-1<\alpha<1\qquad(終)$$

なんだかややこしい解答になってしまいましたが、方針は単純です。
まずは分母の sin が $x=0$ のまわりでどうふるまうかを調べます。$\sin x$ の $x=0$ のまわりの Talor 展開に関係する有名不等式

$$x-\frac{1}{6}x^3\leq\sin x\leq x$$

を見ると、$x=0$ のまわりで sin はほとんどxと同じようにふるまうことが分かります。(x^3←はxに比べると無視できるくらい小さいことに注意)

　したがって、$x=0$ のまわりでは

$$(\tan x)^{\alpha}=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{-\alpha}\sim\left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}$$

となるはずです。最右辺はよく知られているように $-\alpha<1$ のとき積分可能、$1\leq-\alpha$ のとき積分値が $x\to+0$ で発散するので積分可能でない関数となります。問題の $(\tan x)^{\alpha}$ も同じようにふるまうはずなので、これと同じように場合分けをしてやれば解けるはずです。

　実際に解答で関数の評価をするときは $\sin x$ を一次関数で挟んでやれば答えが示せます。

問 4

関数

$$f(x,y) \coloneqq \log\left(1+\sqrt{x^3+y}\right)-x-y, \qquad x,y \geq 0$$

について以下の問に答えよ.

(1)平面内の集合

$$D \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq y \leq 3\}$$

を考える. 集合 D 上で $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) < 0$ であることを示せ.

(2)(1)の集合 D について, D 上で $f(x,y)$ のとる最大値を求めよ.

一見すると関数がヤバそうな形をしていますが、あんまり厳密な不等式でもないので計算は楽です。たぶん高校生でも解けます。

(1)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+y}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x^3+y}} - 1$$

集合 D 上においては、

$$2\sqrt{x^3+y}\left(1+\sqrt{x^3+y}\right) < 1$$

が成り立つので

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+y}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x^3+y}} - 1 < 0$$

が成り立つ。

(2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3+y}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x^3+y}} - 1 \\ &= \frac{3x^2 - 2\sqrt{x^3+y}\left(1+\sqrt{x^3+y}\right)}{2\sqrt{x^3+y}\left(1+\sqrt{x^3+y}\right)} \\ &< \frac{3x^2 - 2(x^3+1)}{2\sqrt{x^3+y}\left(1+\sqrt{x^3+y}\right)} < 0\end{aligned}$$

以上から、集合 D 上において

$$f(x,y) \leq f(1,y) \leq f(1,1)$$

が成り立つ、したがって D 上で $f(x,y)$ のとる最大値は

$$f(1,1) = \log\left(1+\sqrt{2}\right) - 2 \qquad \text{（終）}$$