わたしのための基礎統計 ～My Uncompleted Statistics～

HelloRusk

2017/07/13

このプリントは 2017 年度月曜 5 限「基礎統計」(松浦峻) の授業内容をまとめたものです. 作った当初は理科一類 31 組内でのみ公開するつもりでしたが, 授業からもうすぐ 1 年経つということで気が変わってネットの海に放出することにしました.

各所に確認問題がありますが, 基本的には全て授業で配布されたスライドの内容から作られているので, このプリントには解答を掲載していません. すみません.

目次

0 Introduction

例えば, 日本の大学生が 1 日何時間スマートフォンを使うかを調べたいとしよう.

日本の大学生は 280 万人程度いるが, この全員の使用時間を調べるのは到底無理である. そこで, 5000 人にアンケートをとってデータを得られたとする. この得られたデータに対して平均をとったり, 標準偏差を求めたりするのが**記述統計**である.

しかしこれだけでは統計学者は満足しない. 統計学者は 280 万人のデータに近いものをできるだけ得たいと思うのである. そこで**確率モデル** (例えば正規分布) が導入される. 280 万人のデータが正規分布に近いとみなしてしまえば, あとはその正規分布の平均と分散を求めるだけでその分布が完全にわかってしまう. このようにして, 得られた 5000 人のデータから, 近似した正規分布の平均や分散を推定することで, 280 万人のデータの分布を推測する, というような分析が**統計的推測**である.

講義では, 記述統計→確率モデル→統計的推測の順に解説が行われている. 順に見ていこう.

1 母集団と標本

用語の確認なので簡単に見ていこう. ある調査を行う時, 調査対象の全体のことを**母集団**という. そのうち実際に調査されたものを**標本**といい, 母集団から標本を取り出すことを**標本抽出**という. Introduction の例でいえば, 日本の大学生全体が母集団であり, そのうちアンケートの回答者が標本である.

母集団は有限とは限らない. 例えば「ある物体の質量測定を 10 回行う」という調査の場合, 母集団はどうなるだろうか？ (同じ大学生に複数回アンケートをとらないとしたら,) 日本の大学生にアンケートを取る操作は有限だが, 物体の質量測定は無限にできる. したがって, 質量測定操作の母集団は「無数回の測定値全体」とみなせる. 有限の母集団、無限の母集団を文字通り**有限母集団、無限母集団**と呼ぶ.

2　1次元データの整理

2.1　データの可視化

度数分布表、**ヒストグラム**の二つが代表的である. お馴染みであると思うが, 一応確認しておこう. 度数分布表には以下のような作成マニュアルがある.

度数分布表の作成方法

1. 範囲 $R =$ 最大値 $-$ 最小値を計算する.
2. 階級の幅と数を決める. 階級の数は 10 前後, 7〜15 が目安である. 幅は R を階級の数で割った値に近いものにする.
   なお, 階級の数に関してはスタージェスの公式というものが存在する.
   $$\text{階級数} = \lceil 1 + \log_2 n \rceil \ (n = \text{データ数})\ ^a$$
3. 階級の幅をもとに, 各階級の最大値・最小値を定め, さらに階級の真ん中の値を階級値とする.
4. 階級内にそれぞれデータが何個あるかをカウントする. この階級ごとのデータの個数を度数という.
5. (必要に応じて) 以下の値も求める.

   累積度数: 下位の階級から順に加えた度数
   相対度数: $\dfrac{\text{度数}}{\text{全データ数}}$
   累積相対度数: $\dfrac{\text{累積度数}}{\text{全データ数}}$

[a] $\lceil\rceil$ は天井関数と呼ばれ, $\lceil x \rceil$ は x 以上の最小の整数を表す.

また, 度数分布表を棒グラフにしたものがヒストグラムである. ヒストグラムには累積度数の折れ線グラフを入れることもある.

確認 01　以下は通勤時間のデータである ($n = 118$, 単位: 分). これをもとに度数分布表とヒストグラムを作成せよ.

88, 97, 45, 14, 81, 52, 66, 2, 88, 66, 53, 11, 47, 120, 57, 98, 10, 40, 140, 21, 108, 98, 72, 20, 24, 36, 15, 70, 24, 101, 40, 49, 54, 40, 128, 109, 1, 96, 60, 60, 118, 21, 107, 70, 44, 7, 110, 54, 57, 87, 64, 19, 91, 15, 129, 76, 41, 95, 44, 51, 22, 88, 56, 16, 154, 75, 52, 41, 79, 45, 43, 50, 21, 25, 6, 102, 70, 83, 124, 38, 47, 67, 148, 27, 134, 135, 168, 33, 37, 119, 13, 17, 68, 18, 80, 2, 28, 89, 45, 99, 98, 59, 20, 124, 74, 78, 64, 119, 79, 57, 56, 51, 65, 50, 87, 37, 79, 102

2.2　データの中心の指標

平均値、**中央値**、**最頻値**の 3 種類がある．定義はさすがに省略．ただし, 中央値に関しては, データが偶数の場合は真ん中の 2 つの平均をとることにだけ注意.

ヒストグラムの形状と, 平均値, 中央値, 最頻値の大小関係について, 以下のような対応がある.

- 単峰で左右対称 $\Rightarrow$ 平均値 $=$ 中央値 $=$ 最頻値
- 単峰であるが右に歪んでいる $\Rightarrow$ 最頻値 $\leq$ 中央値 $\leq$ 平均値
- 単峰であるが左に歪んでいる $\Rightarrow$ 平均値 $\leq$ 中央値 $\leq$ 最頻値

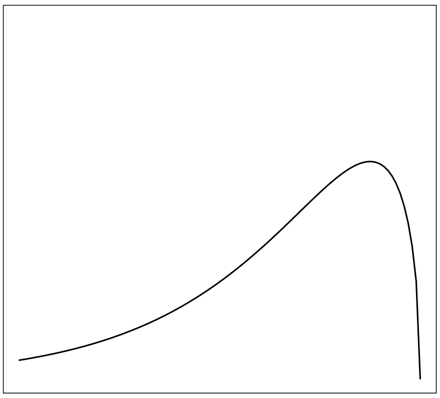


図 1　左に歪んだ分布

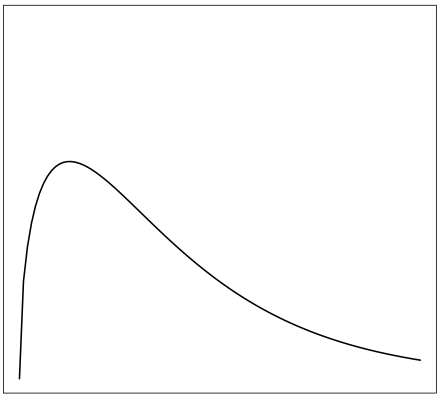


図 2　右に歪んだ分布

左と右が逆のように思われるかもしれないが, これで正しい．この平均値, 中央値, 最頻値の大小関係は別に暗記するほどのものではない (例えば右に歪んだ分布であれば 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6 の各値を調べてみれば良い).

以上から分かる通り, 中央値は分布が歪んでいても, データの中心の指標の役目をよく果たしている．このように, 外れ値の影響を受けにくく安定しているという中央値の性質を**中央値のロバスト性**という.

2.3　データのばらつきの指標

平均値のようなデータの中心の指標では, データのばらつきは表現できない. そこで**分散**、**標準偏差**、**変動係数**のようなばらつきの指標が用いられる.

分散, 標準偏差はお馴染みであろう.

分散 (標本分散)

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

標準偏差

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

一方, $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ を n ではなく $n-1$ で割ったものは, **不偏標本分散** (あるいは単に不偏分散) と呼ばれる. なぜこれに「不偏」という名がついているかは, 後で統計的推測の回において「不偏性」を学ぶことによって分かるだろう.

不偏標本分散

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

変動係数は分散, 標準偏差と比べて, 多少馴染みは薄いかもしれない.

変動係数 (Coefficient of Variation)

$$CV = \frac{\text{標準偏差}}{\text{平均値}} = \frac{S}{\overline{x}}$$

変動係数は標準偏差と違い, 平均値に対する相対的なばらつきを測ることができるので, 元の大きさが全然違う 2 つのデータであってもそのばらつきを比較できる. 例えば, 大学生の身長のばらつきと, ミジンコの体長のばらつきを比較できる.

確認 02　以下は大学までの通学時間のデータである (単位: 分). このデータの分散, 標準偏差, 変動係数を求めよ.

$10, 30, 45, 70, 75, 100$

2.4 計算の工夫

データが小数点を含むなど, 計算が大変な場合は, 以下の計算の工夫を試みるとよい.

もとのデータ $x_i(i=1,2,\ldots,n)$ に対して

$$u_i = ax_i + b$$

という変換を行なって得られたデータの平均 $\overline{u}$, 分散 S_u^2、標準偏差 S_u は, 元のデータの平均 $\overline{x}$, 分散 S^2、標準偏差 S に対して以下の関係にある.

$$\begin{aligned} \overline{u} &= a\overline{x} + b \\ S_u^2 &= a^2 S^2 \\ S_u &= |a|S \end{aligned}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

すなわち, **分散 $=$ ２乗の平均 $-$ 平均の２乗**.

確認 03　23.2, 24.1, 23.7, 24.2, 23.5 の平均値と分散を計算せよ.
(ヒント: $u_i = 10x_i - 230$ と変換してみよう)

2.5 基準化変量, 偏差値

各データから平均値を引き, 標準偏差で割ることをデータの**基準化**と呼ぶ.

基準化

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{S} = \frac{\text{各データ} - \text{平均値}}{\text{標準偏差}}$$

この基準化によって得られた z_i を**基準化変量**と呼ぶ.

基準化によって, データの平均値は 0 に, 標準偏差は 1 になる. この基準化という操作は後に正規分布を考える際にも多用されるのでよく覚えておこう.

基準化変量にあまり馴染みがないとしても, それに 10 をかけて 50 を足した値、すなわち**偏差値**は東大生ならお馴染みだろう.

偏差値

$$y_i = 10 \cdot \frac{x_i - \overline{x}}{S} + 50$$

偏差値に変換することによって, データの平均値は 50 に, 標準偏差は 10 になる.

確認 04 6 人の生徒が基礎統計の期末試験を受けたところ, それぞれ 72 点, 75 点, 77 点, 80 点, 83 点, 87 点 であった. 6 人の偏差値をそれぞれ求めよ.

2.6 その他【試験範囲外】

以下は授業で軽く扱われた内容なので参考程度に眺めれば良い.

幾何平均

$$\overline{x}_g = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

調和平均

$$\overline{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

(これは「逆数の平均」の逆数となっている)

平均偏差 (平均絶対偏差)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}$$

3　２次元データの整理

3.1　量的データの要約・可視化

量的データの関連性をグラフで表す場合は, **散布図**を用いる.

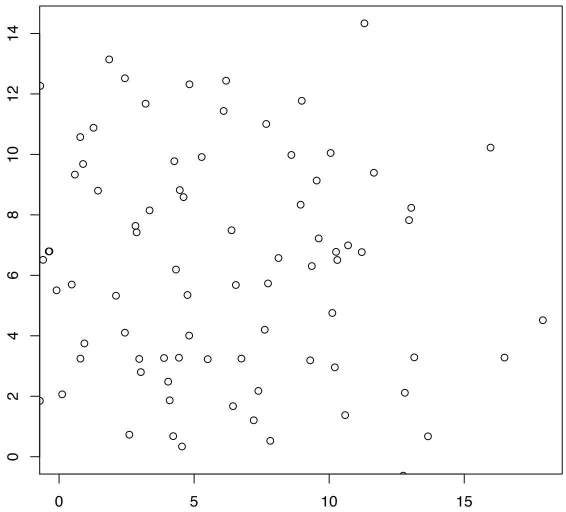


図 3　散布図

量的データの関連性を客観的な数値で表す場合は, **相関係数**を用いる.

共分散

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n}$$

相関係数

$$\begin{aligned} r_{xy} &= \frac{S_{xy}}{S_x S_y} \\ &= \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n}}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} \end{aligned}$$

(分散や共分散を求める必要がないのであれば, 一番下の求め方が n で割る手間が省けて楽ではある)

なお, 分散の場合と同様, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$ を n ではなく $n-1$ で割ったものは**不偏共分散**と呼ばれしばしば用いられる.

「正の相関」,「負の相関」,「相関なし」についての説明はさすがに省略. 不安ならセンター試験の数学でも解くと良いだろう.

なお, 相関係数の絶対値が 0.7 を超えるくらいにならないと, 散布図上で相関関係はあまり見えない. また, 相関関係だけで 2 変数の関連を判断すると危険な場合も多い (外れ値がある場合や 2 集団が混じっている場合など).

さらに, **相関関係** $\neq$ **因果関係**であることにも注意しよう. 例えば,「アイスクリームの売り上げ」と「プールでの事故の件数」に相関があったとしても, 因果関係であることはない (どちらも暑さと因果関係がある).

最後に, 計算の工夫を紹介してこの章を終えよう.

$$S_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n}-\overline{x}\cdot\overline{y}$$

すなわち, **共分散** $=$ **積の平均** $-$ **平均の積**.

確認 05　以下のデータ x と y について, 共分散と相関係数を計算せよ.

No.	1	2	3	4	5
x	2	4	6	8	10
y	1	2	5	3	4

確認 06　相関係数が以下の性質を満たすことを証明せよ.

$$-1\leq r_{xy}\leq 1$$

(注: この問題は『入門統計解析』P. 74 に解答があります)
(ヒント: $\sum_{i=1}^{n}(x_i+ty_i)^2\geq 0$ より, t の 2 次方程式 $\sum_{i=1}^{n}(x_i+ty_i)^2=0$ の判別式は...？)

3.2　質的データの要約・可視化

質的データの関連性を表で表す場合は, **分割表 (クロス集計表)** を用いる.

表 1　理科 IV 類, 文科 IV 類の学生の進振りへの支持・不支持の調査

	理科 IV 類	文科 IV 類	計
支持	96	44	140
不支持	24	36	60
計	120	80	200

所属学類と進振りへの支持・不支持に関連性があるかを調べるにはどうすればよいか？すなわち２つの変数が無関係（独立）かどうかを調べるにはどうすればよいか？という問題を考えよう.

以下の表 2 のように, 各セルの値が, それぞれの割合の掛け算で表されるとき, 2 つの質的変数は**独立**であると言う.

表 2　理科 IV 類, 文科 IV 類の学生の進振りへの支持・不支持の調査 (独立な場合のモデル)

	理科 IV 類	文科 IV 類	計
支持	84($200\times0.6\times0.7$)	56($200\times0.4\times0.7$)	140
不支持	36($200\times0.6\times0.3$)	24($200\times0.4\times0.3$)	60
計	120	80	200

先程の表 1 の値は表 2 の値から大分離れているので, 独立ではない. すなわち所属学類と進振りへの支持・不支持に関連性はあることが分かる.

質的データの関連性を客観的な数値で表す場合は, **オッズ比**や**連関係数**を用いる.

オッズ比、連関係数

オッズ比: $\psi = \dfrac{ad}{bc}$

連関係数: $Q = \dfrac{ad - bc}{ad + bc} = \dfrac{\psi - 1}{\psi + 1}$

	理科 IV 類	文科 IV 類	計
支持	a	b	$a+b$
不支持	c	d	$c+d$
計	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

オッズ比と連関係数について, 次のことが言える.

- 2 つの変数が無関係 (独立) のとき, $\psi = 1, Q = 0$
- 2 つの変数の関連性が強いとき, "$\psi \to 0, Q \to -1$" or "$\psi \to \infty, Q \to 1$"

(当たり前のことだが, ψ の挙動さえ覚えておけば, Q の挙動は $Q = \dfrac{\psi - 1}{\psi + 1}$ に代入するだけである.)

確認 07　先程の表 1 の数値例において, オッズ比と連関係数を求めよ.

3.3 回帰分析【試験範囲外】

ここまで２次元データの取り扱い方について見てきたが, いずれの分析においても, 2 つの変数は対等であるということが前提になっていた. しかしこの前提が不適切な場合も多々存在する. 例えば「父の身長」と「子の身長」は対等ではない. 前者は後者に影響を与えるが, 後者は前者に影響を与えることはないからである. このような場合,

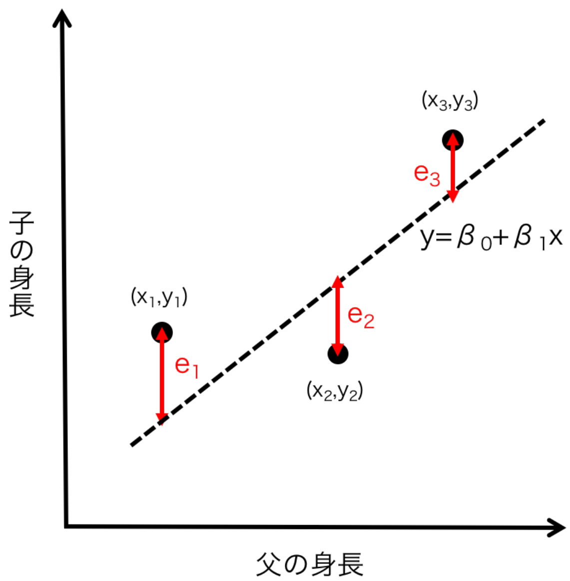
$$\text{子の身長} = f(\text{父の身長})$$

というような f を考える方が自然だ.

この f を近似的な一次関数として求めよう, というのが**回帰分析** (または単回帰分析や直線回帰) のやりたいことだ. 回帰分析において, 子の身長の方は**目的変数** (または従属変数 (dependent variable)、被説明関数) と呼ばれ, 父の身長の方は**説明関数** (または独立変数 (independent variable)) と呼ばれる. なお, (今回の基礎統計では扱われないが) 重回帰分析とは, ２つ以上の説明関数が登場する回帰分析のことである.

以下, 新しい概念が次々に登場するが, 落ち着いて見ていこう.

下図の通り, (父の身長, 子の身長) のデータに対して, 直線 $y = \beta_0 + \beta_1 x$ をあてはめることを考える.



全ての点が直線上に乗っていればハッピーだが, 実際にはそんなには上手くいかない. そこで**誤差項** e_i を導入する. このとき各 i に対して

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$$

が成立する. なお, β_0, β_1 のことを**回帰係数**という.

では直線がなるべくデータに沿うようにはどうすればよいだろうか？ $\sum_{i=1}^n e_i = 0$ となる場合だと直線は 1 つに定まらない. かといって, $\sum_{i=1}^n |e_i|$ が最小となる場合だと, 計算が面倒そうだ. ここは $\sum_{i=1}^n e_i^2$ が最小となる場合を考えるのが妥当だ. これを**最小２乗法**と呼ぶ.

最小２乗法

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

が最小となる β_0, β_1 を求めることを最小２乗法という. このとき求まった β_0, β_1 をそれぞれ $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ (これらは**最小２乗推定量**と呼ばれる) とすると, 直線 $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ のことを**回帰直線** (または単回帰式、推定回帰式) と言う.

方法論が分かったところで, 実際に $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ を求めてみよう. 要は $Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$ を β_0, β_1 の二変数関数とみたときの最小値を考えればよい.

例題として, $f(x, y) = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 4$ の最小値を考えよう. 見ただけで $(x, y) = (2, 3)$ だと分かるが, 偏微分の考え方を使うと

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-3)$$

となり, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ がともに 0 に等しくなるとき最小になる, としても求まる.

$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$ の最小値を求める場合は, 平方完成をするよりも, この偏微分の考え方を用いた方が楽である.

確認 08 $\dfrac{\partial Q}{\partial \beta_0} = 0$ と $\dfrac{\partial Q}{\partial \beta_1} = 0$ を整理することにより以下の連立方程式が得られることを確認せよ (この連立方程式を**正規方程式**と呼ぶ).

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 \overline{x} = \overline{y} \\ n\beta_0 \overline{x} + \beta_1 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

(注: この問題はプリントに解答がありません)

(ヒント: $\sum_{i=1}^n x_i = n\overline{x}, \sum_{i=1}^n y_i = n\overline{y}$ を積極的に使っていこう)

確認 09 確認 08 で得られた連立方程式を解き, 次のページの「最小２乗推定量の別表現」が成立することを確かめよ.

(注: この問題はプリントに解答がありません)

(ヒント: $n{S_x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2, nS_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\overline{x} \cdot \overline{y}$ を利用せよ.

これらはそれぞれ**分散** = **２乗の平均** − **平均の２乗**, **共分散** = **積の平均** − **平均の積**の両辺を n 倍したものである.)

最小 2 乗推定量の別表現

S_x, S_y: それぞれ x, y の標準偏差
S_{xy}: x と y の共分散
r_{xy}: x と y の相関係数

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{S_{xy}}{{S_x}^2} = \frac{S_y}{S_x} \cdot r_{xy}$$
$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x}$$

S_x, S_y は (データの値が全て平均と等しい場合を除き) 正なので, **相関係数と回帰直線の傾き $\hat{\beta}_1$ の符号は一致する**ことが分かる.

確認 10 あるチェーン店の支店の「半径 3km 以内人口 (単位: 千人)」を説明変数 x,「売上高 (単位: 10 万円)」を目的変数 y とする. 15 支店のデータは以下の通りである. このデータの回帰直線の方程式を求めよ.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	18	12	14	19	20	25	17	11	24	20	23	13	24	14	15
y_i	882	683	731	834	910	1082	675	633	1006	821	972	690	1028	665	762

ひとたび回帰直線 $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ が得られれば, 特定の x の値に対して y の値が予測できるようになる. ここから新たな概念が登場する.

残差, 残差変動

x_i に対して y_i の予測値 $\hat{y}_i$ が
$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$
により求まる. 実際の値 y_i と予測値 $\hat{y}_i$ のズレ
$$\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i$$
を**残差**と呼ぶ. また残差の 2 乗和
$$S_e = \sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i^2$$
を**残差変動** (残差平方和、残差 2 乗和) と呼ぶ.

残差変動が小さいほど, 回帰直線がデータによく当てはまっていると言える.

確認 11　残差が持つ次の性質を証明せよ.

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i = 0, \sum_{i=1}^{n} x_i \hat{e}_i = 0$$

(注: この問題はプリントに解答がありません)

(ヒント: $\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$ を証明すべき式に代入する. また, $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ が確認 08 の正規方程式の解であることに注意する)

残差変動 S_e, 全変動 S_T, 回帰変動 S_R の関係

データ y の偏差平方和

$$S_T = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$$

を**全変動** (総平方和) と呼ぶ. また, 予測値 $\hat{y}_i$ と平均値 $\overline{y}$ の差の 2 乗和

$$S_R = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{y})^2$$

を**回帰変動** (回帰による平方和) と呼ぶ.
このとき

$$S_T = S_R + S_e$$

が成立する. すなわち**全変動** = **回帰変動** + **残差変動**.

確認 12　$S_T = S_R + S_e$ を証明せよ.

(注: この問題は『入門統計解析』P. 86 に解答があります)

(ヒント: まず, $y_i - \overline{y}, \hat{y}_i - \overline{y}, \hat{e}_i (= y_i - \hat{y}_i)$ の間で恒等式を立て, その式をいじくろう. 確認 11 も伏線である)

全変動 = 回帰変動 + 残差変動という式が得られたところで, 回帰直線がデータによく当てはまっている, とはどういうことか考え直してみよう. 前に述べたように, 残差変動が小さいほど, 回帰直線がデータによく当てはまっていると言える. これを言い換えると, 全変動と回帰変動の値が近いほど, 回帰直線がデータによく当てはまっていると言える. これを利用して, 回帰直線の当てはまり具合を表す**決定係数** (または寄与率) を定める.

決定係数 R^2

$$R^2 = 1 - \frac{S_e}{S_T} = \frac{S_R}{S_T}$$

データが一つの直線上に完全に乗るとき, 決定係数は 1 になる (このとき残差変動は 0). 一方で, 回帰直線の傾き $\hat{\beta}_1$ が 0 のとき, 決定係数は 0 になる.

決定係数 R^2 の別表現

$$R^2 = r_{xy}^2$$

すなわち, **決定係数は相関係数の２乗である**.

確認 13　決定係数は相関係数の 2 乗であることを証明せよ.
(注: この問題は『入門統計解析』P. 87 に解答があります)
(ヒント: R^2 をシグマを使った定義式に直す. そのあと, $\hat{y}_i - \overline{y} = \hat{\beta}_1(x_i - \overline{x})$ や $\hat{\beta}_1 = \dfrac{S_{xy}}{{S_x}^2}$ を用いる)

確認 14　確認 10 のデータについて, 決定係数を求めよ. 余裕があれば, 相関係数も求めてみて, 決定係数は相関係数の 2 乗であることを確認せよ.

以上で記述統計の内容は終了である. 回帰分析は記述統計の山場なのでなかなか大変だった. 次章から確率モデルの解説が始まる.

4　１次元の確率モデル

Introduction でも述べたように, 与えられたデータ自体を要約・可視化する記述統計だけでは, データの背後に潜む母集団の性質を推測する統計的推測に入れない. そこで記述統計から統計的推測への架け橋として, **確率モデル**が登場する.

この章でなんといっても大事なのは正規分布である. 正規分布に入るまでは前座のようなつもりで流していくのがよい.

最初に用語の確認から.

確率変数: どのような値をどのような基準でとるかが一定の法則により定まっている変数

確率分布: 確率変数のとる値の法則

4.1　離散型確率変数

まず, サイコロの目のように, 飛び飛びの値をとる離散的な場合で考えよう.

2 つのサイコロの出る目の和を X とおいてみる. X は「どのような値をどのような基準でとるかが一定の法則により定まっている変数」, すなわち確率変数である (特に, **離散型確率変数**である).

X のとる値の法則, すなわち確率分布 (この場合特に**離散分布** (離散型確率分布)) は以下の通りである.

出る目の和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

これはこれで分かりやすいが, もう少し数学的に表現しよう. 確率変数 X が値 x をとるときの確率を $P(X = x)$ と表記してみると, 上の表は

$$P(X = x) = \frac{6 - |x - 7|}{36} \quad (x = 2, \ldots, 12)$$

とわずか式一本で表現できる. この $P(X = x)$ は, 取る値 x の関数なので, $p(x)$ と置き直すことができ

$$p(x) = \frac{6 - |x - 7|}{36} \quad (x = 2, \ldots, 12)$$

この $p(x)$ を確率変数 X の**確率関数**と呼ぶ.

以上の議論で言えることは, **離散分布は確率関数によって記述される**ということだ.

確率関数 $p(x)$ の満たす性質

(x が $0, 1, \dots, m$ をとるとき)

$$p(x) \geq 0$$

$$\sum_{x=0}^{m} p(x) = 1$$

確認 15　あるコインを投げたとき, 表が出る確率は p であり, 表が出るまでコインを何回も投げるとする. このとき, 表が出るまでにコインを投げる回数を X とおくと, この確率変数 X の確率関数を求めよ.

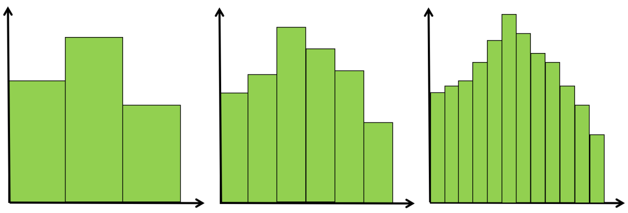
また, $p = 0.6$ のときの確率変数 X の確率関数, および $P(X \geq 3)$ の値を求めよ.

4.2　連続型確率変数

確率変数が全て飛び飛びの値だとしたら困る. 身長や体重, 気温, 角度など, 連続的な値を取ってほしい変数が山ほどあるからだ.

そこで, **連続型確率変数**を導入する. また連続型確率変数の確率分布を**連続分布** (連続型確率分布) と呼ぶ.

さて, 連続分布をどのように記述すればよいだろうか？離散分布と同様に確率関数を持ち出したいところだが, 重大な問題がある. **連続型確率変数の場合, ある一点を取る確率は定義できない**のである. このことは下図を見て納得していただきたい. 離散的なヒストグラムをだんだん連続にしていくにつれ, 幅が無限小になり, その面積である確率も無限小になってしまう.



そこで, 連続分布では確率関数の代わりに**確率密度関数** (あるいは単に密度関数) と呼ばれる関数 $f(x)$ を導入する. 先に述べたように連続型確率変数では一点を取る確率を定義できず, 区間を指定して初めて計算できる. この区間において $f(x)$ を積分することで確率を定義しようというのが連続型確率変数の流儀である.

確率密度関数

連続型確率変数 X の値が a と b の間になる確率 $P(a < X < b)$ は, 確率密度関数 $f(x)$ を使って

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

と表される.

確率密度関数 $f(x)$ の満たす性質

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

確認 16　ルーレットを回したとき, 止まった針が指している方向とある基準の方向との (右回りの) なす角度を X とおく. このとき X は $0 \leq x < 360$ の範囲の値をとる連続型確率変数であり, 十分に強く針を回したとすると, X が $[0, 360)$ でとる値の確率は一定であるとみなせる.
このとき X の確率密度関数 $f(x)$ を求めよ. また $P(210 < X < 270)$ を計算せよ.
(なお, このような確率密度関数を持つ確率分布を**一様分布**と呼ぶ.)

4.3　累積分布関数

度数分布表の作成方法の章で累積度数という概念が登場したが, この**累積分布関数** (あるいは単に分布関数) も同じようなものである.

累積分布関数

確率変数 X がある値 x 以下をとる確率を表す関数を累積分布関数と呼ぶ.
すなわち, 累積分布関数を $F(x)$ とおくと

$$F(x) = P(X \leq x)$$

累積分布関数と確率関数, 及び確率密度関数との関係

離散型の場合, 累積分布関数 $F(x)$ と確率関数 $p(x)$ との関係は

$$F(x) = \sum_{t=0}^{x} p(t), \quad p(x) = F(x) - F(x-1)$$

連続型の場合, 累積分布関数 $F(x)$ と確率密度関数 $f(x)$ との関係は

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

確認 17　確認 16 の場合において, 累積分布関数 $F(x)$ を計算せよ.

4.4 確率変数の期待値, 分散, 標準偏差

では, 記述統計で登場した様々な指標は, 確率モデルの場合ではどうなるかを見てみよう. 再びサイコロの目の和の場合で考える.

出る目の和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

まず, 確率変数 X の平均値を考えよう. 記述統計流の考え方では,

2 つのサイコロを 36 回振ったときの目の和が
$$2,3,3,4,4,4,5,5,5,5,6,6,6,6,6,7,7,7,7,7,7,8,8,8,8,8,9,9,9,9,10,10,10,11,11,12$$
となる

ことになるので平均値は

$$\frac{2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 4+6\cdot 5+7\cdot 6+8\cdot 5+9\cdot 4+10\cdot 3+11\cdot 2+12\cdot 1+}{36}$$
$$=7$$

である. これを, 確率を利用して求めるのが**期待値**である.

期待値 (離散型の場合)

確率変数 X の期待値 (μ とも $E[X]$ とも表される) は

$$\mu = E[X] = \sum_{x=0}^{m} xp(x)$$

また, 確率変数 X をある関数 g によって変換した $g(X)$ の期待値は

$$E[g(X)] = \sum_{x=0}^{m} g(x)p(x)$$

サイコロの目の和の場合は

$$2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}$$
$$=7$$

というような要領で期待値が求まる.

連続型確率変数の場合も, ただ $\sum$ を $\int$ に変えるだけなので楽勝.

期待値 (連続型の場合)

確率変数 X の期待値は

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

また, 確率変数 X をある関数 g によって変換した $g(X)$ の期待値は

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

これまでやってきた「平均をとる」という操作は, これからは「期待値を求める」という操作に置き換わることに注意しよう.

では, 分散と標準偏差はどう変わるだろうか. そもそも分散とは $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$ と表される通り,「各値から平均値を引いて２乗した値」の平均であった. また, **分散** $=$ **２乗の平均** $-$ **平均の２乗**という公式もあった.

これらにおいて「平均をとる」という操作を「期待値を求める」という操作に置き換えると, 以下のようになる.

分散, 標準偏差 (離散型の場合)

確率変数 X の分散 (σ^2とも $V[X]$ とも表される) は

$$\begin{aligned}\sigma^2 = V[X] = E[(X-\mu)^2] &= \sum_{x=0}^{m}(x-\mu)^2 p(x) \\ = E[X^2] - \mu^2 &= \sum_{x=0}^{m} x^2 p(x) - \mu^2\end{aligned}$$

また, 標準偏差は

$$\sigma = \sqrt{V[X]}$$

分散, 標準偏差 (連続型の場合)

確率変数 X の分散は

$$\begin{aligned}\sigma^2 = V[X] = E[(X-\mu)^2] &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx \\ = E[X^2] - \mu^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2\end{aligned}$$

また, 標準偏差は

$$\sigma = \sqrt{V[X]}$$

確認 18　2 つのサイコロの出る目の和の確率変数について, その分散と標準偏差を求めよ.

確認 19　$[0, 1)$ 上の一様分布に従う確率変数 X の期待値, 分散, 標準偏差を求めよ.
ただし, X の確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

と表される.

4.5 計算の工夫

記述統計においては, 以下のような計算の工夫があった.

もとのデータ $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ に対して

$$u_i = ax_i + b$$

という変換を行なって得られたデータの平均 $\overline{u}$, 分散 S_u^2、標準偏差 S_u は, 元のデータの平均 $\overline{x}$, 分散 S^2、標準偏差 S に対して以下の関係にある.

$$\begin{aligned} \overline{u} &= a\overline{x} + b \\ S_u^2 &= a^2 S^2 \\ S_u &= |a| S \end{aligned}$$

確率モデルにおいても, 同様の関係がある.

もとの確率変数 X に対して

$$Y = aX + b$$

という変換を行なって得られたデータの期待値 $E[Y]$, 分散 $V[Y]$、標準偏差 $\sqrt{V[Y]}$ は, 元のデータの期待値 $E[X]$, 分散 $V[X]$、標準偏差 $\sqrt{V[X]}$ に対して以下の関係にある.

$$\begin{aligned} E[Y] &= aE[X] + b \\ V[Y] &= a^2 V[X] \\ \sqrt{V[Y]} &= |a| \sqrt{V[X]} \end{aligned}$$

<u>**確認 20**</u>　$E[Y] = aE[X] + b$ (この関係を**期待値の線型性**という) が離散型でも連続型でも成立することを確認せよ.

<u>**確認 21**</u>　$V[Y] = a^2 V[X]$ が離散型でも連続型でも成立することを確認せよ.

<u>**確認 22**</u>　期待値の線型性を用いて, $E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \mu^2$ を証明せよ.

<u>**確認 23**</u>　ある商品を販売しているとする. 1 日の売上個数 X の平均は 300 部, 標準偏差は 50 部である. 1 個あたりの利益は 100 円であり, 毎日かかる固定費が 20000 円であるとする.
このとき, 1 日あたりの利益額 Y の期待値, 分散, 標準偏差を求めよ.

4.6　確率変数の基準化変量

記述統計では基準化という操作があった.

基準化 (復習)

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{S} = \frac{\text{各データ} - \text{平均値}}{\text{標準偏差}}$$

確率モデルでも, 平均を期待値に置き換えれば全く同じ.

確率変数の基準化

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

<u>**確認 24**</u>　前章の「計算の工夫」を用いて, 以下を証明せよ.

$$E[Z] = 0, V[Z] = 1$$

4.7 離散分布の代表例

ここからいくつかの具体例を見ていくことにするが, 説明に入る前に 1 つだけ用語を紹介しよう.

ベルヌーイ試行

- 各回の結果が２通りしかない
- 各回が独立である

ような試行を**ベルヌーイ試行**という.
例えばコイン投げは

- 表が出るか裏が出るかしかない
- どちらの面がでるかは毎回変わり, 前回の結果の影響を受けたりはしない

ので, ベルヌーイ試行の一つである. また, ベルヌーイ試行を n 回繰り返すことを, **n 回のベルヌーイ試行列**という.

以後は,「ベルヌーイ試行」という言葉が出てきたらコイン投げのイメージを持って欲しい.
それでは, **２項分布**、**幾何分布**、**ポアソン分布**を順に紹介していこう.

まず２項分布から. 最初は具体例で考えよう (ベルヌーイ試行という言葉にも慣れるために).

成功確率が 0.7 の, 3 回のベルヌーイ試行列について, 成功回数 X の確率分布はどうなるか？

これは, 面が出る確率が 0.7 のコインを 3 回投げた時の, 表が出る回数とその確率の対応関係を調べろという高校数学の問題と全く同じだ. 答えは

x	0	1	2	3
$p(x)$	${}_3\mathrm{C}_0 \cdot 0.7^0 \cdot 0.3^3$	${}_3\mathrm{C}_1 \cdot 0.7^1 \cdot 0.3^2$	${}_3\mathrm{C}_2 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^1$	${}_3\mathrm{C}_3 \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^0$

さて, これらの事柄を一般化すると以下の通りである.

２項分布 (Binomial distribution)

確率変数 X が次の確率分布を持つとき, X **は２項分布** $B(n,p)$ **に従う**と言い, **「$X \sim B(n,p)$」**と書く.

$$p(x) = {}_n\mathrm{C}_x p^x (1-p)^{n-x} \quad (x = 0, 1, \ldots, n)$$

これは, 成功確率 p の, n 回のベルヌーイ試行列における, 成功回数 X の確率分布でもある.

$X \sim B(n,p)$ という表記方法は何気に重要である. **例えば $X \sim B(5, 0.4)$ と書かれていたら, 「成功確率 0.4 のベルヌーイ試行を 5 回繰り返しているんだ」とすぐに分からねばならない.**

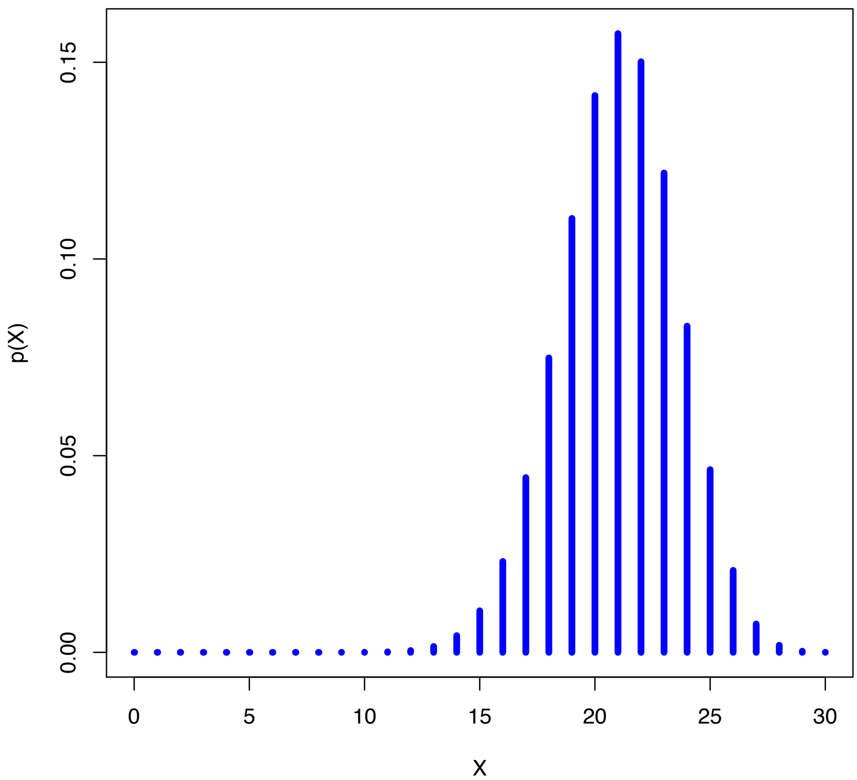


図 4　$B(30, 0.7)$ の分布

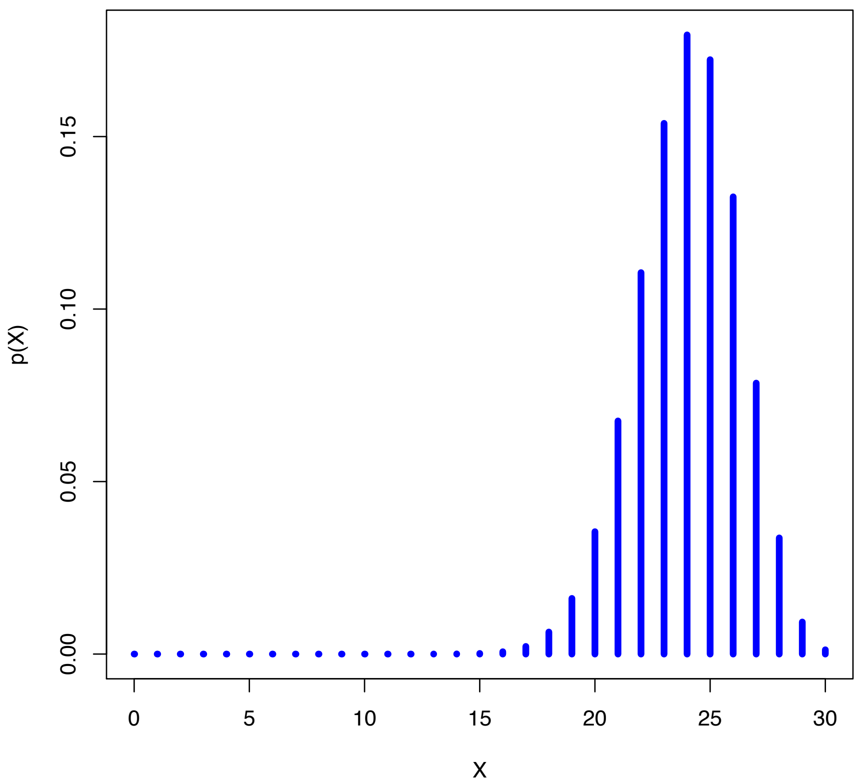


図 5　$B(30, 0.8)$ の分布

確認 25　２項分布において $p(x-1) \leq p(x)$ となる条件を x の不等式として求めよ. また, その条件が前ページのグラフにおいても成り立っていることを確認せよ.

２項分布はコイン投げのためだけに存在しているわけではない.

例えば内閣支持率調査の場合でも２項分布があてはまる. n 人に調査を行うとし, n 人の中で内閣を支持する人の数を X とする. また日本人有権者全体を無限母集団とみなすと, この調査は n 回のベルヌーイ試行列であり, p を日本人有権者全体での内閣支持率とすれば, X は２項分布 $B(n,p)$ に従う.

このように, ２項分布はイエスかノーかの調査なら何でも使えるので応用範囲は広いのである.

さて, 最後に期待値, 分散, 標準偏差を確認して２項分布の説明を終えよう.

２項分布の期待値, 分散, 標準偏差

$$\mu = E[X] = np$$
$$\sigma^2 = V[X] = np(1-p)$$
$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

$E[X] = np$ より, 例えば打率３割の打者が 100 回打席に立った場合, ヒット数の平均は 30 回である. また $V[X] = np(1-p)$ が最大になるのは, すなわち値の散らばりが一番大きいのは $p = \dfrac{1}{2}$ の時だが, これは表と裏が半々の確率で出るコインが一番, 表の出る回数を予想しにくい, ということを意味している.

確認 26　上記３式を証明せよ.

(注: この問題はプリントに解答がありますが, 『入門統計解析』P. 134 の方が分かりやすいかもしれません)

幾何分布はいきなり定義から入ろう.

幾何分布 (Geometric distribution)

確率変数 X が次の確率分布を持つとき, X **は幾何分布** $Ge(p)$ **に従う**と言い, **「$X \sim Ge(p)$」**と書く.

$$p(x) = p(1-p)^{x-1}$$

これは, 成功確率 p のベルヌーイ試行列における, 初めて成功する回 X の確率分布でもある.

分かりやすく言ってしまえば, コイン投げで初めて表が出るまで何回コインを投げるか, の分布である. 等比数列は幾何数列とも呼ばれるため, 「幾何分布」という名がついている.

幾何分布の期待値, 分散, 標準偏差

$$\mu = E[X] = \frac{1}{p}$$
$$\sigma^2 = V[X] = \frac{1-p}{p^2}$$
$$\sigma = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$$

$E[X] = \dfrac{1}{p}$ より, 例えばサイコロで初めて 1 の目がでるまでに要する試行回数の平均は, $\dfrac{1}{\frac{1}{6}} = 6$ と計算される.

確認 27　上記 3 式を証明せよ.

幾何分布は, **無記憶性**という特徴的な性質を持っている.

幾何分布の無記憶性

(例えばコイン投げの場合) 既に t 回連続で裏が出た後, その時点から表が出るまでの回数 X の確率分布は, 任意の t に対して変わらない.

これによって, 例えば 1 の目が 5000 兆回連続で出なかったとしても, その次の回からの 1 の目の出やすさが減ったりすることはない, と分かる.

確認 28　幾何分布の無記憶性を数式で証明せよ.
(ヒント: $\dfrac{t+x\text{ 回目に初めて表が出る確率}}{t\text{ 回連続で裏が出る確率}}$ が t に依存しない値になっていることを確認する)

最後はポアソン分布だ.

ポアソン分布 (Poisson distribution)

確率変数 X が次の確率分布を持つとき, X **はポアソン分布** $Po(\lambda)$ **に従う**と言い,「$X \sim Po(\lambda)$」と書く.

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \quad (x = 0, 1, \ldots, n; \lambda > 0)$$

ポアソン分布は**「稀に起こる現象の一定時間あたりの生起回数」**を表す (ただし λ が生起回数の平均). 例えば, 一定時間内の事故件数, 機械の故障回数, 電話の呼び出し回数, さらに放射性物質から放射される粒子の数, 一定数の細胞が入ったシャーレの中で突然変異を示すものの数, などにあてはまる.

確認 29　ポアソン分布においても $\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$ が成り立っていることを確認せよ.
(ヒント: Taylor 展開)

確認 30　$X \sim Po(1)$ のとき, $P(X \geq 3)$ の値を求めよ (ただし $e = 2.71828\ldots$).

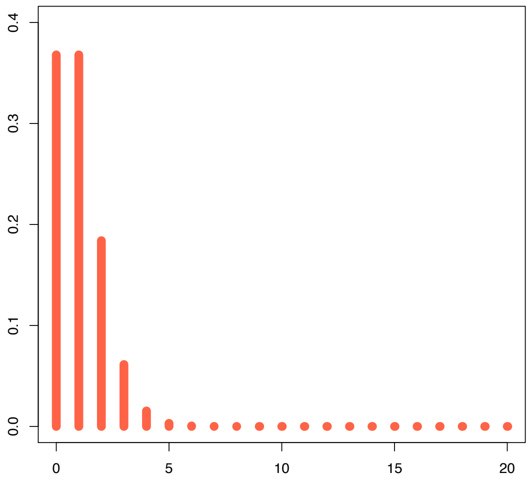


図 6　$Po(1)$ の分布

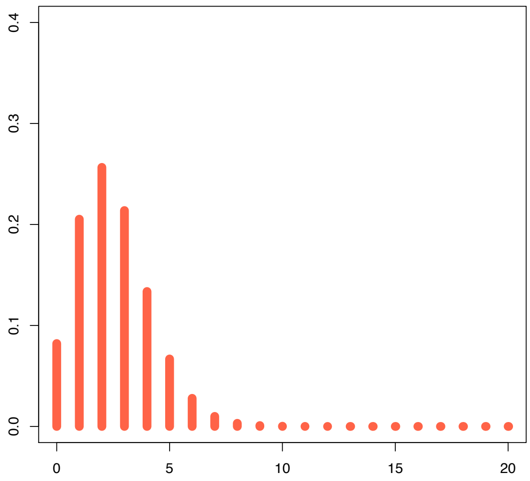


図 7　$Po(2.5)$ の分布

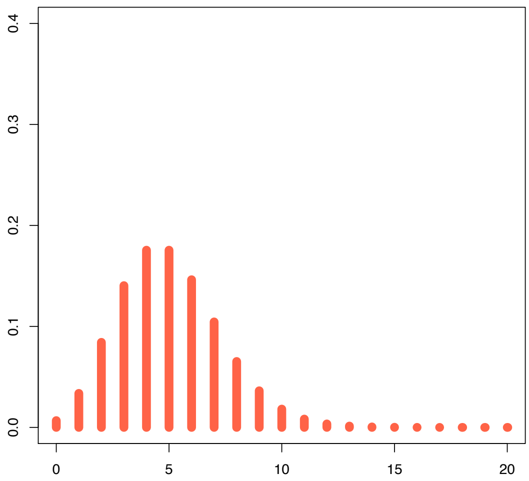


図 8　$Po(5)$ の分布

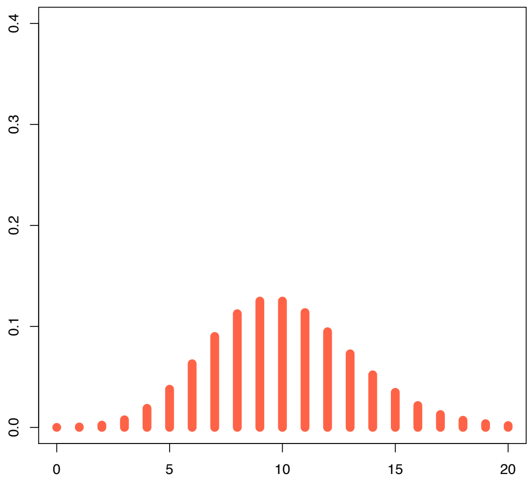


図 9　$Po(10)$ の分布

ポアソン分布の期待値, 分散, 標準偏差

$$\mu = E[X] = \lambda$$
$$\sigma^2 = V[X] = \lambda$$
$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

※ポアソン分布は, **期待値と分散が等しい**という特徴がある.

確認 31　上記３式を証明せよ.

ポアソン分布は前者の２つの分布と違って e やら $x!$ やら出てきて浮いているように見えるが, 実は２項分布と深い関係がある.

先ほど, ポアソン分布は「稀に起こる現象の一定時間あたりの生起回数を表す」と述べた. 「稀」を数学的表現で述べると, 試行回数 n が大きいのに, 起こる確率 p が小さいことだと言える. ならば、二項分布で n が大きく, p が小さいとき, ポアソン分布に近づくのではないか？という推測が立てられる.

事実, 以下が成り立つ.

２項分布とポアソン分布の関係

$np = \lambda$ **を一定に保ちながら** $n \to \infty$(したがって $p \to 0$) とするとき,

$$ {}_n\mathrm{C}_x p^x (1-p)^{n-x} \to \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

確認 32　上記を証明せよ.

(ヒント: ${}_n\mathrm{C}_x p^x (1-p)^{n-x}$ に $p = \dfrac{\lambda}{n}$ を代入して $n \to \infty$ の極限をとる.)

確認 33　当選率 0.002 の宝くじに 1000 回挑戦したとき, 当選回数が 2 回以下である確率を求めよ (ただし $e^{-2} = 0.135335283\ldots$).

(ヒント: まともに２項分布 $B(1000, 0.002)$ で考えようとすると,

$$p(x) = {}_{1000}\mathrm{C}_x \cdot 0.002^x \cdot 0.998^{1000-x}$$

に対して $p(0)+p(1)+p(2)$ を求めねばならず計算地獄である. そこで, 上の「２項分布とポアソン分布の関係」を用いて, $B(1000, 0.002)$ を $Po(2)$ で近似しよう. e^{-2} の値さえ知っていれば, 計算ははるかに楽になるはずだ)

離散分布のまとめ

離散分布	確率関数 $p(x)$	期待値 μ	分散 σ^2
2項分布 $B(n,p)$	${}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$
幾何分布 $Ge(p)$	$p(1-p)^{x-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
ポアソン分布 $Po(\lambda)$	$\dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$	λ	λ

4.8　連続分布の代表例

一様分布, **指数分布**, **正規分布**の順に説明する.

まずは一様分布だが, 名前通り, ある区間において確率が一様である分布である. それ以上特に説明することはない.

一様分布 (Uniform distribution)

確率変数 X が次の確率分布を持つとき, X **は一様分布** $U(a,b)$ **に従う**と言い, **「**$X \sim U(a,b)$**」**と書く.

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad (a < x < b)$$

一様分布の期待値, 分散, 標準偏差

$$\mu = E[X] = \frac{a+b}{2}$$
$$\sigma^2 = V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$
$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

確認 34　上記 3 式を証明せよ.

次に紹介する指数分布は幾何分布の連続バージョンと考えればよい. つまり, 指数分布は, 一定の確率で発生する事象が最初に発生するまでの「時間」を表す (離散型では「回数」だったのが連続型では「時間」になる)

指数分布 (Exponential distribution)

確率変数 X が次の確率分布を持つとき, X **は指数分布** $Ex(\lambda)$ **に従う**と言い, **「**$X \sim Ex(\lambda)$**」**と書く.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0)$$

指数分布も, 幾何分布と同様に無記憶性をもつ.

指数分布の無記憶性

ある時刻 t までに事象が発生しないという条件が, その後事象が発生するまでの時間の確率分布に影響しない.

確認 35　指数分布の累積分布関数 $F(x)$ を求めよ.

確認 36　指数分布の無記憶性を証明せよ.

(ヒント: 幾何分布の無記憶性と同様に証明すれば良いのだが, ある時刻 x まで事象が発生しない確率が累積分布関数 $F(x)$ を用いて $1-F(x)$ と表されることに注意しよう. 例えば $f(x)$ が時刻 x に死亡する確率だとしたら, ある時刻 x まで死亡しない確率は $1-F(x)$ となる.)

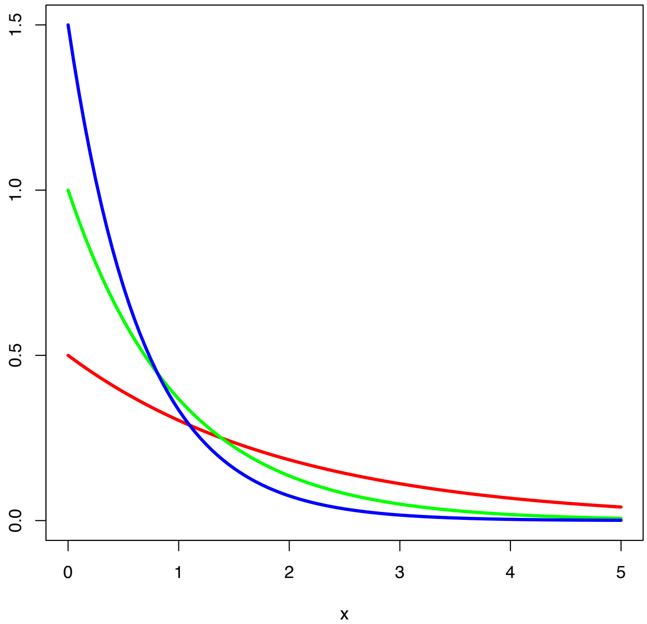


図 10　赤:$Ex(0.5)$, 緑:$Ex(1.0)$, 青:$Ex(1.5)$ の確率密度関数

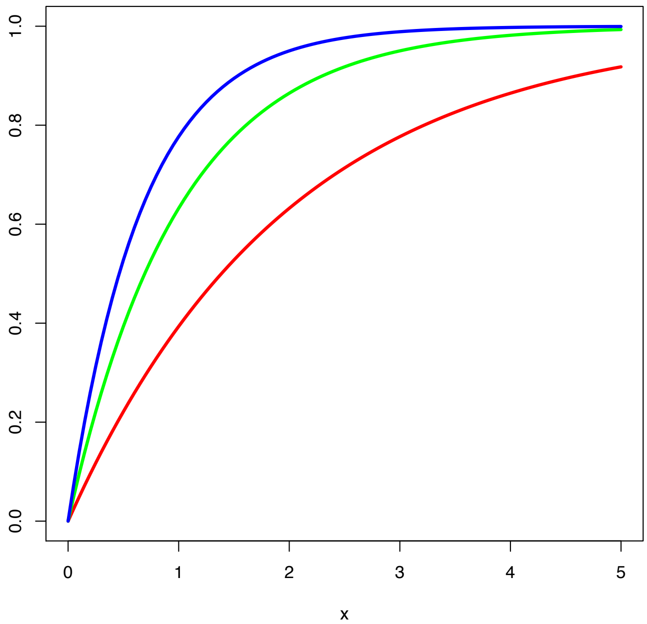


図 11　赤:$Ex(0.5)$, 緑:$Ex(1.0)$, 青:$Ex(1.5)$ の累積分布関数

指数分布の期待値, 分散, 標準偏差

$$\mu = E[X] = \frac{1}{\lambda}$$
$$\sigma^2 = V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$
$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

確認 37　上記 3 式を証明せよ.

さて, やっと正規分布に入ることができた. 繰り返しになるが, 正規分布がこの確率モデルの章で最も重要である.

正規分布 (Normal distribution)

確率変数 X が次の確率分布を持つとき, X **は正規分布** $N(\mu, \sigma^2)$ **に従う**と言い,「$X \sim N(\mu, \sigma^2)$」と書く.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

このとき期待値は μ**, 分散は** σ^2**, 標準偏差は** σ **である**.

確認 38(マニア向け)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ が正規分布においても成り立っていることを確認せよ.

確認 39　正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の期待値は μ, 分散は σ^2, 標準偏差は σ であることを証明せよ.
(ヒント: 確認 38 の事実も使う.)

正規分布の特徴を見てみよう．期待値 μ の変化に対しては, 分布の形状はそのままで, 期待値の分だけ左右に平行移動する．

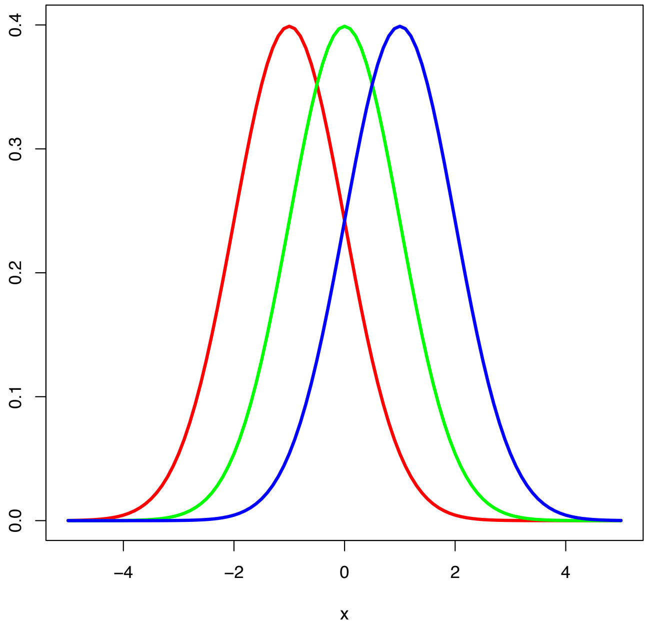


図 12　赤:$N(-1,1^2)$, 緑:$N(0,1^2)$, 青:$N(1,1^2)$ の確率密度関数

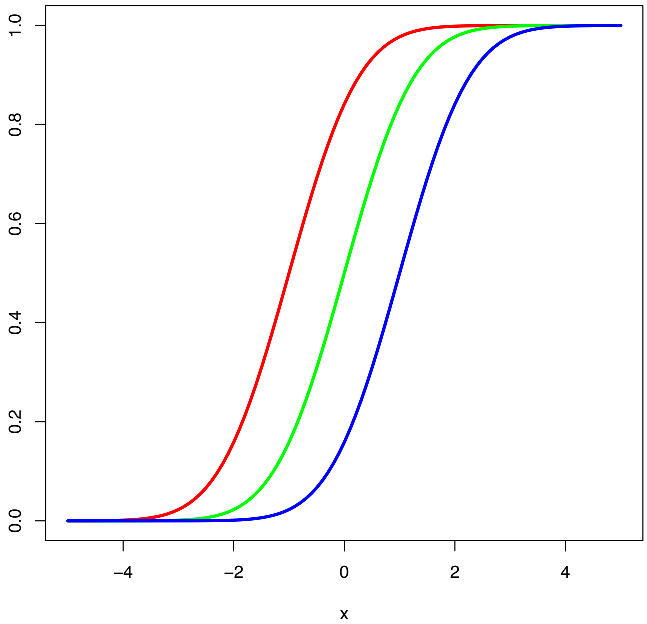


図 13　赤:$N(-1,1^2)$, 緑:$N(0,1^2)$, 青:$N(1,1^2)$ の累積分布関数

また標準偏差 σ は分布のばらつき具合を表している. σ が小さいとき, σ から離れると確率密度は急に 0 に近づく. σ が大きいとき, σ から離れると確率密度はなだらかに 0 に近づく.

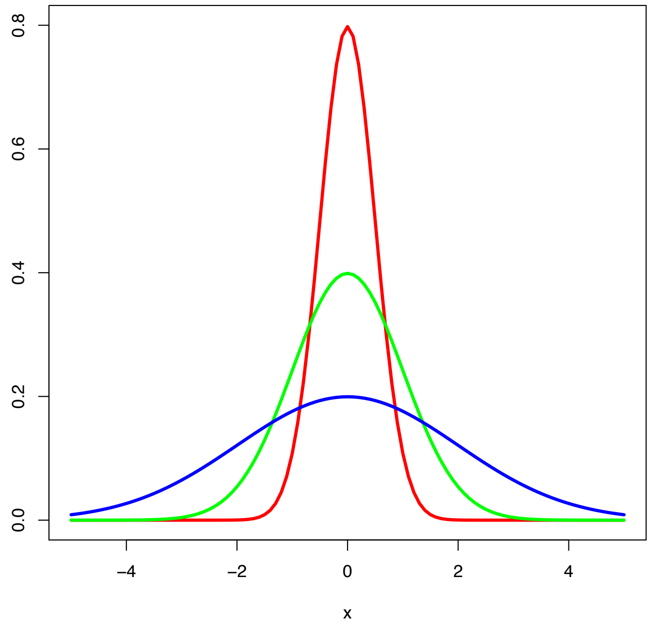


図 14　赤:$N(0,(\frac{1}{2})^2)$, 緑:$N(0,1^2)$, 青:$N(0,2^2)$ の確率密度関数

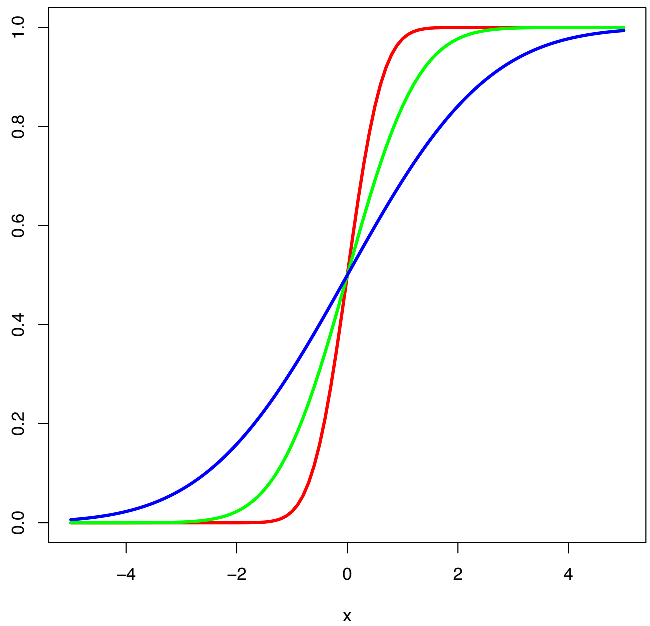


図 15　赤:$N(0,(\frac{1}{2})^2)$, 緑:$N(0,1^2)$, 青:$N(0,2^2)$ の累積分布関数

区間 $\mu \pm \sigma, \mu \pm 2\sigma, \mu \pm 3\sigma$ 内の確率も見てみよう．

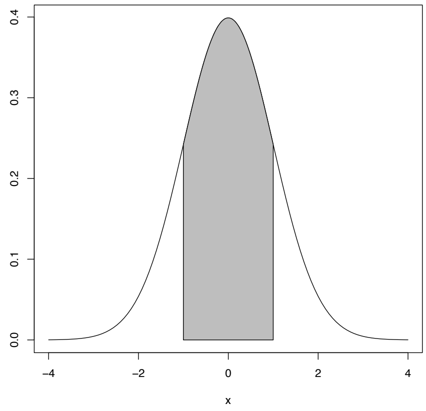


図 16　区間 $\mu \pm \sigma$ 内の確率は約 **0.683**

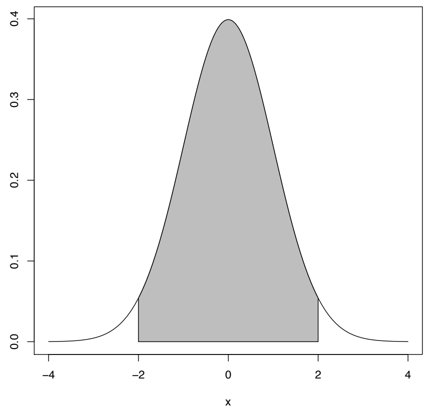


図 17　区間 $\mu \pm 2\sigma$ 内の確率は約 **0.954**

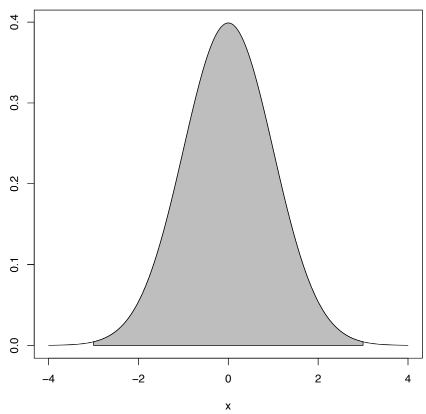


図 18　区間 $\mu \pm 3\sigma$ 内の確率は約 **0.997**

視覚的なイメージをつかんだところで, 数式に戻ろう. 正規分布では, これまで「計算の工夫」で紹介してきたような一次変換を利用できる.

正規分布の一次変換

確率変数 X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとする.
このとき, $Y = aX + b \ \ (a,b$ は定数$)$ とおくと, Y は正規分布 $N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$ に従う. 特に, $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ **と基準化 (この場合特に標準化ともいう) すると,** Z **が正規分布** $N(0,1)$ **に従う**.

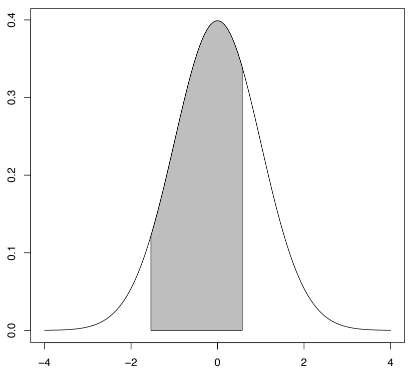
この性質はとてもありがたいものである. なぜなら, 自分が扱う正規分布の μ と σ がどんな値であれ, 標準化さえしてしまえば, $N(0,1)$ と同じものとして扱えるからだ. もちろん $N(0,1)$ の確率を手計算するのは無謀なので, 数値表が配られる.

数値表を持っていない人は付録「**12**」を参照せよ (数字をクリックすると付録のページに移動する).

例題で数値表の使い方を確認してみよう.

Z が標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数であるとき, $P(-1.54 < Z < 0.57)$ を求めよ.

これは, 下図の面積を求めよという問題と同じである.



以下, $Q(u) = P(Z > u)$ と略記する. このとき,

$$P(-1.54 < Z < 0.57) = 1 - Q(0.57) - Q(1.54)$$

表を見れば, $Q(0.57) = 0.2843, Q(1.54) = 0.0618$ なので, $1 - 0.2843 - 0.0618 = 0.6539$ が答えである.

確認 40　$Z\sim(0,1)$ とする. このとき, 以下の (1)〜(6) の値を求めよ.

(1) $P(Z > 1.75)$ (2) $P(Z < -0.61)$ (3) $P(Z < 0.9)$ (4) $P(-1 < Z < 1)$ (5) $P(-2 < Z < 2)$
(6) $P(-3 < Z < 3)$

確認 41　$X\sim(170, 10^2)$ とする. このとき, 以下の (1)(2) の値を求めよ.

(1) $P(X > 175)$ (2) $P(164 < X < 179)$
(ヒント: X の不等式を $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ によって Z の不等式に直し, 確認 40 と同様に解く.)

今まではある範囲における確率を求める場合を考えていたが, 逆にある確率になるような範囲を求めることも, 数値表を使えばできる (付録「**12**」の２つめの表).

確認 42　$X\sim(80, 10^2)$ とする. このとき, 以下の (1)(2) を求めよ.

(1) $P(X > a) = 0.1$ となるような a の値

(2) $P(X > a) = 0.95$ となるような a の値

最後に, ２項分布を正規分布で近似することを考えよう.

確認 33 でも扱ったが, ２項分布は n が大きいと計算が大変である. 確認 33 では２項分布をポアソン分布で近似したが, 今回は正規分布で近似してみよう.

２項分布の正規近似

$X\sim B(n,p)$ であるとする. X の期待値は np, 分散は $np(1-p)$ である.
n が大きく, np 及び $n(1-p)$ の値が**小さい値ではないとき** ($np > 5$ かつ $n(1-p) > 5$ が目安), 正規分布を２項分布の近似として利用することができる.
すなわち, $X\sim N(np, np(1-p))$ であると近似できる.

連続分布のまとめ

連続分布	確率密度関数 $f(x)$	期待値 μ	分散 σ^2
一様分布 $U(a,b)$	$\dfrac{1}{b-a}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $Ex(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$	μ	σ^2

5　２次元の確率モデル

5.1　２次元の確率分布

ここまで, 1つの確率変数 X が従う確率分布について紹介してきたが, ここからは２つの確率変数 X, Y で考えるとどうなるかを見ていこう. 確率変数といっても, これまでやった内容とそこまで変わるわけではない.

まずは用語を確認していこう. ２つの確率変数を同時に考えたときの確率分布を**同時確率分布**という.

表3　２つの離散型確率変数 X, Y の同時確率分布の例

$X \diagdown Y$	0	1	2	3
0	0.08	0.07	0.04	0.01
1	0.05	0.20	0.19	0.06
2	0.02	0.08	0.12	0.08

また, 離散型確率変数 X の取りうる値が $0, 1, \ldots, l$, 離散型確率変数 Y の取りうる値が $0, 1, \ldots, m$ であるとすると,

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad (0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq m)$$

を X, Y の**同時確率関数**という. 例えば表3の場合, $p(2, 2) = 0.12$ となる. 当然

$$\sum_{x=0}^{l} \sum_{y=0}^{m} p(x, y) = 1$$

が成立する. 一方, 連続型確率変数の場合, 同時確率関数の代わりに**同時確率密度関数** $f(x, y)$ を考えることになる. このときも当然

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

が成立する.

一方, 片方の確率変数だけの確率分布に関心があるときもある. 片方の確率変数だけの確率分布のことを, **周辺確率分布**という. 例えば

表4　表3の例における Y の周辺確率分布

Y	0	1	2	3
確率	0.15	0.35	0.35	0.15

となる.

また**周辺確率関数**、**周辺確率密度関数**も定義しよう.

周辺確率関数

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_{y=0}^{m} p(x, y)$$

$$p_Y(x) = P(Y = y) = \sum_{x=0}^{l} p(x, y)$$

周辺確率密度関数

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$$

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

確認 43　表3の例において, $p_X(0), p_X(1), p_X(2)$ を求めよ.

5.2 確率変数の独立性と無相関

確率変数を2種類にしたところで, **独立性**を考え直そう.

確率変数の独立性

2つの離散型確率変数 X, Y について

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \quad (x = 0, 1, \ldots, l; y = 0, 1, \ldots, m)$$

が成り立つとき, X, Y は独立であるという.
2つの連続型確率変数 X, Y について

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (-\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty)$$

が成り立つとき, X, Y は独立であるという.

書き方が変わっただけで, やっていることは記述統計と同じである. 例えば以下は X と Y が独立である例だ.

表 5　X と Y が独立である例

$X \diagdown Y$	0	1	2	3	合計
0	0.030	0.070	0.070	0.030	0.20
1	0.075	0.175	0.175	0.075	0.50
2	0.045	0.105	0.105	0.045	0.30
合計	0.15	0.35	0.35	0.15	1.00

一方, **共分散, 相関係数**も考え直してみよう. 共分散とは $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{n}$ と表される通り, 「X の各値から平均値を引いた値と Y の各値から平均値を引いた値の積」の平均であった. また, **分散 $=$ 積の平均 $-$ 平均の積**という公式もあった. これらにおいて「平均をとる」という操作を「期待値を求める」という操作に置き換えればよい.

確率変数の共分散

離散型確率変数の場合

$$\sigma_{XY} = Cov[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sum_{x=0}^{l}\sum_{y=0}^{m}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)p(x,y)$$
$$= E[XY]-\mu_X\mu_Y = \sum_{x=0}^{l}\sum_{y=0}^{m}xyp(x,y)-\mu_X\mu_Y$$

連続型変数関数の場合

$$\sigma_{XY} = Cov[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)dxdy$$
$$= E[XY]-\mu_X\mu_Y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy-\mu_X\mu_Y$$

確率変数の相関係数

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{V[X]V[Y]}} = \frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sqrt{E[(X-\mu_X)^2]E[(Y-\mu_Y)^2]}}$$

確認 44　$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ を示せ.
(ヒント: 確認 06 と同様に判別式を使うのだが, 今回は $V[X+aY] \geq 0$ を示し, それを利用する)

確認 45　表 3 の例において, $Cov[X,Y]$ 及び ρ_{XY} を求めよ.

確認 46　2 つの確率変数 X, Y について**独立ならば無相関**であることを証明せよ.
(ヒント: 無相関とは $\rho_{XY}=0 \Leftrightarrow \sigma_{XY}=0$ のこと. $\sigma_{XY}=E[XY]-\mu_X\mu_Y$ より, $E[XY]=\mu_X\mu_Y$ を示せばよい. 後は独立性の定義を思い出しながら式変形しよう.)

確認 47　反対に, **無相関だからといって独立とは限らない**. 無相関だが独立ではない X, Y の例を挙げてみよ.

5.3　確率変数の和の期待値と分散

ここまで 2 種類の確率変数 X と Y の積 XY の話がメインだったが, 和 $X+Y$ も考えてみよう. まず期待値の和を考える.

期待値の加法性

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = \mu_X + \mu_Y$$

これは割と自然と受け入れられるだろう. では分散ではどうなるのだろうか.

(独立な確率変数における) 分散の加法性

$$V[X+Y] = V[X] + V[Y] + 2Cov[X,Y]$$

であり, 特に X, Y **が独立であれば**, (独立ならば $Cov[X,Y]=0$ なので)

$$V[X+Y] = V[X] + V[Y]$$

が成立する.

なお, **上記の加法性は n 個の確率変数においても成り立つ**.

確認 48　期待値の加法性を用いて $V[X+Y] = V[X] + V[Y] + 2Cov[X,Y]$ を確認せよ.

確認 49　ある学生は通学の際, 家から A 駅まで歩き, 電車を利用して B 駅に移動し, B 駅から歩いて大学に到着する.

通学に要する時間 (単位は分) は, 以下の確率変数 X, Y, Z の合計である.

- X: 自宅から A 駅までの歩行時間. 期待値 7, 標準偏差 1
- Y: 電車の乗車時間 (待ち時間を含む). 期待値 15, 標準偏差 3
- Z: B 駅から大学までの歩行時間. 期待値 5, 標準偏差 3

このとき, 自宅を出てから大学に着くまでの所要時間の期待値, 分散, 標準偏差の値を求めよ. ただし, 確率変数 X, Y, Z は互いに独立とみなしてよい.

5.4 正規分布の再生性

いよいよこの確率モデルの章も**正規分布の再生性**で終了だ. 正規分布の再生性とは, 以下のような正規分布が持つすばらしい性質である.

正規分布の再生性

2つの確率変数 X, Y **が独立で**, $X\sim(\mu_X, {\sigma_X}^2), Y\sim(\mu_Y, {\sigma_Y}^2)$ のとき, $X+Y\sim(\mu_X+\mu_Y, {\sigma_X}^2+{\sigma_Y}^2)$ が成立する.

なお, **上記の加法性は n 個の確率変数においても成り立つ**. この法則は一見当たり前に見えるかもしれないが, 実は全く当たり前ではない. 証明をプリントで確認してみれば, 自明ではないことが分かるだろう. 自力で導出してみたい人は確認 50 へ.

確認 50(マニア向け)　正規分布の再生性を証明せよ.

確認 51　ある業種の異なる 2 つの株 A と B がある. 株 A の 1 ヶ月後の株価の従う分布は平均が 1000 円, 標準偏差が 300 円の正規分布で近似でき, 株 B の 1 ヶ月後の株価の従う分布は平均が 1200 円, 標準偏差が 400 円の正規分布で近似できるとする. 株 A と株 B の 1 ヶ月後の株価は独立とみなせる. このとき以下の問いに答えよ.

1. 株 A と株 B の 1 ヶ月後の株価の合計が 1600 円以下である確率はどれほどか.
2. 株 B の 1 ヶ月後の株価が, 株 A の 1 ヶ月後の株価より 300 円以上高い確率はどれほどか.

さて, これで統計的推測に入るための土台固めは終了した. いよいよこれからがこの「基礎統計」最大のテーマである統計的推測だ. ここから登山が開始するようなつもりで頑張っていこう.

6 統計的推測への準備

6.1 基本的な考え方

統計的推測を行う上で前提となる事柄を紹介していこう. これらは当然の事柄かもしれないが, 基本的なのでもう一度確認していこう.

- **母集団**と**標本**を区別しよう. 調査対象の全体のことを母集団といい, そのうち実際に調査されたものを標本というのであった. そして, **母集団分布のパラメータ（期待値や分散など）と標本のパラメータ（期待値や分散など）は異なる**. これらを混同しないようにしよう.
- また, ここからは母集団から**無作為標本**が得られることを前提とする.
  無作為標本とは, 以下の２つの条件を満たす確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の値のことである.
  1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ はいずれも同じ母集団の確率分布に従う.
  2. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立である.

  なぜ無作為標本を前提にするかというと, 嬉しい性質があるからである. また後で触れよう.

また前章の内容のうち, 重要なものを復習しよう.

もとの確率変数 X に対して

$$Y = aX + b$$

という変換を行なって得られたデータの期待値 $E[Y]$, 分散 $V[Y]$、標準偏差 $\sqrt{V[Y]}$ は, 元のデータの期待値 $E[X]$, 分散 $V[X]$、標準偏差 $\sqrt{V[X]}$ に対して以下の関係にある.

$$E[Y] = aE[X] + b$$
$$V[Y] = a^2 V[X]$$
$$\sqrt{V[Y]} = |a|\sqrt{V[X]}$$

期待値の加法性

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = \mu_X + \mu_Y$$

(独立な確率変数における) 分散の加法性

$$V[X+Y] = V[X] + V[Y] + 2Cov[X,Y]$$

であり, 特に X, Y **が独立であれば**, (独立ならば $Cov[X,Y] = 0$ なので)

$$V[X+Y] = V[X] + V[Y]$$

が成立する.

6.2 無作為標本の満たす性質

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を無作為標本とする．このとき, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ はいずれも同じ母集団の確率分布に従うことから, その確率分布の期待値を μ, 分散を σ^2 とおくと

$$\mu = E[X_i], \sigma^2 = V[X_i] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

と書ける．また, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立なので, 期待値の加法性, 及び (独立な確率変数における) 分散の加法性より以下が成り立つ.

標本データの和の分布

$$E\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n\mu$$

$$V\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} V[X_i] = n\sigma^2$$

標本平均の分布

$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ とおくと

$$E[\overline{X}] = E\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \frac{1}{n}E\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu$$

$$V[\overline{X}] = V\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \frac{1}{n^2}V\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

標本平均の分散はデータ 1 つの分散の $\dfrac{1}{n}$ 倍になることに注意しよう.

特に, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の母集団の確率分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ である場合 (すなわち母集団が**正規母集団**である場合), 上記の性質を利用すると, 和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ は正規分布 $N(n\mu, n\sigma^2) = N(n\mu, (\sqrt{n}\sigma)^2)$ に従い, 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ は正規分布 $N\Big(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\Big) = N\Big(\mu, \Big(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)^2\Big)$ に従う.

標本平均が正規分布 $N\Big(\mu, \Big(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)^2\Big)$ に従う, という性質はこれから幾度となく使うので, 極めて重要である.

<u>**確認 52**</u>　パン 1 個の重量 (単位は g) の分布は正規分布 $N(25, 4^2)$ で近似できるものとする．1 袋に 9 個入れるとき, 合計重量が $210g$ 以下である確率はいくらか．また, パン 1 個あたりの平均重量が $26g$ 以上である確率はいくらか.

6.3 大数の法則, 中心極限定理

前章では, 無作為標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の平均 $\overline{X}$ の分散が $\dfrac{\sigma^2}{n}$ となることを示した. すると, $n \to \infty$ のとき分散が 0 に収束し, $\overline{X}$ が期待値 μ に一致するのではないか？と推測できる. これを数学的に証明したのが**大数法則**である.

大数法則

標本平均 $\overline{X}$ は μ に確率収束する.

数式的な部分は, (授業ではあまり触れられていないので) 省略した. 興味のある人は『入門統計解析』P. 190 を参照してほしい. 大数法則によって, 例えば**「サイコロをたくさん投げると, ある目のでる確率は $\mu = \dfrac{1}{6}$ に近づいていく」**ことが言える.

このように, データをたくさん集めることが統計的に有意義であることが数式によって証明されたという点で, この大数法則は意味があるのである. 次の**中心極限定理**はさらに強力である.

中心極限定理

標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の母集団分布が何であれ, データ数 n の値が大きくなると, 標本平均 $\overline{X}$ の分布は正規分布 $N\left(\mu, \left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ にいくらでも近づいていく.

こちらも数式的な部分は省略. 興味のある人は『入門統計解析』P. 188 に挙げられた参考文献を参照してほしい. この定理は, **正規分布が「選ばれし」分布である**ことを物語っている.

また, この定理に関連して, 以下のような目安がある.

母集団分布が歪んでいても, $n \geq 25$〜30 であれば標本平均の分布を正規近似できる.
母集団分布が単峰かつ対称な形をしていれば, $n \geq 5$〜10 程度でも標本平均の分布を正規近似できる.

確認 53　ある商品 1 個の重量の分布は平均 $50g$, 標準偏差 $2g$ であるとする. このとき, 商品 100 個の平均重量が $50.4g$ 以上になる確率はどれほどか.
(ヒント: まず 100 個の平均重量の期待値 μ と分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ を計算しよう. その後, 中心極限定理を適用して, 平均重量の確率分布が $N\left(\mu, \left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ に近似できるとする.)

ここまで, 統計的推測の根拠となっている考え方を紹介してきた. 次章から実際に統計的推測を始めていこう. 統計的推測には**点推定**, **区間推定**, **仮説検定**の 3 種類があるが, そのうち前者 2 つを次章で扱う.

7　統計的推定

統計的推定とは, 標本データを基に, 母集団のパラメータである**母数**を推定することである (母数には, 母集団の平均である**母平均**や母集団の分散である**母分散**などがある). 統計的推定は

- ある 1 つの値で母数を推定する**点推定**
- ある精度を保証した区間で母数を推定する**区間推定**

に大別される. 順に見ていこう.
※ 気になった人がいるかもしれないが, 母集団のパラメータは「平均値」である. これまで確率モデルに慣れてきたことから, 期待値が自然だと思いがちだが, あくまで母集団は確率モデルではなく, 標本と同様に値の集まりなので, 平均値と呼ぶべきものである.

7.1　母平均の点推定

まずは用語を確認しよう.

推定量: 点推定のために使われる統計量
推定値: 推定量に標本データの値を代入して得られた数値

これらは具体例を通して分かっていけばよい.

例えば, 母平均 μ が未知であり, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を用いて μ をある値として推定したいならば, どうするだろうか？直感的には標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ が良さそうだ. 実際, 無作為標本であれば

$$E[\overline{X}] = \mu$$

が成り立つことを既に学習している.

この場合, 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ を推定量と呼び, 実際にこれに $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を代入して得られた値を推定値と呼ぶ.

また, このように**期待値を取ったとき, 推定したい母数 (パラメーター) に一致する推定量**のことを**不偏推定量**と呼ぶ. この場合, 標本平均は母平均の不偏推定量である.

「不偏」という言葉に聞き覚えがある人がいるかもしれない. そう, この「不偏」はあの「なぜか $n-1$ で割る」不偏標本分散 $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ と全く同じだ. 標本分散ではなく不偏標本分散の期待値をとると, 母分散と一致するのである. これについては後でまた触れる.

最後に 1 つだけ用語を紹介して, 一旦点推定の話を終えよう.

標準誤差

推定量の標準偏差を**標準誤差**と呼ぶ.
例えば, 前章で学習した通り, 無作為標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ の標本平均 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ に従うが, この $\overline{X}$ の標準偏差 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ は標本平均 $\overline{X}$ の標準誤差である.
標準誤差が小さいほど, 推定量の推定精度が良いと言える.

確認 54　ある工場で生産される製品の重量の分布が正規分布 $N(\mu, 4.8^2)$ で近似されるとする. 無作為に抽出した 9 個の製品の重量の測定値が

$$111, 103, 117, 106, 109, 104, 113, 111, 107$$

であった. このとき, 母平均 μ の点推定値, 及びその標準誤差を求めよ.

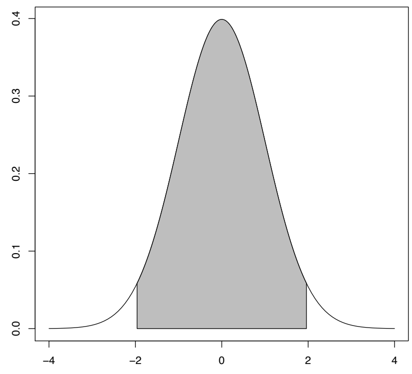
7.2　母平均の区間推定（母分散が既知の場合）

母数を 1 点ではなく, ある「精度」を保障した区間で推定する方法を区間推定と呼ぶ. ここで保障される精度のことを**信頼係数**といい, 区間を**信頼区間**という.

用語を紹介するだけでは分かりづらいので, 例えば母平均 μ の「信頼係数 0.95 の信頼区間 (95% 信頼区間ともいう)」を求めてみよう.

標本平均 $\overline{X}$ は正規分布 $N\Big(\mu, \Big(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)^2\Big)$ に従うというのは前章でやったことだ. また, これを標準化した値, $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は, $N(0,1)$ に従うというのも学習済みだ (不安な人は, 確率モデルの「連続分布の代表例」の中の正規分布の部分を読み直そう).

ところで, 正規分布の中で, 面積が 0.95 になる左右対称な区間はどこであろうか.



上図を使って考えると, 色付きの部分の面積が 0.95 なのだから, 残りの白い部分の面積が 0.025 ずつである. 数値表「**12**」の 2 番目の表より, $u(0.025) = 1.96$ なので

$$P\Big(-1.96 < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 1.96\Big) = 0.95$$

であることが分かる. さらに, この不等式を整理して, μ についての不等式にすると, 以下の通りになる.

$$P\Big(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) = 0.95$$

したがって, 母平均 μ の「信頼係数 0.95 の信頼区間」は

$$\Big(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)$$

である.

計算できたはいいが, 母平均 μ の「信頼係数 0.95 の信頼区間」とは一体何なのか. それは, 正確な表現で言えば,

> 大きさ n の無作為標本のデータを得て母数 μ の信頼係数 0.95 の信頼区間を計算する,
> ということを何度も繰り返し行ったとき,
> 平均的に 100 回あたり 95 回は信頼区間が μ を含んでいる

ということになる. ここでは信頼区間が μ を含んでいるかどうかは, 確率的に変動するものではなく, あくまで「含んでいるか」「含んでいないか」のどちらかしかありえないので, 確率 95% で μ が含まれているとは残念ながら呼べない. しかし, **「100 回計算したら平均して 95 回は μ を含んでいるんだから, 今計算したこの信頼係数 0.95 の信頼区間も, おそらく μ を含んでいるんじゃないか」** と考えることができる.

信頼区間の実態を理解できたところで, 信頼係数を一般化してまとめよう.

信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間 ($100(1-\alpha)\%$ 信頼区間)

$$P\left(-u\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha$$

より,

$$P\left(\overline{X} - u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

なので, 母平均 μ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$\left(\overline{X} - u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

である.

確認 55　確認 54 の例において, 95% 信頼区間及び 99% 信頼区間を求めよ.

さて, 信頼区間の幅 $2u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ を小さくすることを考えよう (幅が小さい方が, 細かい範囲で推定できるからだ). そのためには標本数 n がある程度大きくなくてはならない. 以下の確認問題で確かめてみよう.

確認 56　95% 信頼区間の幅がある指定された値 e 以下に収まるために必要な標本の大きさを計算せよ.

確認 57　確認 54 の例において, 95% 信頼区間の幅を 2 以下にしたいとき, 標本の大きさ n をどの程度にすればよいか. また, 95% 信頼区間の幅を 1 以下にしたいとき, 標本の大きさ n をどの程度にすればよいか.

7.3 母平均の区間推定（母分散が未知であり, かつ大標本の場合）

ここまで見てきた区間推定では, 母集団の確率分布が正規分布であること, 及び母分散 σ の値を知っていることが前提であった．しかし, そもそもそれらが成り立たない場合はどうすればいいのか？それを考えるのがここからの話である．

まず, 標本の数が十分に大きい**大標本（目安として $n \geq 25$〜30）**のとき, 以下の内容が使える．

区間推定（母分散が未知であり, かつ大標本の場合）

大標本においては, 中心極限定理より, 母集団分布が何であっても標本平均 $\overline{X}$ の確率分布は $N\left(\mu, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ で近似できる．
さらに, 母分散 σ が未知の場合でも, 母分散の代わりに近似的に標本標準偏差 $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}}$ を用いることができる (★).
以上より, 母集団の確率分布が何であるか分からず, 母分散の値も分からない場合の 95% 信頼区間は

$$\left(\overline{X} - 1.96\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1.96\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

中心極限定理の内容は前章でやったのでよいとして, ★の部分は一体なぜそう言えるのか．それは, 先ほども少し述べた以下の事実が根拠になっている．

偏差平方和 $\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ について, $E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2\right] = (n-1)\sigma^2$ が成立する．したがって, **不偏標本分散** $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ **は母分散** σ^2 **の不偏推定量である**.

大標本の場合, n が大きいため, 不偏標本分散 s^2 は母分散 σ^2 の代わりとしても問題ないくらい近い値をとると言える．したがって, s は σ の代わりとできる．これが★の根拠だ.

確認 58 $E[\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2] = (n-1)\sigma^2$ を証明せよ.

(注: この問題はプリントに解答がありますが, 『入門統計解析』P. 201 の方が分かりやすいかもしれません)

(ヒント: $X_i - \overline{X} = (X_i - \mu) - (\overline{X} - \mu)$ と変形し, $V[X_i]$ と $V[\overline{X}]$ を作り出す)

さらに, 点推定の最後に登場した標準誤差においても s は σ の代わりとできる.

標準誤差（母分散が未知の場合）

標本平均 $\overline{X}$ の標準誤差は, 母分散 μ が未知の場合, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ の代わりに $\frac{s}{\sqrt{n}}$ を用いる.
(こちらは大標本ではなくても代用することが多い)

確認 59 日本全国の株式会社の株価 (単位は円) の平均値を調べるために, 225 社を無作為に選んで調査を行なったところ, 標本平均は $\overline{X} = 10500$, 不偏標本分散は $s^2 = 4500^2$ であった. 全国平均 μ についてこのデータから推定を行うとき, μ の点推定値, その標準誤差, および 95% 信頼区間を求めよ.

7.4 準備

大標本の場合, 母分散 σ を標本標準偏差 $s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}}$ で代用したが, これはあくまで近似である. 標本数が少ない場合, もっと正確にやらなくてはならない.

母分散が既知の場合であれば, $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ が $N(0,1)$ に従うことを利用できた. そこで今回は $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ の従う分布さえ分かれば万事解決である.

しかし, $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ の従う分布を求めるまでには少々準備が必要である. それを解説するのがこの章である. まずは, 正規分布の親戚である χ^2 **分布（カイ２乗分布）** と t **分布（スチューデントの** t **分布）** を紹介しよう.

χ^2 分布

> $Z_1, \ldots, Z_n$ が互いに独立に標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとする. このとき 2 乗和 $Y = \sum_{i=1}^{v} {Z_i}^2$ の確率分布を**自由度** v **の** χ^2 分布といい, $\chi^2(v)$ で表す.

例えば, $X_1, \ldots, X_{20}$ が互いに独立に同一の正規分布 $N(158, 6^2)$ に従っているとする. このとき, $Z_i = \dfrac{X_i - 158}{6}$ は互いに独立に標準正規分布 $N(0,1)$ に従うから, その 2 乗和は $\chi^2(20)$ に従う.

カイ 2 乗分布の数式的な部分の説明は非常に煩雑なので, 完全に割愛する. そもそも, 数式なんて何も分からなくても, 数値表「**12**」の 4 番目の表さえ見れば値は分かるのだ.

次の t 分布は, この χ^2 分布に絡んだ分布だ.

t 分布

> 確率変数 X と Y は互いに独立であり, X は標準正規分布 $N(0,1)$ に, Y は自由度 v のカイ 2 乗分布に従うとする. このとき, 次の確率変数
>
> $$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{v}}} = \frac{\sqrt{v}X}{\sqrt{Y}}$$
>
> の従う分布を**自由度** v **の** t 分布といい, $t(v)$ で表す.

これも数式的な部分は省略しよう. 自由度が $v = 1$ の t 分布はコーシー分布とも呼ばれ, 期待値も分散も存在しないことで知られているが, 興味のある人だけがプリントで確認すればよいだろう. 「基礎統計」の授業レベルでは, 数値表「**12**」の 3 番目の表が読めればよい.

さて, 正規分布の親戚を紹介したところで, 目標であった $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ の従う分布を求めていこう.

準備 1

$\overline{X}$ と $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ は独立な確率変数である.

確認 60(マニア向け) 「2つの確率変数 X, Y が2次元正規分布に従うとき, X と Y が無相関であれば, X と Y は独立である」ことを認めたとして, 上記を示せ.

(ヒント: まず, $\overline{X}$ と $X_i-\overline{X}$ の間で考える.)

準備 2

偏差平方和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ について, $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$ は**自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う**. すなわち $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ である.

確認 61(マニア向け) 上記を証明せよ.

(ヒント: 行列を使うらしい...(このプリントの作者は証明を理解していない))

準備が出揃ったところで, 結論を述べよう.

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ の従う分布

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ は**自由度 $n-1$ の t 分布に従う**. すなわち $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$

確認 62 $\overline{X}\sim N\left(\mu, \left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$, 及び準備 1, 準備 2 を用いて, 上記を証明せよ.

(ヒント: t 分布の定義より,

$$t=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}}$$

は自由度 $n-1$ の t 分布に従う (v を $n-1$ に変えただけ). X は標準正規分布 $N(0,1)$ に, Y は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う確率変数であり, X, Y は独立であることに注意して, X, Y にそれぞれ"アレ"を代入しよう)

7.5 母平均の区間推定（母分散が未知であり, かつ大標本でない場合）

準備が整ったところで, 早速区間推定をやっていこう. 母分散が**既知**の場合の区間推定は, 以下の通りであった.

信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間 $(100(1-\alpha)\%$ 信頼区間) (復習)

$$P\left(-u\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha$$

より,

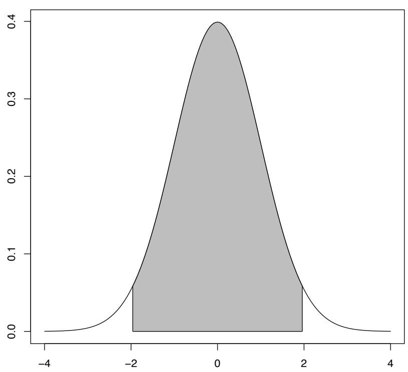
$$P\left(\overline{X}-u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}+u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

なので, 母平均 μ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$\left(\overline{X}-u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}+u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

である.

この正規分布の部分を自由度 $n-1$ の t 分布に変えればよいのだが, 1 つだけ気をつけるべきことがある. 数値表「**12**」を見れば分かるのだが, 正規分布の表では片側のパーセント点が与えられていたのに対し t 分布の場合両側のパーセント点が与えられている.



したがって, 例えば 95% 信頼区間を求める場合でも, 上図の白い部分の面積 0.05 を 2 で割る必要はなく, 数値表「**12**」の 3 番目の表から $v=n-1$, $P=0.05$ の値を探せばよい. これに注意して, 母分散が**未知**, かつ**大標本でない**場合の区間推定は次のページの通り.

信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間 ($100(1-\alpha)\%$ 信頼区間)

n をデータの数とする.

$$P\Big(-t(n-1,\alpha) < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < t(n-1,\alpha)\Big) = 1-\alpha$$

より,

$$P\Big(\overline{X}-t(n-1,\alpha)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}+t(n-1,\alpha)\frac{s}{\sqrt{n}}\Big) = 1-\alpha$$

なので, 母平均 μ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$\Big(\overline{X}-t(n-1,\alpha)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X}+t(n-1,\alpha)\frac{s}{\sqrt{n}}\Big)$$

である.

※鋭い人は, 大標本ではないのに「標本平均が正規分布に従う」ことを認めていいのか？と疑問に思うかもしれないが, それを認めないと問題が解けないので, 認めることにする. 問題を解く上では

母分散が未知なら

- 大標本の場合→ σ をそのまま s に置き換える
- 大標本でない場合→ σ を s に置き換えた上で, 正規分布の代わりに自由度 $n-1$ の t 分布を使う

くらいに考えればよいだろう.

確認 63 ある工場で生産される製品の重量の分布が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ で近似されるとする. 無作為に抽出した 9 個の製品の重量の測定値が

$$111, 103, 117, 106, 109, 104, 113, 111, 107$$

であった. このとき, 母平均 μ の点推定値, 標準誤差, 及び 95% 信頼区間を求めよ.

7.6 母分散の点推定

母平均に続き, 母分散も推定することにしよう. まず点推定だが, これは既に前章で扱っている.

偏差平方和 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ について, $E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]=(n-1)\sigma^2$ が成立する. したがって, **不偏標本分散** $s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$ **は母分散** σ^2 **の不偏推定量である**.

また, 母集団分布が正規分布であれば, 不偏標本分散 $s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$ の標準誤差も求めることができる. 標準誤差とは何のことか忘れた読者のために, 標本平均の標準誤差をもう一度復習しよう.

標準誤差 (復習)

推定量の標準偏差を**標準誤差**と呼ぶ.

例えば, 前章で学習した通り, 無作為標本 $X_1,X_2,\dots,X_n$ の標本平均 $\overline{X}$ は正規分布 $N\Big(\mu,\Big(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)^2\Big)$ に従うが, この $\overline{X}$ の標準偏差 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ は標本平均 $\overline{X}$ の標準誤差である.

標準誤差が小さいほど, 推定量の推定精度が良いと言える.

要は, 不偏標本分散 s^2 の標準誤差とは, 不偏標本分散 s^2 の標準偏差 $\sqrt{V[s^2]}$ のことである. これは, 以下のような値になっている.

正規性を仮定できる時の不偏標本分散 s^2 の標準誤差

母集団分布が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ であれば, 不偏標本分散 $s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$ の標準誤差は

$$\sqrt{V[s^2]}=\frac{\sqrt{2}\sigma^2}{\sqrt{n-1}}$$

確認 64 「X が自由度 v のカイ 2 乗分布 $\chi^2(v)$ に従うとき, $V[X]=2v$ が成立する」という性質を利用して, 上記を証明せよ.
(ヒント: $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う (前章の**準備２**).)

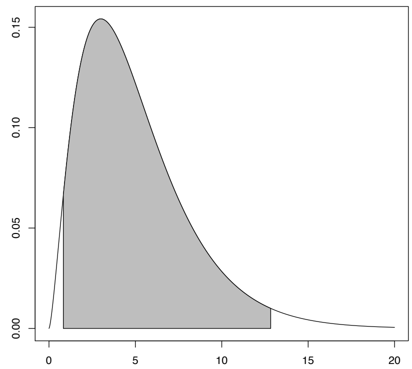
7.7　母分散の区間推定

準備 2 をもう一度見てみよう.

準備 2

偏差平方和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ について, $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う. すなわち $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ である.

ここから, 母平均の区間推定と同じことをやってみよう. まず, 信頼係数 0.95 の信頼区間 (95% 信頼区間) を考えよう. 下図の色付きの部分の面積が 0.95 であり, 白い部分の面積がそれぞれ 0.025 である.



数値表「**12**」の 4 番目の表の使い方を確認しよう. 今回は $v=n-1$ の下で, $P=0.025, 0.975$ の値を調べればよく, それぞれの値を $\chi^2(n-1,0.975), \chi^2(n-1,0.025)$ とすると

$$P\Big(\chi^2(n-1,0.975)<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}<\chi^2(n-1,0.025)\Big)=0.95$$

この不等式を母分散 σ^2 についての不等式に変形すると,

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2(n-1,0.025)}<\sigma^2<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2(n-1,0.975)}\right)=0.95$$

したがって, 母分散の信頼係数 0.95 の信頼区間は

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2(n-1,0.025)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2(n-1,0.975)}\right)$$

である, 同様に,

$$P\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2(n-1,0.025)}}<\sigma<\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2(n-1,0.975)}}\right)=0.95$$

なので, 母標準偏差の信頼係数 0.95 の信頼区間は

$$P\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2(n-1,0.025)}},\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2(n-1,0.975)}}\right)$$

以上を一般化すると以下の通りである.

信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間 ($100(1-\alpha)\%$ 信頼区間)

母分散 σ^2 の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2(n-1,\frac{\alpha}{2})},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}\right)$$

である.

母標準偏差 σ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$P\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2(n-1,\frac{\alpha}{2})}},\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}}\right)$$

である.

確認 65　確認 63 の例において, 母分散 σ^2 および母標準偏差 σ の 95% 信頼区間を求めよ. ただし, 小数点第 4 位を四捨五入して小数点第 3 位までにして答えよ.

8　統計的仮説検定

8.1　帰無仮説と対立仮説

統計的仮説検定では, 日常生活では聞き慣れないような用語が登場してくる. 例を通して確認しよう.

充電してから電池残量が 0 になるまでの電源持続時間の平均が $\mu_0 = 10$ 時間である jPhone というスマートフォンがあるとする. 先日発売された jPhone の新型はバッテリーが進化したらしいが, 電源持続時間が本当に増加したのか調べたい. 新型 jPhone の電源持続時間の母平均を μ とすると, 以下の二通りの仮説が考えられる.

- $\mu = \mu_0$: すなわち, 新型になったところで持続時間に何ら影響がなかったという仮説
- $\mu > \mu_0$: すなわち, 新型になったら確かに持続時間が伸びたという仮説

前者のような,「実際は変化しない」ことを主張する仮説を**帰無仮説**という. そして, 帰無仮説の否定である後者の仮説を**対立仮説**という.

さて, 帰無仮説と対立仮説のどちらを支持すべきなのか. 2 つの主張の境界の値はどう決めればいいのか. 例えば 3 回くらい試しに新型 jPhone を使ってみて, その 3 回の平均が 10.2 時間だとしても, 対立仮説を支持する気にはなれないだろう (本当は $\mu = 10$ で, 試しに使った 3 回だけたまたま良い結果が得られただけかもしれないからだ). 境界の値はある程度大きくなければならなそうである. その境界を統計学的に判断するのが**統計的仮説検定**である.

8.2 母平均の検定（母分散が既知の場合）

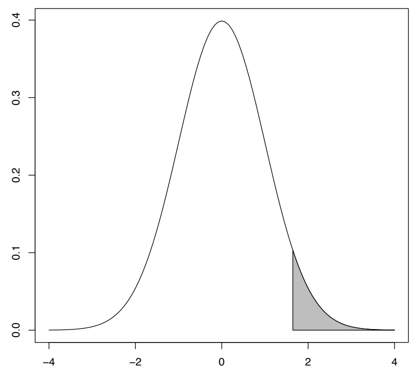
では仮説検定をしてみよう.

$N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本を $X_1, \ldots, X_n$ とおく. このとき標本平均は $\overline{X}$ は $N\Big(\mu, \Big(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)^2\Big)$ に従うというのは何度もやってきた通りだ. 今回, 標本平均 $\overline{X}$ の値をもとに

- $\mu = \mu_0$: 帰無仮説
- $\mu > \mu_0$: 対立仮説

の仮説検定を, **有意水準** 5% でする.

まず**一旦帰無仮説** $\mu = \mu_0$ **が正しいと仮定する** (スマートフォンの例であれば, 電源持続時間は増えなかったという仮定である). このとき, 標準化が使えて, $z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は正規分布 $N(0, 1)$ に従う.



ところが, 正規分布に従うといっても, データが上図の色付きの部分にあるとき, $\overline{X}$ があまりにも大きすぎる. 言い換えると, **帰無仮説が正しいと仮定した元では非常に発生する確率の低いデータである**. よって, データが色付きの範囲にあるとき, 仮定が誤っていると考えて, 対立仮説を支持することにする (これを帰無仮説を**棄却**するという). 逆に, データが色付きの範囲にないとき, 帰無仮説を棄却できないと判断する.

仮説検定を有意水準 5% でするとは, 色付きの部分の面積を全体の 5% にするということである. 数値表「**12**」の 2 番目の表より $u(0.05) = 1.645$ なので, 色付きの部分の左端の値, すなわち帰無仮説を棄却するかどうかの境界の値（**臨界値**）は 1.645 である. よって

- z が棄却域 $z > 1.645$ を満たすとき, 帰無仮説を棄却し, **対立仮説を支持する**
  (スマートフォンの例であれば, 電源持続時間は確かに増えたと主張することである)
- z が採択域 $z \leq 1.645$ を満たすとき, 帰無仮説を棄却できない

ということになる. ちなみに, 今回の $z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ のように, 帰無仮説を棄却するか判断するのに使う統計量を**検定統計量**と呼ぶ.

確認 66　新しく開発された医薬品について, ある物質 A の血中濃度を上げる効果があるかどうかを調べるため, 動物によってテストを行った.

通常, その動物における物質 A の血中濃度は, 正規分布 $N(300, 5^2)$ に従うことがわかっている. 今回新しい医薬品で実験して, $n = 16$ の無作為標本が得られた. 標本は正規分布 $(\mu, 5^2)$ に従うこと, 及び標本平均の値が $\overline{X} = 303.4$ であることが既に判明している.

有意水準 5% で仮説検定を行い, この新しい医薬品には物質 A の血中濃度を上げる効果があるかどうか判断せよ.

(ヒント: $z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ が 1.645 より大きいかどうかを調べるだけだから, 何も難しくはない.)

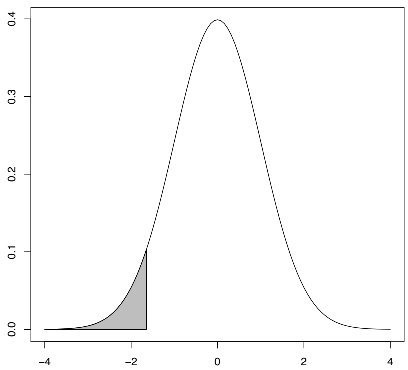
今扱ったような,

- $\mu = \mu_0$: 帰無仮説
- $\mu > \mu_0$: 対立仮説

のタイプの仮説検定を**右片側検定**という. 一方,

- $\mu = \mu_0$: 帰無仮説
- $\mu < \mu_0$: 対立仮説

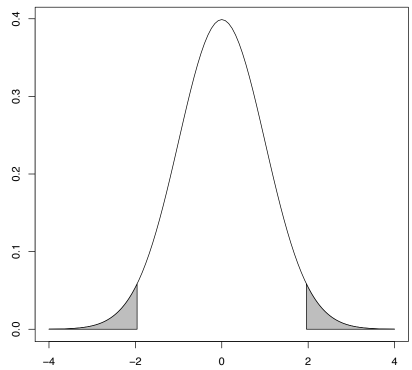
のタイプの仮説検定を**左片側検定**という. 有意水準 5% の左片側検定では, 棄却域は下図の色付きの部分, $z < -u(0.05) = -1.645$ になる.



さらに,

- $\mu = \mu_0$: 帰無仮説
- $\mu \neq \mu_0$: 対立仮説

のタイプの仮説検定を**両側検定**という. 有意水準 5% の両側検定では, 棄却域は次のページの図の色付きの部分, $|z| > u(0.025) = 1.96$ になる. 両側検定では**両側の面積が合わせて** 5%**, すなわち片側の面積が** 2.5% **であることに注意しよう**. また, 両側検定では, 統計検定量は z の絶対値 $|z|$ になる.



まとめると以下の通り.

有意水準 5% の母平均の検定

右片側検定の棄却域は

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > u(0.05) = 1.645$$

左片側検定の棄却域は

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -u(0.05) = -1.645$$

両側検定の棄却域は

$$|z| = \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| > u(0.025) = 1.96$$

有意水準 5% の仮説検定において, 帰無仮説が棄却され対立仮説が支持されることを 5% **有意**あるいは単に**有意**という.

仮説検定において, 5% の次によく用いられる有意水準は 1% である. 有意水準 1% の仮説検定を次のページにまとめておく.

有意水準 1% の母平均の検定

右片側検定の棄却域は

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > u(0.01) = 2.326$$

左片側検定の棄却域は

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -u(0.01) = -2.326$$

両側検定の棄却域は

$$|z| = \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| > u(0.005) = 2.576$$

有意水準 1% の仮説検定において, 帰無仮説が棄却され対立仮説が支持されることを 1% **有意**あるいは**高度に有意**という.

確認 67 とある T 大学において推薦入試が導入された. 推薦入試合格者の英語力が一般入試合格者の英語力と違いがあるかに興味がある.

一般入試合格者については, 過去の記録から, 入学時の英語の試験の得点の分布が正規分布 $N(60, 8^2)$ に近似できるとする. 今回, 18 人の推薦入試合格者が英語の試験を受けたところ平均得点は $\overline{X} = 63.5$ であった. 一般入試合格者との英語力に違いがあると言えるかを有意水準 5% で検定せよ.

ただし, 母分散は一般入試合格者と同じ ($\sigma^2 = 8^2$) と考えてよいとする.

(ヒント: 「増えたかどうか」「減ったかどうか」ではなく「違いがあるかどうか」なので, 片側検定ではなく両側検定をするのが適切である.

片側検定と両側検定では臨界値 (1.645 か 1.96 か) がそもそも異なるため, **片側検定をすべきか両側検定をすべきかは判断に影響を与える**ことに注意しよう)

8.3 ２種類の誤り【試験範囲外】

仮説検定は 100% 正しい判断を下せるわけではない. 仮説検定において, 以下の２種類の誤りが存在する.

- **第１種の誤り**
  帰無仮説が正しいにもかかわらず, それを棄却して対立仮説を支持してしまう誤り

- **第２種の誤り**
  対立仮説が正しいにもかかわらず, 帰無仮説を棄却しない誤り

スマートフォンの例で言えば, 第 1 種の誤りとは, 電源持続時間が本当は伸びていないにもかかわらず, 伸びたと判断してしまうことである. 第 2 種の誤りとは, 電源持続時間が本当は伸びたにもかかわらず, 伸びていないと判断してしまうことである.

仮説検定では**第１種の誤りが生じる確率を小さくすることを第一に考えている**. 事実, 第 1 種の誤りが生じる確率は有意水準そのものであり, 有意水準は 5% や 1% のように, 低い値に抑えられている.

一方, その代わりに, 第 2 種の誤りはある程度は避けられない. したがって, ある検定がどれほど第２種の誤りを回避できているか, という指標が必要になる. そこで対立仮説が正しいときに, 帰無仮説を正しく棄却できる確率, **検出力**を定める. 検出力は

$$\text{検出力} = 1 - \text{第 2 種の誤りの確率}$$

ということである.

確認 68 正規分布 $N(\mu, 5^2)$ からの大きさ $n = 16$ の無作為標本 $X_1 \ldots X_{16}$ に基づき, 帰無仮説 $\mu = 300$, 対立仮説 $\mu > 300$ の右片側検定を有意水準 5% で行うとする.
このとき, 実際は対立仮説が正しく, $\mu = 304$ であったときの検出力を求めよ.
(ヒント: まず, 帰無仮説 $\mu = 300$ が正しいと一旦仮定した場合の, 帰無仮説の棄却域を求め, $\overline{X}$ の式で表す. 次に, $\mu = 304$ であった場合の P(棄却域) を求めればよい. $\mu = 304$ であった場合, $\dfrac{\overline{X} - 304}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ が正規分布 $N(0, 1)$ に従うことに注意しよう.)

8.4 p 値【試験範囲外】

p **値**とは, 以下のような値のことである.

p 値

標本データの値をもとに検定統計量の値を計算したとき, 帰無仮説が正しいという仮定のもとで検定統計量がその値以上に帰無仮説から離れた値をとる確率のことを p 値という.
p 値が 0.05 以下であれば 5% 有意, 0.01 以下であれば 1% 有意である.

文章だけでは分かりづらいので, 具体例で考えよう.

正規分布 $N(\mu, 3^2)$ からの大きさ $n = 16$ の無作為標本が得られており,
標本平均の値は $\overline{X} = 61.8$ であった.
このとき, 帰無仮説 $\mu = 60$, 対立仮説 $\mu \neq 60$ の両側検定を行う時の p 値を求めよ.

まず, 帰無仮説が正しい ($\mu = 60$) ときの両側検定の検定統計量 $|z|$ を計算しよう.

$$|z| = \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| = \left| \frac{61.8 - 60}{\frac{3}{\sqrt{16}}} \right| = 2.4$$

したがって, p 値は

$$P(|z| > 2.4) = 2 \cdot P(z > 2.4) = 2 \cdot Q(2.4)$$

数値表「**12**」の 1 番目の表より, $Q(2.4) = 0.0082$. したがって, p 値は 0.0164 である. この結果より, $\overline{X}$ は 5% 有意であるが 1% 有意ではないことが分かる. 以下のように考えるとわかりやすいかもしれない.

有意水準	棄却域
0.01	$\|z\| > 2.576$
0.0164(p 値)	$\|z\| > 2.4$
0.05	$\|z\| > 1.96$

8.5 母平均の検定（母分散が未知であり, かつ大標本の場合）

ここからは, 母分散が未知の場合の仮説検定を行なっていくことにする. 基本的な方針は, 以下の通り, 区間推定の場合と同じである. 区間推定の場合の内容が頭に入っていれば, 特に苦労はしないだろう.

母分散が未知なら

- 大標本の場合→ σ をそのまま s に置き換える
- 大標本でない場合→ σ を s に置き換えた上で, 正規分布の代わりに自由度 $n-1$ の t 分布を使う

したがって, 母分散が未知であり, かつ大標本の場合の検定は, 先ほどやった内容の中の σ を全て $s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}}$ に取り替えるだけだ.

有意水準 5% の母平均の検定（母分散が未知であり, かつ大標本の場合）

右片側検定の棄却域は

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > u(0.05) = 1.645$$

左片側検定の棄却域は

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < -u(0.05) = -1.645$$

両側検定の棄却域は

$$|z| = \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right| > u(0.025) = 1.96$$

確認 69 ある地域における株式会社の株価（単位は円）の平均値について, 以前の平均値は 10000 であったが, 近年はこれより高くなったのではないかと言われている. そこで, その地域の株式会社を無作為に 225 社選んで調査を行ったところ, 標本平均は $\overline{X} = 10500$, 不偏標本分散は $s^2 = 4500^2$ であった.
株価の平均値は高くなったといえるかを有意水準 5% で検定せよ.

8.6 母平均の検定（母分散が未知であり, かつ大標本でない場合）

母分散が未知なら

- 大標本の場合→ σ をそのまま s に置き換える
- 大標本でない場合→ σ を s に置き換えた上で, 正規分布の代わりに自由度 $n-1$ の t 分布を使う

にある通り, 大標本でない場合は, σ を s に置き換えた上で, 正規分布の代わりに自由度 $n-1$ の t 分布を使う. 一般に, t 分布を用いて行う仮説検定を t **検定**と呼ぶ. t 検定で一つだけ注意点をあげるとすれば, 正規分布の数値表と t 分布の数値表の読み方が違うことくらいだ (これは区間推定の時にも述べたので, 不安な人は区間推定のところに戻って確認してほしい).

有意水準 5% の母平均の検定（母分散が未知であり, かつ大標本でない場合）

右片側検定の棄却域は

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > t(n-1, 0.10)$$

左片側検定の棄却域は

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < -t(n-1, 0.10)$$

両側検定の棄却域は

$$|z| = \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right| > t(n-1, 0.05)$$

なお, $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ のことをしばしば t **検定統計量**と呼ぶ. また, 実際に標本データから計算された $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ の値をしばしば t **値**と呼ぶ.

確認 70 ある種類の製品の最大耐荷重の分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ であると考えられるが, 母平均 μ と母分散 σ^2 の値は未知であるとする. その種類の製品を 6 つ無作為に選び, 試験を行なったところ,

$$199, 203, 205, 205, 207, 211$$

という観測値が得られた. このとき帰無仮説 $\mu = 210$, 対立仮説 $\mu < 210$ の左片側検定を有意水準 5% で行え.

8.7　母分散の検定

今までやって来たのは, 平均が従来と比べて「増えたかどうか」「減ったかどうか」あるいは「違いがあるかどうか」を調べる検定であった.

同じようにして, ばらつき具合が (すなわち分散が) 従来と比べて「増えたかどうか」「減ったかどうか」あるいは「違いがあるかどうか」を調べたくなることもある. これから扱うのはそのような母分散の検定である.

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本を $X_1, \ldots, X_n$ とおき,

- $\sigma = {\sigma_0}^2$: 帰無仮説
- $\sigma > {\sigma_0}^2$: 対立仮説

の右片側検定を有意水準 5% で行う. ここで, 母分散の区間推定と同様, 以下の性質を使う.

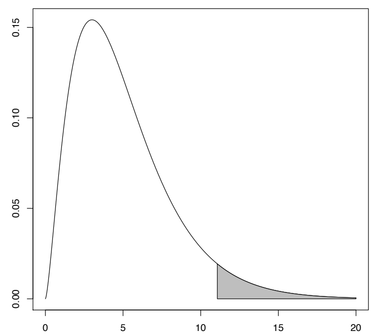
> **準備 2**
> 偏差平方和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ について, $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う. すなわち $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ である.

まず**一旦帰無仮説** $\sigma = {\sigma_0}^2$ **が正しいと仮定する**. このとき $Y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{{\sigma_0}^2}$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従うので, 有意水準 5% の棄却域は

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{{\sigma_0}^2} > \chi^2(n-1, 0.05)$$

となる (下図色付き部分). あるいは, 不偏標本分散 $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ を用いると, $Y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{{\sigma_0}^2} = \dfrac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2}$ とも書き換えられるので,

$$Y = \frac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2} > \chi^2(n-1, 0.05)$$



左片側検定, 両側検定も, 母平均の検定とまったく同じ考え方なので図は省略する. まとめると

有意水準 5% の母分散の検定

右片側検定の棄却域は

$$Y = \frac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2} > \chi^2(n-1, 0.05)$$

左片側検定の棄却域は

$$Y = \frac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2} < \chi^2(n-1, 0.95)$$

両側検定の棄却域は

$$Y = \frac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2} < \chi^2(n-1, 0.975), Y = \frac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2} > \chi^2(n-1, 0.025)$$

なんで 0.95 とかが出てくるの？と思った方は, 数値表「**12**」の 4 番目の表の見方をもう一度よく確認しよう.

一般に, χ^2 分布を用いて行う仮説検定を χ^2 **検定**と呼ぶ.

確認 71　確認 70 の例において, 製品の最大耐荷重の分布の母分散が 10 より大きいと言えるかどうかを, 有意水準 5% で検定せよ.

9　２標本の場合の統計的推定, 統計的仮説検定

ここまで, 1つの母集団から無作為標本を取り, その母平均や母分散について推定や仮説検定を行なってきた. これを2つの母集団に拡張することはできないだろうか. 例えば, スマートフォンの電源持続時間について, 新型 jPhone と新型 Undroid を比較することはできないだろうか. もう少し科学的な例を出すと, ある薬の与える影響について, 20 歳以下と 60 歳以上で比較することはできないだろうか. このような**２標本の場合の統計的推測**の方法をこれから追究していく.

9.1　準備

次ページから始まる証明で使う事項を再掲する. 証明で使うだけなので, 証明に関心のない読者は, このページはスルーしてよい.

もとの確率変数 X に対して

$$Y = aX + b$$

という変換を行なって得られたデータの期待値 $E[Y]$, 分散 $V[Y]$、標準偏差 $\sqrt{V[Y]}$ は, 元のデータの期待値 $E[X]$, 分散 $V[X]$、標準偏差 $\sqrt{V[X]}$ に対して以下の関係にある.

$$E[Y] = aE[X] + b$$
$$V[Y] = a^2V[X]$$
$$\sqrt{V[Y]} = |a|\sqrt{V[X]}$$

期待値の加法性

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = \mu_X + \mu_Y$$

(独立な確率変数における) 分散の加法性

$$V[X+Y] = V[X] + V[Y] + 2Cov[X,Y]$$

であり, 特に X, Y **が独立であれば**, (独立ならば $Cov[X,Y] = 0$ なので)

$$V[X+Y] = V[X] + V[Y]$$

が成立する.

正規分布の再生性

２つの確率変数 X, Y **が独立で**, $X\sim(\mu_X, {\sigma_X}^2)$, $Y\sim(\mu_Y, {\sigma_Y}^2)$ のとき, $X+Y\sim(\mu_X+\mu_Y, {\sigma_X}^2+{\sigma_Y}^2)$ が成立する.

さて, 2標本の統計的推定や統計的仮説検定をやるための準備をしていこう.

まず, 母平均 μ_1, 母分散 ${\sigma_1}^2$ の母集団分布 A からの大きさ n_1 の無作為標本を $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$ とおく. また母平均 μ_2, 母分散 ${\sigma_2}^2$ の母集団分布 B からの大きさ n_2 の無作為標本を $X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$ とおく. 2つの標本は互いに独立であるとする.

(9-1) 母平均の差の不偏推定量, 標準誤差

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}, \overline{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$$

とおくと,

$$E[\overline{X}_1 - \overline{X}_2] = \mu_1 - \mu_2$$

$$V[\overline{X}_1 - \overline{X}_2] = \frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}$$

が成立する. したがって, $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ は母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の不偏推定量であり, その標準誤差は $\sqrt{\dfrac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \dfrac{{\sigma_2}^2}{n_2}}$ である.

確認 72　上記を証明せよ.

(ヒント: 44 ページ, および 69 ページを参照せよ)

(9-2) 共通の母分散の不偏推定量

母集団分布 A, B の分散が等しく, ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 = \sigma^2$ が成立すると仮定する (**等分散性**).

このとき, それぞれの標本における偏差平方和の合計 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2$ について,

$$E\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2\right] = (n_1 + n_2 - 2)\sigma^2$$

が成立する. したがって, $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$ は, 共通の母分散 σ^2 の不偏推定量である.

なお, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2$ のように2つの平方和の合計をとることをしばしば**プーリング**といい, s^2 を**プーリングされた (プールされた) 標本分散**と呼ぶ.

確認 73　上記を証明せよ.

(ヒント: 50 ページ, および 69 ページを参照せよ)

さらに, 母集団分布 A, B が正規分布であると仮定すると, 以下の事柄が示される.

(9-3) 標本平均の差の分布

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}, \overline{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$$

とおくと,

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \left(\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}\right)^2\right)$$

確認 74 上記を証明せよ.

(ヒント: 44 ページ, および 69 ページを参照せよ)

準備 1'

$\overline{X}_1, \overline{X}_2, \sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2, \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2$ は独立な確率変数である.

これは 52 ページの**準備 1** の内容, 及び 2 つの標本が独立であることより示される.

さらに, ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 = \sigma^2$ が成立すると仮定する (**等分散性**). すなわち, 母集団分布 A, B がそれぞれ正規分布 $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$ であると仮定する. このとき以下の事柄が示される.

準備 2'

$\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の χ^2 分布に従う. すなわち

$\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$ である.

これも 52 ページの**準備 2** の内容, 及び 2 つの標本が独立であることより示される.

(9-4) $\dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ の従う分布

$s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$ とおくと, $\dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ は自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の t 分布に従う. すなわち $\dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ である.

確認 75(マニア向け) $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \left(\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}\right)^2\right)$, ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 = \sigma^2$ 及び準備 1', 準備 2' を用いて, 上記を証明せよ.

9.2 母平均の差の区間推定（母分散が既知の場合）

準備ができたところで, 実際に統計的推定や統計的仮説検定をやっていこう. ここからの考え方は 1 標本の場合とまったく同じなので, 少しでも不明なところがあれば, 前々章や前章に戻って内容を確認することを推奨する.

まず, 母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の 95% 信頼区間を求めよう. 前のページの **(9-3)** より

$$P\left(-1.96 < \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}} < 1.96\right) = 0.95$$

である. この不等式を $\mu_1 - \mu_2$ についての不等式に変形すると

$$P\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 1.96\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + 1.96\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}\right) = 0.95$$

したがって, $\mu_1 - \mu_2$ の 95% 信頼区間は

$$P\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 1.96\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}, \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + 1.96\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}\right)$$

となる.

また, これを一般化すると, 信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間 ($100(1-\alpha)\%$ 信頼区間) は

$$P\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}, \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}\right)$$

9.3　母平均の差の検定（母分散が既知の場合）

$N(\mu_1, {\sigma_1}^2)$ からの大きさ n_1 の無作為標本を $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$ とおく．$N(\mu_2, {\sigma_2}^2)$ からの大きさ n_2 の無作為標本を $X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$ とおく．２つの標本は互いに独立する．このもとで

- $\mu_1 = \mu_2$: 帰無仮説
- $\mu_1 \neq \mu_2$: 対立仮説

の仮説検定 (両側検定) を有意水準 5% で行うことにしよう．

(1 標本の場合と同様) まず**一旦帰無仮説** $\mu_1 = \mu_2$ **が正しいと仮定する**．このとき（9-3）及び仮定より $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(0, \left(\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}\right)^2\right)$ である．したがって, 標準化により $z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}}$ は正規分布 $N(0,1)$ に従う．

以上より, 1 標本の場合 (61 ページ) と全く同様に, 棄却域は $|z| > 1.96$ になる．

片側検定の場合も含めて, まとめると以下の通り．

有意水準 5% の母平均の差の検定

$z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}}$ とおくと

- $\mu_1 = \mu_2$: 帰無仮説
- $\mu_1 > \mu_2$: 対立仮説

の右片側検定の棄却域は,

$$z > u(0.05) = 1.645$$

- $\mu_1 = \mu_2$: 帰無仮説
- $\mu_1 < \mu_2$: 対立仮説

の左片側検定の棄却域は,

$$z < -u(0.05) = -1.645$$

- $\mu_1 = \mu_2$: 帰無仮説
- $\mu_1 \neq \mu_2$: 対立仮説

の両側検定の棄却域は,

$$|z| > u(0.025) = 1.96$$

9.4 母平均の差の区間推定, 検定（母分散が未知であり, かつ大標本の場合）

母分散が未知の場合, 次のような方針があることを 1 標本の際に学んだ.

母分散が未知なら

- 大標本の場合→ σ をそのまま s に置き換える
- 大標本でない場合→ σ を s に置き換えた上で, 正規分布の代わりに自由度 $n-1$ の t 分布を使う

これは 2 標本の場合にも同様に使える. よって, 先ほどの内容の σ_1, σ_2 をそれぞれ s_1, s_2 に置き換えるだけだ. (ただし, ${s_1}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2}{n_1 - 1}$, ${s_2}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2}{n_2 - 1}$)

まず, $\mu_1 - \mu_2$ の 95% 信頼区間は

$$P\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 1.96\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}}, \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + 1.96\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}}\right)$$

となる.

また検定は以下の通りになる.

有意水準 5% の母平均の差の検定（母分散が未知であり, かつ大標本の場合）

$z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}}}$ とおくと

- $\mu_1 = \mu_2$: 帰無仮説
- $\mu_1 > \mu_2$: 対立仮説

の右片側検定の棄却域は,

$$z > u(0.05) = 1.645$$

- $\mu_1 = \mu_2$: 帰無仮説
- $\mu_1 < \mu_2$: 対立仮説

の左片側検定の棄却域は,

$$z < -u(0.05) = -1.645$$

- $\mu_1 = \mu_2$: 帰無仮説
- $\mu_1 \neq \mu_2$: 対立仮説

の両側検定の棄却域は,

$$|z| > u(0.025) = 1.96$$

確認 76　とある T 大学において, 基礎統計の試験を, ドイツ語選択のクラスから $n_1 = 50$ 人, 中国語選択のクラスから $n_2 = 100$ 人無作為に選んで受験させた. するとドイツ語選択における標本平均は $\overline{X}_1 = 63.1$, 標本標準偏差は $s_1 = 4.4$, 中国語選択における標本平均は $\overline{X}_2 = 60.8$, 標本標準偏差は $s_1 = 5.1$ であった. このとき以下の (1), (2) に答えよ. ただしドイツ語選択における母平均を μ_1, 中国語選択における母平均を μ_2 とおく.

(1) 母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の 95% 信頼区間を求めよ.

(2) 帰無仮説 $\mu_1 = \mu_2$, 対立仮説 $\mu_1 \neq \mu_2$ の両側検定を有意水準 5% で行え.

9.5　母平均の差の区間推定（母分散が未知であり, かつ大標本でない場合）

２標本の場合も, 今までと同様に自由度 $n-1$ の t 分布に持ち込むのだが, 1 つだけ注意点がある. それは, **等分散性** $\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2 = \sigma^2$ **が成立しないと区間推定や仮説検定ができない**ということだ (等分散性が成り立たない場合でも, ウェルチの検定というものがあるのだが, 講義では省略されているので扱わない).

そこで, ここでは, 等分散性が成立することを仮定した上で, 議論を進める.

まず, 母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の区間推定をしよう. 71 ページの **(9-4)** より

$$P\left(-t(n_1+n_2-2, 0.05) < \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < t(n_1+n_2-2, 0.05)\right) = 0.95$$

が成立する. この不等式を $\mu_1 - \mu_2$ についての不等式に変形すると

$$P\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t(n_1+n_2-2, 0.05)s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t(n_1+n_2-2, 0.05)s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right) = 0.95$$

したがって, $\mu_1 - \mu_2$ の 95% 信頼区間は

$$\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t(n_1+n_2-2, 0.05)s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}, \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t(n_1+n_2-2, 0.05)s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

となる.

また, これを一般化すると, 信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間 ($100(1-\alpha)\%$ 信頼区間) は

$$\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t(n_1+n_2-2, \alpha)s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}, \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t(n_1+n_2-2, \alpha)s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

9.6　母平均の差の検定（母分散が未知であり, かつ大標本でない場合）

ここでも, 等分散性を仮定した上で議論を進める.

- $\mu_1 = \mu_2$: 帰無仮説
- $\mu_1 \neq \mu_2$: 対立仮説

の仮説検定 (両側検定) を有意水準 5% で行うことにしよう.

まず**一旦帰無仮説** $\mu_1 = \mu_2$ **が正しいと仮定する**. このとき **(9-5)** 及び仮定より, $\dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ は自由度 n_1+n_2-2 の分布に従う. したがって, $t = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ とおくと, 棄却域は

$$|t| > t(n_1+n_2-2, 0.05)$$

となる.

片側検定の場合も含めて, まとめると以下の通り.

有意水準 5% の母平均の差の検定（母分散が未知であり, かつ大標本でない場合）

$t = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ とおくと

- $\mu_1 = \mu_2$: 帰無仮説
- $\mu_1 > \mu_2$: 対立仮説

の右片側検定の棄却域は,

$$t > t(n_1 + n_2 - 2, 0.10)$$

- $\mu_1 = \mu_2$: 帰無仮説
- $\mu_1 < \mu_2$: 対立仮説

の左片側検定の棄却域は,

$$t < -t(n_1 + n_2 - 2, 0.10)$$

- $\mu_1 = \mu_2$: 帰無仮説
- $\mu_1 \neq \mu_2$: 対立仮説

の両側検定の棄却域は,

$$|t| > t(n_1 + n_2 - 2, 0.05)$$

確認 77　ある工場において, 2 つの加工工程における加工時間の差を調べたいとする. 工程 A における加工時間を $n_1 = 10$ 回測定した結果, 標本平均 $\overline{X}_1 = 61.0$, 標本標準偏差は $s_1 = 6.0$ となり, 工程 B における加工時間を $n_2 = 12$ 回測定した結果, 標本平均は $\overline{X}_2 = 56.0$, 標本標準偏差は $s_2 = 4.0$ となった.

このとき, 以下の (1), (2), (3) に答えよ. ただし, 工程 A における加工時間の母集団分布は $N(\mu_1, \sigma^2)$, 工程 B における加工時間の母集団分布は $N(\mu_2, \sigma^2)$ であるとし, μ_1, μ_2, σ^2 は全て未知であるとする.

(1) プーリングされた不偏標本分散 s^2 を求めよ.

(2) 母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の 95% 信頼区間を求めよ.

(3) 帰無仮説 $\mu_1 = \mu_2$, 対立仮説 $\mu_1 \neq \mu_2$ の両側検定を有意水準 5% で行え.

9.7 注意：２標本に対応関係がある場合

唐突ではあるが, いきなり確認問題をやってみよう.

確認 78 ある地域で, 60 代の親と 30 代の子の身長に差があるかどうかを調べたい. そこで, 男性の親子 10 組の身長を測定したところ, 下の表の通りになった.
これを２標本問題と考え, 母集団が正規分布であること (正規性), 及び母集団分布が等しいこと (等分散性), を仮定した上で, 親子の身長に差があるかどうかを有意 5% で判断せよ.

親	子
168.2	173.1
175.5	174.0
171.9	178.7
167.0	164.3
162.5	164.6
170.1	170.7
162.3	170.2
164.4	168.1
172.3	173.5
170.8	175.8

計算すれば分かるが, 帰無仮説は棄却できず, 親子の身長に差があるとは言えない, という結果になる. **ところがこれは誤りである.** なぜなら, ２標本での検定は, **２つの標本が独立であることが前提**になっているので, 今回のように, ２標本に対応関係がある場合に適用することができないからだ.

今回の問題は, 以下の確認 79 のように, **１標本の問題として**解くのが正しい.

確認 79 親の身長から子の身長を引いた値が 0 と異なるかどうかを, 有意 5% で判断せよ.

親 − 子
−4.9
1.5
−6.8
2.7
−2.1
−0.6
−7.9
−3.7
−1.2
−5.0

9.8 等分散性の検定

先ほど, 母分散が未知であり, かつ大標本でない場合は, 等分散性 ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 = \sigma^2$ が成立しないと推定や検定ができないと述べた. しかし, 現実には分散が等しいかどうかなど, わからないことの方が多い. そこで, まず分散が等しいかどうか自体を検定しよう, というのがこの章でやりたいことだ.

等分散性の検定をするために, χ^2 分布の親戚である F **分布**をまず紹介しよう.

F 分布

Y_1 が自由度 ϕ_1 の χ^2 分布に, Y_2 が自由度 ϕ_2 の χ^2 分布に従うとする. また Y_1 と Y_2 は互いに独立であるとする.
このとき, $\dfrac{\frac{Y_1}{\phi_1}}{\frac{Y_2}{\phi_2}}$ は**自由度** (ϕ_1, ϕ_2) **の** F **分布に従う**.

F 分布の数式的な部分は, 例によって省略しよう. その代わり, F 分布の上側パーセント点に関する性質を 1 つ紹介する.

$$F(\phi_1, \phi_2; 1-\alpha) = \frac{1}{F(\phi_2, \phi_1; \alpha)}$$

確認 80　$F(5, 8; 0.95)$ を求めよ. 数値表を持っていない人は, 数値表「**12**」の 5 番目の表を参照せよ.

さて, F 分布を導入したところで, 以下のような性質が導かれる.

(9-5) $\dfrac{{s_1}^2}{{s_2}^2}$ の従う分布

${s_1}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2}{n_1 - 1}, {s_2}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2}{n_2 - 1}$ とおくと, 不偏標本分散の比 $\dfrac{{s_1}^2}{{s_2}^2}$ は**自由度** $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ **の** F **分布に従う**. すなわち $\dfrac{{s_1}^2}{{s_2}^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ である.

確認 81　52 ページの**準備 2** を用いて, 上記を証明せよ.

準備は整った. では検定を始めよう.

正規分布 $N(\mu_1, {\sigma_1}^2)$ からの大きさ n_1 の無作為標本を $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$, 正規分布 $N(\mu_2, {\sigma_2}^2)$ からの大きさ n_2 の無作為標本を $X_{21}, \dots, X_{2n_2}$ とおく. 2つの標本は互いに独立とする. このとき

- ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$: 帰無仮説
- ${\sigma_1}^2 \neq {\sigma_2}^2$: 対立仮説

の仮説検定を有意水準 5% で行うことにしよう.

まず**一旦帰無仮説** ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$ **が正しいと仮定する**. このもとで, **(9-5)** より $\dfrac{{s_1}^2}{{s_2}^2}$ は, 自由度 $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ の F 分布に従うことから, (数値表「**12**」の5番目の表の読み方に注意して)

$$P\left(\frac{{s_1}^2}{{s_2}^2} < F(n_1 - 1, n_2 - 1; 0.975)\right) + P\left(F(n_1 - 1, n_2 - 1; 0.025) < \frac{{s_1}^2}{{s_2}^2}\right) = 0.05$$

であることが分かる. したがって, 棄却域は

$$\frac{{s_1}^2}{{s_2}^2} < F(n_1 - 1, n_2 - 1; 0.975), \frac{{s_1}^2}{{s_2}^2} > F(n_1 - 1, n_2 - 1; 0.025)$$

となる. また, $F(n_1 - 1, n_2 - 1; 0.975) = \dfrac{1}{F(n_2 - 1, n_1 - 1; 0.025)}$ より, 棄却域は

$$\frac{{s_1}^2}{{s_2}^2} < \frac{1}{F(n_2 - 1, n_1 - 1; 0.025)}, \frac{{s_1}^2}{{s_2}^2} > F(n_1 - 1, n_2 - 1; 0.025)$$

とも書き換えられる. このように, F 分布を用いて行う検定を F **検定**という.

片側検定の場合も含めて, まとめると以下の通り.

有意水準 5% の等分散性の検定

- ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$: 帰無仮説
- ${\sigma_1}^2 > {\sigma_2}^2$: 対立仮説

の右片側検定の棄却域は,

$$\frac{{s_1}^2}{{s_2}^2} > F(n_1 - 1, n_2 - 1; 0.05)$$

- ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$: 帰無仮説
- ${\sigma_1}^2 < {\sigma_2}^2$: 対立仮説

の左片側検定の棄却域は,

$$\frac{{s_1}^2}{{s_2}^2} < F(n_1 - 1, n_2 - 1; 0.95)$$

- ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$: 帰無仮説
- ${\sigma_1}^2 \neq {\sigma_2}^2$: 対立仮説

の両側検定の棄却域は,

$$\frac{{s_1}^2}{{s_2}^2} < F(n_1 - 1, n_2 - 1; 0.975), \frac{{s_1}^2}{{s_2}^2} > F(n_1 - 1, n_2 - 1; 0.025)$$

確認 82　ある種の性能を持つ 2 種類の類似商品（商品 A, 商品 B とする）があり, 商品 A の性能のばらつきが商品 B の性能のばらつきより大きいかどうかに興味があるとする.

商品 A を無作為に $n_1 = 9$ 個取って性能を測定したところ, その標本標準偏差は $s_1 = 4$ となり, 商品 B を無作為に $n_2 = 8$ 個取って性能を測定したところ, その標本標準偏差 $s_2 = 2$ となった. 商品 A の性能の母集団分布は正規分布 $N(\mu_1, {\sigma_1}^2)$, 商品 B の性能の母集団分布は正規分布 $N(\mu_2, {\sigma_2}^2)$ とみなすことができ, $\mu_1, \mu_2, {\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2$ は全て未知であるとする.

このとき, 商品 A の性能のばらつきは商品 B の性能のばらつきより大きいと判断できるか, 有意水準 5% で検定を行え.

10　母比率の統計的推定, 統計的仮説検定

基礎統計で扱う内容も, そろそろ終わりを迎えてきた. この章では, 母比率の推定や検定を行うのだが, そもそも母比率とは何か？と疑問に思う人もいるだろう.

母比率とは, 母集団が２項分布 $B(n,p)$ のときの p のことである. p とは, 例えばコイン投げの例であれば, 表が出る確率のことだ. しかしなぜ今更２項分布の検定などするのか？それは 25 ページに答えがある. **2 項分布はイエスかノーかの調査なら何でも使える**のだ. したがって, ２項分布の推定, 検定をすることで, 例えば内閣や法案の支持率の推定, 検定が可能となるのだ.

10.1　母比率の点推定

では, まず準備をしよう. 今, 内閣の支持, 不支持を n 人の無作為に抽出された有権者に聞いた場合のような, ２項分布 $X \sim B(n,p)$ の観測値が得られているとする. ２項分布の期待値, 分散には以下のような性質があった (25 ページ参照).

２項分布の期待値, 分散

$$\mu = E[X] = np$$
$$\sigma^2 = V[X] = np(1-p)$$

すると, **標本比率** $\hat{p} = \dfrac{X}{n}$ について,

$$E[\hat{p}] = E\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{E[X]}{n} = \frac{np}{n} = p$$

である. したがって, **標本比率 $\hat{p}$ は母比率 p の不偏推定量である** (標準誤差とは何か忘れてしまった人は, 46 ページや 50 ページを参照). また,

$$V[\hat{p}] = V\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{V[X]}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

となるので, $\hat{p}$ の標準誤差は, $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ と与えられる (標準誤差とは何か忘れてしまった人は, 47 ページや 55 ページを参照). この２つの式変形は, 44 ページに書かれている正規分布の場合とよく似ている.

ただし, 母比率 p の値は, これから推定や検定を行なっていく値, つまり未知の値なので, このままでは標準誤差は計算できない. そこで実際には, 標準誤差は $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ の代わりに $\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ を用いて計算される.

10.2　母比率の区間推定

さらに, n がある程度大きい場合, ２項分布は正規分布に近似できることも既に学習した (37 ページを参照).

２項分布の正規近似

$X \sim B(n,p)$ であるとする. X の期待値は np, 分散は $np(1-p)$ である.
n が大きく, np 及び $n(1-p)$ の値が小さい値ではないとき ($np > 5$ かつ $n(1-p) > 5$ が目安),
正規分布を２項分布の近似として利用することができる.
すなわち, $X \sim N(np, np(1-p))$ であると近似できる.

したがって, 以下のような結論が得られる.

標本比率 $\hat{p} = \dfrac{X}{n}$ の分布の近似

$X \sim B(n,p)$ であるとする.
n が大きく, np 及び $n(1-p)$ の値が小さい値ではないとき ($np > 5$ かつ $n(1-p) > 5$ が目安),
標本比率 $\hat{p} = \dfrac{X}{n}$ の分布を

$$N\left(p, \left(\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)^2\right)$$

に近似できる.

さて, 準備は整った.

標本比率 $\hat{p} = \dfrac{X}{n}$ の分布は, $N\left(p, \left(\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)^2\right)$ に近似できることから, 標準化により, 以下の式が成り立つ.

$$P\left(-1.96 < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} < 1.96\right) = 0.95$$

この不等式を整理して, p についての不等式にすると

$$P\left(\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 0.95$$

したがって, 母比率 p の 95% 信頼区間は

$$\left(\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

となる. ただし, p は未知の値なので, 実際には

$$\left(\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

を用いて計算される.

確認 83　内閣の支持不支持について有権者全体から無作為に選ばれた $n = 150$ 人に調査をしたところ, 支持する人の数は $X = 90$ 人であった. このとき, 有権者全体での支持率 p の点推定値, その標準誤差, および 95% 信頼区間を求めよ.

さて, 95% 信頼区間

$$\left(\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

の幅は, $3.92\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ であるが, これをできるだけ小さくすることを考えよう (その方が細かい範囲で推定できるからだ). 幅がある値 e より小さい条件は

$$3.92\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq e$$

これを, n についての不等式に変形すると,

$$n \geq \frac{(3.92)^2 p(1-p)}{e^2}$$

となるので, 標本数 n が $\frac{(3.92)^2 p(1-p)}{e^2}$ より大きければ幅は e より小さくなる. もちろん, 95% 信頼区間だけではなく, 一般の $100(1-\alpha)$% 信頼区間なら, $u(0.025) = 1.96$ の代わりに $u\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ を用いて

$$n \geq \frac{\left(2 \cdot u\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 p(1-p)}{e^2}$$

とすればよい.

しかし, 繰り返しの注意になるが, p は未知である. そこで, 実際は, p の部分は

1. 既に得られている p の推定値を代わりに代入する.
2. **安全のため** $p = 0.5$ とする.

２番目の「安全」というのは何故かというと, $p(1-p)$ は $p = 0.5$ で最大値をとるので, 取るべき標本数 n も大きめに見積もられるからだ.

確認 84　確認 83 の例において, さらに母比率 p の推定精度を上げて 95% 信頼区間の幅を 0.05 にしたいとすると, あといくつのデータを取らなければならないか. ただし, $\hat{p} = 0.6$ を用いて, 取るべき標本の大きさを計算するものとする.

確認 85　ある新政策への賛成・反対について調査を行うとする. 全体での賛成比率 p の 95% 信頼区間の幅を 0.04 以下に抑えたいとき, どの程度の大きさの標本を取らなければならないか. なお, 安全のため, $\hat{p} = 0.5$ として取るべき標本の大きさを計算するものとする.

10.3 母比率の仮説検定

- $p = p_0$: 帰無仮説
- $p \neq p_0$: 対立仮説

の仮説検定を有意水準 5% で行う.

まず**一旦帰無仮説 $p = p_0$ が正しいと仮定する**. このとき $\hat{p} = \dfrac{X}{n}$ は正規分布 $N\left(p_0, \left(\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)^2\right)$ に従う. したがって, $z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ とおくと, 棄却域は

$$|z| > 1.96$$

となる.

片側検定の場合も含めて, まとめると以下の通り.

有意水準 5% の母比率の検定

$z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ とおくと,

- $p = p_0$: 帰無仮説
- $p > p_0$: 対立仮説

の右片側検定の棄却域は,

$$z > u(0.05) = 1.645$$

- $p = p_0$: 帰無仮説
- $p < p_0$: 対立仮説

の左片側検定の棄却域は,

$$z < -u(0.05) = -1.645$$

- $p = p_0$: 帰無仮説
- $p \neq p_0$: 対立仮説

の両側検定の棄却域は,

$$|z| > u(0.025) = 1.96$$

10.4　母比率の差の区間推定

今までは 1 標本に対して母比率の推定や検定を行なってきたが, ここからは 2 標本に対して母比率の差の推定や検定を行うことにしよう．２項分布 $X_1 \sim B(n_1, p_1), X_2 \sim B(n_2, p_2)$ の観測値が得られているとする. 前と同様に, n_1, n_2 がある程度大きければ,

$$\hat{p}_1 \sim N\left(p_1, \left(\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}}\right)^2\right), \hat{p}_2 \sim N\left(p_2, \left(\sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right)^2\right)$$

となる. よって, 近似的に

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \left(\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right)^2\right)$$

が成立する. したがって,

$$P\left(-1.96 < \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} < 1.96\right) = 0.95$$

この不等式を整理して, $p_1 - p_2$ についての不等式にすると

$$P\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 1.96\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} < p_1 - p_2 < \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + 1.96\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right) = 0.95$$

したがって, 95% 信頼区間は

$$\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 1.96\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + 1.96\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right)$$

となる. ただし, p_1, p_2 は未知の値なので, 実際には

$$\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}, \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}\right)$$

を用いて計算される.

10.5　母比率の差の仮説検定

２項分布 $X_1 \sim B(n_1, p_1), X_2 \sim B(n_2, p_2)$ の観測値が得られているとし, n_1, n_2 はある程度大きいとする. 前ページでやった通り, このとき近似的に

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \left(\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right)^2\right)$$

が成立する.

- $p_1 = p_2$: 帰無仮説
- $p_1 \neq p_2$: 対立仮説

の仮説検定を有意水準 5% で行う.

まず**一旦帰無仮説** $p_1 = p_2$ **が正しいと仮定する**. このとき, $p = p_1 = p_2$ と記号を置き直すと

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(0, \left(\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}\right)^2\right)$$

となる. したがって, 棄却域は

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} > 1.96$$

となる. ところが, 共通の母比率 p の値は未知なので, このままでは計算できない. そこで p の代わりに**プーリングされた標本比率** $\hat{p} = \dfrac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$ で代用する. $z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ とおくと, 棄却域は

$$|z| > 1.96$$

片側検定の場合も含めて, まとめると以下の通り.

有意水準 5% の母比率の検定

$z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$(ただし $\hat{p} = \dfrac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$) とおくと

- $p_1 = p_2$: 帰無仮説
- $p_1 > p_2$: 対立仮説

の右片側検定の棄却域は,

$$z > u(0.05) = 1.645$$

- $p_1 = p_2$: 帰無仮説
- $p_1 < p_2$: 対立仮説

の左片側検定の棄却域は,

$$z < -u(0.05) = -1.645$$

- $p_1 = p_2$: 帰無仮説
- $p_1 \neq p_2$: 対立仮説

の両側検定の棄却域は,

$$|z| > u(0.025) = 1.96$$

確認 86 ある新しい薬 A について, 乗り物酔いを防ぐ効果があるかどうかを検証したいとする. そこで, 乗り物酔いの経験のある 400 人を集め, 無作為に 300 人を選んで薬 A を与え, 残りの 100 人には偽の薬を与えて, バス旅行に出かけた. その結果, 薬 A を飲んだグループでは 18%(300 人中 54 人) の人が, 偽薬を飲んだグループでは 25%(100 人中 25 人) の人が乗り物酔いをした.

(1) 母比率 $p_1 - p_2$ の 95% 信頼区間を求めよ.

(2) 薬 A は乗り物酔いをする確率を下げると判断できるか. 有意水準 5% で検定を行え.

11 その他の仮説検定

11.1 適合度検定

さて, 今まで扱ってきた検定は全て量的データの検定であったが, 今回は, 9 ページにあるような質的データの検定を行うことにする. 例を通して見ていこう.

質的データの観測値が $k_1 \times k_2$ の分割表に整理されているとする (例えば以下は 2×3 の分割表である).

表 6 新法案への賛否

	20 代〜30 代	40 代〜50 代	60 代以上	計
賛成	40	55	45	140
反対	10	35	15	60
計	50	90	60	200

これに対して, 9 ページで学んだように, 独立の場合のモデルは以下の通りになる.

表 7 新法案への賛否（独立な場合のモデル）

	20 代〜30 代	40 代〜50 代	60 代以上	計
賛成	35	63	42	140
反対	15	27	18	60
計	50	90	60	200

今回,「世代と賛否は独立である」という帰無仮説を考える. 帰無仮説が正しいと仮定したとき, 表 7 のような値が期待される. このように, 期待される各セルの値を**期待度数**といい, 一方, 表 6 のように実際に観測された表の各セルの値を**観測度数**という.

ここで, データ数が大きい時, 近似的に

$$U = \frac{(\text{観測度数} - \text{期待度数})^2}{\text{期待度数}} \text{の合計}$$

が**自由度** $(k_1 - 1)(k_2 - 1)$ **の** χ^2 **分布に従う** (ただし $k_1 = 1$ のとき自由度は単に $k_2 - 1$ になる).

U の値が大きいほど, 観測度数が期待度数から離れていることを意味するので, 有意水準 5% の棄却域は

$$U > \chi^2((k_1 - 1)(k_2 - 1), 0.05)$$

となる (ただし $k_1 = 1$ のとき棄却域は $U > \chi^2(k_2 - 1, 0.05)$).

適合度検定

$$U = \frac{(\text{観測度数} - \text{期待度数})^2}{\text{期待度数}} \text{の合計}$$ とすると, 有意水準 5% の棄却域は

$$U > \chi^2((k_1 - 1)(k_2 - 1), 0.05)$$

となる (ただし $k_1 = 1$ のとき棄却域は $U > \chi^2(k_2 - 1, 0.05)$).
なお, 適合度検定が適用できる目安は**各セルにおける期待度数が全て 5 より大きい**ことである. これが成り立たない時は, **複数のセルを統合**することで条件が成り立つようにしてから検定を行う.

確認 87 表 6 の例において, 法案への賛否の割合は世代間で差があるといえるか, 有意水準 5% で検定を行え.

確認 88 ある製品の曜日ごとの売上個数を調べたところ, 以下の表が得られた. 売上個数は曜日に関係なく一様であるという帰無仮説を有意水準 5% で検定せよ.

曜日	月	火	水	木	金	土	日	計
売上個数	17	14	19	13	23	25	29	140

(ヒント: この問題の場合は, 期待度数は月曜から日曜まで一様, すなわち全て 20 である.)

確認 89 ある製品に対する 5 段階評価のアンケートを大学生 200 人と社会人 100 人に対して実施したところ, 以下の表の結果が得られた. 大学人と社会人では評点の付け方に違いがあると言えるかについて, 有意水準 5% で検定せよ.

評点	1	2	3	4	5	計
大学生	3	9	60	84	44	200
社会人	6	12	30	36	16	100
計	9	21	90	120	60	300

(ヒント: 独立な場合のモデルを計算してみるとわかるが, 値が 5 より小さいセルが存在してしまい, **各セルにおける期待度数が全て 5 より大きい**という目安を満たしていない. そこで, 評点 1 と 2 を統合して, セルの値を全て 5 より大きくしてから検定を行う)

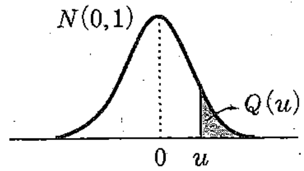
11.2　ノンパラメトリック検定【試験範囲外】

試験範囲外なので省略！！！

12 付録

篠崎信雄, 竹内秀一 (2009), "統計解析入門[第2版]", サイエンス社, p.273.

付　　表



付表 1　標準正規分布 $N(0,1)$ の上側確率 $(u \longrightarrow Q(u))$

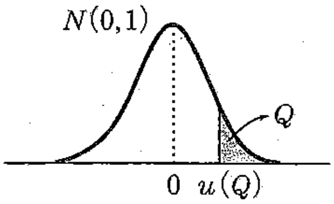
u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010

与えられた u (> 0) に対し，その小数点以下 1 桁までの数字により左の見出しのそれを，小数点以下 2 桁目の数字で上の見出しのそれを定めるとき，その交差点にある数字が $Q(u)$ の値である．

$\boxed{例}$　$u = 1.23$ のとき，左の見出しが 1.2 と上の見出しが 0.03 の交差点にある 0.1093 が求める $Q(1.23)$ の値である．□

(出典) 森口繁一，日科技連数値表委員会編：「新編日科技連数値表」，p.4，日科技連出版社，1990.

篠崎信雄, 竹内秀一 (2009), "統計解析入門[第2版]", サイエンス社, p.274.



付表 2 標準正規分布 $N(0,1)$ のパーセント点 ($Q \longrightarrow u(Q)$)

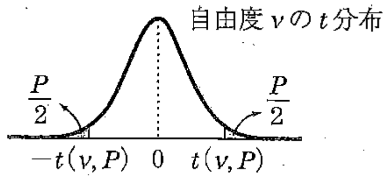
Q	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.00	∞	3.090	2.878	2.748	2.652	2.576	2.512	2.457	2.409	2.366
.01	2.326	2.290	2.257	2.226	2.197	2.170	2.144	2.120	2.097	2.075
.02	2.054	2.034	2.014	1.995	1.977	1.960	1.943	1.927	1.911	1.896
.03	1.881	1.866	1.852	1.838	1.825	1.812	1.799	1.787	1.774	1.762
.04	1.751	1.739	1.728	1.717	1.706	1.695	1.685	1.675	1.665	1.655
.05	1.645	1.635	1.626	1.616	1.607	1.598	1.589	1.580	1.572	1.563
.06	1.555	1.546	1.538	1.530	1.522	1.514	1.506	1.499	1.491	1.483
.07	1.476	1.468	1.461	1.454	1.447	1.440	1.433	1.426	1.419	1.412
.08	1.405	1.398	1.392	1.385	1.379	1.372	1.366	1.359	1.353	1.347
.09	1.341	1.335	1.329	1.323	1.317	1.311	1.305	1.299	1.293	1.287
.10	1.282	1.276	1.270	1.265	1.259	1.254	1.248	1.243	1.237	1.232
.11	1.227	1.221	1.216	1.211	1.206	1.200	1.195	1.190	1.185	1.180
.12	1.175	1.170	1.165	1.160	1.155	1.150	1.146	1.141	1.136	1.131
.13	1.126	1.122	1.117	1.112	1.108	1.103	1.098	1.094	1.089	1.085
.14	1.080	1.076	1.071	1.067	1.063	1.058	1.054	1.049	1.045	1.041
.15	1.036	1.032	1.028	1.024	1.019	1.015	1.011	1.007	1.003	.999
.16	.994	.990	.986	.982	.978	.974	.970	.966	.962	.958
.17	.954	.950	.946	.942	.938	.935	.931	.927	.923	.919
.18	.915	.912	.908	.904	.900	.896	.893	.889	.885	.882
.19	.878	.874	.871	.867	.863	.860	.856	.852	.849	.845
.20	.842	.838	.835	.831	.827	.824	.820	.817	.813	.810
.21	.806	.803	.800	.796	.793	.789	.786	.782	.779	.776
.22	.772	.769	.765	.762	.759	.755	.752	.749	.745	.742
.23	.739	.736	.732	.729	.726	.722	.719	.716	.713	.710
.24	.706	.703	.700	.697	.693	.690	.687	.684	.681	.678
.25	.674	.671	.668	.665	.662	.659	.656	.653	.650	.646
.26	.643	.640	.637	.634	.631	.628	.625	.622	.619	.616
.27	.613	.610	.607	.604	.601	.598	.595	.592	.589	.586
.28	.583	.580	.577	.574	.571	.568	.565	.562	.559	.556
.29	.553	.550	.548	.545	.542	.539	.536	.533	.530	.527
.30	.524	.522	.519	.516	.513	.510	.507	.504	.502	.499
.31	.496	.493	.490	.487	.485	.482	.479	.476	.473	.471
.32	.468	.465	.462	.459	.457	.454	.451	.448	.445	.443
.33	.440	.437	.434	.432	.429	.426	.423	.421	.418	.415
.34	.412	.410	.407	.404	.402	.399	.396	.393	.391	.388
.35	.385	.383	.380	.377	.375	.372	.369	.366	.364	.361
.36	.358	.356	.353	.350	.348	.345	.342	.340	.337	.335
.37	.332	.329	.327	.324	.321	.319	.316	.313	.311	.308
.38	.305	.303	.300	.298	.295	.292	.290	.287	.285	.282
.39	.279	.277	.274	.272	.269	.266	.264	.261	.259	.256
.40	.253	.251	.248	.246	.243	.240	.238	.235	.233	.230
.41	.228	.225	.222	.220	.217	.215	.212	.210	.207	.204
.42	.202	.199	.197	.194	.192	.189	.187	.184	.181	.179
.43	.176	.174	.171	.169	.166	.164	.161	.159	.156	.154
.44	.151	.148	.146	.143	.141	.138	.136	.133	.131	.128
.45	.126	.123	.121	.118	.116	.113	.111	.108	.105	.103
.46	.100	.098	.095	.093	.090	.088	.085	.083	.080	.078
.47	.075	.073	.070	.068	.065	.063	.060	.058	.055	.053
.48	.050	.048	.045	.043	.040	.038	.035	.033	.030	.028
.49	.025	.023	.020	.018	.015	.013	.010	.008	.005	.003

与えられた Q $(0 \leq Q \leq 0.499)$ に対し，小数点以下 2 桁までの数字により左の見出しのそれを，小数点以下 3 桁目の数字で上の見出しのそれを定めるとき，その交差点にある数字が $u(Q)$ の値である．

例 $Q = 0.162$ のとき，左の見出しが 0.16，上の見出しが 0.002 の交差点にある 0.986 が求める $u(0.162)$ の値である．□

（出典）山内二郎編：「統計数値表 JSA-1972」，日本規格協会 (1972).

篠崎信雄，竹内秀一 (2009), "統計解析入門[第2版]", サイエンス社, p.275.



付表 3　t 分布のパーセント点 (ν, $P \longrightarrow t(\nu,\ P)$)

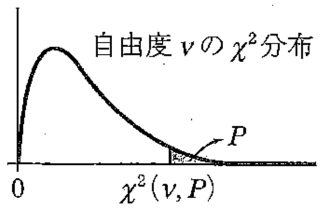
ν \ P	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001	P / ν
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221	13
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850	20
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819	21
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792	22
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767	23
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745	24
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725	25
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659	29
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646	30
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551	40
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460	60
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373	120
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291	∞

自由度 ν（左右の見出し）の t 分布で，両側確率が P（上の見出し）となる点 $t(\nu,\ P)$ を与える．$\nu = \infty$ の行は標準正規分布の場合に当たる．

例　$\nu = 7$, $P = 0.05$ に対し，$t(7, 0.05) = 2.365$ を得る．□

（出典）森口繁一，日科技連数値表委員会編：「新編日科技連数値表」，p.6，日科技連出版社，1990.

篠崎信雄, 竹内秀一 (2009), "統計解析入門[第2版]", サイエンス社, p.276.



付表 4 χ^2 分布のパーセント点 (ν, $P \longrightarrow \chi^2(\nu, P)$)

ν \ P	.995	.99	.975	.95	.90	.10	.05	.025	.01	.005	P / ν
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	1
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	2
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	6
7	0.989	1.239	1.690	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3	7
8	1.344	1.646	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0	8
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	18
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	19
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	20
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	21
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	22
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	23
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	24
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	25
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	26
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	27
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	28
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	29
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	30
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	40
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	50
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	60
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	70
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	80
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	90
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	100

自由度 ν (左右の見出し) の χ^2 分布で，上側確率が P (上の見出し) となる点 $\chi^2(\nu, P)$ を与える．

例 $\nu = 6$, $P = 0.05$ に対し，$\chi^2(6, 0.05) = 12.59$ を得る．□

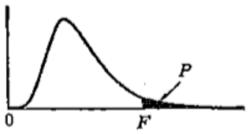
(出典) 森口繁一，日科技連数値表委員会編：「新編日科技連数値表」，p.8，日科技連出版社，1990.

森口繁一 編 (2009), "新編日科技連数値表—第2版—", 日科技連出版社, pp.10-11.

13. F 表 (5 %, 1 %)

$F(\phi_1, \phi_2\,; P)$　　$P=\begin{cases}0\cdot05 \cdots \text{細字}\\ 0\cdot01 \cdots \textbf{太字}\end{cases}$

$$P=\int_F^{\infty}\frac{\phi_1^{\frac{\phi_1}{2}}\,\phi_2^{\frac{\phi_2}{2}}\,X^{\frac{\phi_1}{2}-1}\,\mathrm{d}X}{B\left(\frac{\phi_1}{2},\frac{\phi_2}{2}\right)\left(\phi_1X+\phi_2\right)^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}}$$



(分子の自由度 ϕ_1, 分母の自由度 ϕ_2 から、上側確率 5 %および 1 %に対する F の値を求める表)(細字は 5 %, **太字は 1 %**)

ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ϕ_1 / ϕ_2
1	161·	200·	216·	225·	230·	234·	237·	239·	241·	242·	244·	246·	248·	249·	250·	251·	252·	253·	254·	1
	4052·	**5000·**	**5403·**	**5625·**	**5764·**	**5859·**	**5928·**	**5981·**	**6022·**	**6056·**	**6106·**	**6157·**	**6209·**	**6235·**	**6261·**	**6287·**	**6313·**	**6339·**	**6366·**	
2	18·5	19·0	19·2	19·2	19·3	19·3	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·5	19·5	19·5	19·5	19·5	19·5	2
	98·5	**99·0**	**99·2**	**99·2**	**99·3**	**99·3**	**99·4**	**99·4**	**99·4**	**99·4**	**99·4**	**99.4**	**99·4**	**99·5**	**99·5**	**99·5**	**99·5**	**99·5**	**99·5**	
3	10·1	9·55	9·28	9·12	9·01	8·94	8·89	8·85	8·81	8·79	8·74	8·70	8·66	8·64	8·62	8·59	8·57	8·55	8·53	3
	34·1	**30·8**	**29·5**	**28·7**	**28·2**	**27·9**	**27·7**	**27·5**	**27·3**	**27·2**	**27·1**	**26·9**	**26·7**	**26·6**	**26·5**	**26·4**	**26·3**	**26·2**	**26·1**	
4	7·71	6·94	6·59	6·39	6·26	6·16	6·09	6·04	6·00	5·96	5·91	5·86	5·80	5·77	5·75	5·72	5·69	5·66	5·63	4
	21·2	**18·0**	**16·7**	**16·0**	**15·5**	**15·2**	**15·0**	**14·8**	**14·7**	**14·5**	**14·4**	**14·2**	**14·0**	**13·9**	**13.8**	**13·7**	**13·7**	**13·6**	**13·5**	
5	6·61	5·79	5·41	5·19	5·05	4·95	4·88	4·82	4·77	4·74	4·68	4·62	4·56	4·53	4·50	4·46	4·43	4·40	4·36	5
	16·3	**13·3**	**12·1**	**11·4**	**11·0**	**10·7**	**10·5**	**10·3**	**10·2**	**10·1**	**9·89**	**9·72**	**9·55**	**9·47**	**9·38**	**9·29**	**9·20**	**9·11**	**9·02**	
6	5·99	5·14	4·76	4·53	4·39	4·28	4·21	4·15	4·10	4·06	4·00	3·94	3·87	3·84	3·81	3·77	3·74	3·70	3·67	6
	13·7	**10·9**	**9·78**	**9·15**	**8·75**	**8·47**	**8·26**	**8·10**	**7·98**	**7·87**	**7·72**	**7·56**	**7·40**	**7·31**	**7·23**	**7·14**	**7·06**	**6·97**	**6·88**	
7	5·59	4·74	4·35	4·12	3·97	3·87	3·79	3·73	3·68	3·64	3·57	3·51	3·44	3·41	3·38	3·34	3·30	3·27	3·23	7
	12·2	**9·55**	**8·45**	**7·85**	**7·46**	**7·19**	**6·99**	**6·84**	**6·72**	**6·62**	**6·47**	**6·31**	**6·16**	**6·07**	**5·99**	**5·91**	**5·82**	**5·74**	**5·65**	
8	5·32	4·46	4·07	3·84	3·69	3·58	3·50	3·44	3·39	3·35	3·28	3·22	3·15	3·12	3·08	3·04	3·01	2·97	2·93	8
	11·3	**8·65**	**7·59**	**7·01**	**6·63**	**6·37**	**6·18**	**6·03**	**5·91**	**5·81**	**5·67**	**5·52**	**5·36**	**5·28**	**5·20**	**5·12**	**5·03**	**4·95**	**4·86**	
9	5·12	4·26	3·86	3·63	3·48	3·37	3·29	3·23	3·18	3·14	3·07	3·01	2·94	2·90	2·86	2·83	2·79	2·75	2·71	9
	10·6	**8·02**	**6·99**	**6·42**	**6·06**	**5·80**	**5·61**	**5·47**	**5·35**	**5·26**	**5·11**	**4·96**	**4·81**	**4·73**	**4·65**	**4·57**	**4·48**	**4·40**	**4·31**	
10	4·96	4·10	3·71	3·48	3·33	3·22	3·14	3·07	3·02	2·98	2·91	2·85	2·77	2·74	2·70	2·66	2·62	2·58	2·54	10
	10·0	**7·56**	**6·55**	**5·99**	**5·64**	**5·39**	**5·20**	**5·06**	**4·94**	**4·85**	**4·71**	**4·56**	**4·41**	**4·33**	**4·25**	**4·17**	**4·08**	**4·00**	**3·91**	
11	4·84	3·98	3·59	3·36	3·20	3·09	3·01	2·95	2·90	2·85	2·79	2·72	2·65	2·61	2·57	2·53	2·49	2·45	2·40	11
	9·65	**7·21**	**6·22**	**5·67**	**5·32**	**5·07**	**4·89**	**4·74**	**4·63**	**4·54**	**4·40**	**4·25**	**4·10**	**4·02**	**3·94**	**3·86**	**3·78**	**3·69**	**3·60**	
12	4·75	3·89	3·49	3·26	3·11	3·00	2·91	2·85	2·80	2·75	2·69	2·62	2·54	2·51	2·47	2·43	2·38	2·34	2·30	12
	9·33	**6·93**	**5·95**	**5·41**	**5·06**	**4·82**	**4·64**	**4·50**	**4·39**	**4·30**	**4·16**	**4·01**	**3·86**	**3·78**	**3·70**	**3·62**	**3·54**	**3·45**	**3·36**	
13	4·67	3·81	3·41	3·18	3·03	2·92	2·83	2·77	2·71	2·67	2·60	2·53	2·46	2·42	2·38	2·34	2·30	2·25	2·21	13
	9·07	**6·70**	**5·74**	**5·21**	**4·86**	**4·62**	**4·44**	**4·30**	**4·19**	**4·10**	**3·96**	**3·82**	**3·66**	**3·59**	**3·51**	**3·43**	**3·34**	**3·25**	**3·17**	
14	4·60	3·74	3·34	3·11	2·96	2·85	2·76	2·70	2·65	2·60	2·53	2·46	2·39	2·35	2·31	2·27	2·22	2·18	2·13	14
	8·86	**6·51**	**5·56**	**5·04**	**4·69**	**4·46**	**4·28**	**4·14**	**4·03**	**3·94**	**3·80**	**3·66**	**3·51**	**3·43**	**3·35**	**3·27**	**3·18**	**3·09**	**3·00**	
15	4·54	3·68	3·29	3·06	2·90	2·79	2·71	2·64	2·59	2·54	2·48	2·40	2·33	2·29	2·25	2·20	2·16	2·11	2·07	15
	8·68	**6·36**	**5·42**	**4·89**	**4·56**	**4·32**	**4·14**	**4·00**	**3·89**	**3·80**	**3·67**	**3·52**	**3·37**	**3·29**	**3·21**	**3·13**	**3·05**	**2·96**	**2·87**	
16	4·49	3·63	3·24	3·01	2·85	2·74	2·66	2·59	2·54	2·49	2·42	2·35	2·28	2·24	2·19	2·15	2·11	2·06	2·01	16
	8·53	**6·23**	**5·29**	**4·77**	**4·44**	**4·20**	**4·03**	**3·89**	**3·78**	**3·69**	**3. 55**	**3·41**	**3·26**	**3·18**	**3·10**	**3·02**	**2·93**	**2·84**	**2·75**	
17	4·45	3·59	3·20	2·96	2·81	2·70	2·61	2·55	2·49	2·45	2·38	2·31	2·23	2·19	2·15	2·10	2·06	2·01	1·96	17
	8·40	**6·11**	**5·18**	**4·67**	**4·34**	**4·10**	**3·93**	**3·79**	**3·68**	**3·59**	**3·46**	**3·31**	**3·16**	**3·08**	**3·00**	**2·92**	**2·83**	**2·75**	**2·65**	
18	4·41	3·55	3·16	2·93	2·77	2·66	2·58	2·51	2·46	2·41	2·34	2·27	2·19	2·15	2·11	2·06	2·02	1·97	1·92	18
	8·29	**6·01**	**5·09**	**4·58**	**4·25**	**4·01**	**3·84**	**3·71**	**3·60**	**3·51**	**3·37**	**3·23**	**3·08**	**3·00**	**2·92**	**2·84**	**2·75**	**2·66**	**2·57**	
19	4·38	3·52	3·13	2·90	2·74	2·63	2·54	2·48	2·42	2·38	2·31	2·23	2·16	2·11	2·07	2·03	1·98	1·93	1·88	19
	8·18	**5·93**	**5·01**	**4·50**	**4·17**	**3·94**	**3·77**	**3·63**	**3·52**	**3·43**	**3·30**	**3·15**	**3·00**	**2·92**	**2·84**	**2·76**	**2·67**	**2·58**	**2·49**	
20	4·35	3·49	3·10	2·87	2·71	2·60	2·51	2·45	2·39	2·35	2·28	2·20	2·12	2·08	2·04	1·99	1·95	1·90	1·84	20
	8·10	**5·85**	**4·94**	**4·43**	**4·10**	**3·87**	**3·70**	**3·56**	**3·46**	**3·37**	**3·23**	**3·09**	**2·94**	**2·86**	**2·78**	**2·69**	**2·61**	**2·52**	**2·42**	
21	4·32	3·47	3·07	2·84	2·68	2·57	2·49	2·42	2·37	2·32	2·25	2·18	2·10	2·05	2·01	1·96	1·92	1·87	1·81	21
	8·02	**5·78**	**4·87**	**4·37**	**4·04**	**3·81**	**3·64**	**3·51**	**3·40**	**3·31**	**3·17**	**3·03**	**2·88**	**2·80**	**2·72**	**2·64**	**2·55**	**2·46**	**2·36**	
22	4·30	3·44	3·05	2·82	2·66	2·55	2·46	2·40	2·34	2·30	2·23	2·15	2·07	2·03	1·98	1·94	1·89	1·84	1·78	22
	7·95	**5·72**	**4·82**	**4·31**	**3·99**	**3·76**	**3·59**	**3·45**	**3·35**	**3·26**	**3·12**	**2·98**	**2·83**	**2·75**	**2·67**	**2·58**	**2·50**	**2·40**	**2·31**	
23	4·28	3·42	3·03	2·80	2·64	2·53	2·44	2·37	2·32	2·27	2·20	2·13	2·05	2·01	1·96	1·91	1·86	1·81	1·76	23
	7·88	**5·66**	**4·76**	**4·26**	**3·94**	**3·71**	**3·54**	**3·41**	**3·30**	**3·21**	**3·07**	**2·93**	**2·78**	**2·70**	**2·62**	**2·54**	**2·45**	**2·35**	**2·26**	
24	4·26	3·40	3·01	2·78	2·62	2·51	2·42	2·36	2·30	2·25	2·18	2·11	2·03	1·98	1·94	1·89	1·84	1·79	1·73	24
	7·82	**5·61**	**4·72**	**4·22**	**3·90**	**3·67**	**3·50**	**3·36**	**3·26**	**3·17**	**3·03**	**2·89**	**2·74**	**2·66**	**2·58**	**2·49**	**2·40**	**2·31**	**2·21**	
25	4·24	3·39	2·99	2·76	2·60	2·49	2·40	2·34	2·28	2·24	2·16	2·09	2·01	1·96	1·92	1·87	1·82	1·77	1·71	25
	7·77	**5·57**	**4·68**	**4·18**	**3·85**	**3·63**	**3·46**	**3·32**	**3·22**	**3·13**	**2·99**	**2·85**	**2·70**	**2·62**	**2·54**	**2·45**	**2·36**	**2·27**	**2·17**	
26	4·23	3·37	2·98	2·74	2·59	2·47	2·39	2·32	2·27	2·22	2·15	2·07	1·99	1·95	1·90	1·85	1·80	1·75	1·69	26
	7·72	**5·53**	**4·64**	**4·14**	**3·82**	**3·59**	**3·42**	**3·29**	**3·18**	**3·09**	**2·96**	**2·81**	**2·66**	**2·58**	**2·50**	**2·42**	**2·33**	**2·23**	**2·13**	
27	4·21	3·35	2·96	2·73	2·57	2·46	2·37	2·31	2·25	2·20	2·13	2·06	1·97	1·93	1·88	1·84	1·79	1·73	1·67	27
	7·68	**5·49**	**4·60**	**4·11**	**3·78**	**3·56**	**3·39**	**3·26**	**3·15**	**3·06**	**2·93**	**2·78**	**2·63**	**2·55**	**2·47**	**2·38**	**2·29**	**2·20**	**2·10**	
28	4·20	3·34	2·95	2·71	2·56	2·45	2·36	2·29	2·24	2·19	2·12	2·04	1·96	1·91	1·87	1·82	1·77	1·71	1·65	28
	7·64	**5·45**	**4·57**	**4·07**	**3·75**	**3·53**	**3·36**	**3·23**	**3·12**	**3·03**	**2·90**	**2·75**	**2·60**	**2·52**	**2·44**	**2·35**	**2·26**	**2·17**	**2·06**	
29	4·18	3·33	2·93	2·70	2·55	2·43	2·35	2·28	2·22	2·18	2·10	2·03	1·94	1·90	1·85	1·81	1·75	1·70	1·64	29
	7·60	**5·42**	**4·54**	**4·04**	**3·73**	**3·50**	**3·33**	**3·20**	**3·09**	**3·00**	**2·87**	**2·73**	**2·57**	**2·49**	**2·41**	**2·33**	**2·23**	**2·14**	**2·03**	
30	4·17	3·32	2·92	2·69	2·53	2·42	2·33	2·27	2·21	2·16	2·09	2·01	1·93	1·89	1·84	1·79	1·74	1·68	1·62	30
	7·56	**5·39**	**4·51**	**4·02**	**3·70**	**3·47**	**3·30**	**3·17**	**3·07**	**2·98**	**2·84**	**2·70**	**2·55**	**2·47**	**2·39**	**2·30**	**2·21**	**2·11**	**2·01**	
40	4·08	3·23	2·84	2·61	2·45	2·34	2·25	2·18	2·12	2·08	2·00	1·92	1·84	1·79	1·74	1·69	1·64	1·58	1·51	40
	7·31	**5·18**	**4·31**	**3·83**	**3·51**	**3·29**	**3·12**	**2·99**	**2·89**	**2·80**	**2·66**	**2·52**	**2·37**	**2·29**	**2·20**	**2·11**	**2·02**	**1·92**	**1·80**	
60	4·00	3·15	2·76	2·53	2·37	2·25	2·17	2·10	2·04	1·99	1·92	1·84	1·75	1·70	1·65	1·59	1·53	1·47	1·39	60
	7·08	**4·98**	**4·13**	**3·65**	**3·34**	**3·12**	**2·95**	**2·82**	**2·72**	**2·63**	**2·50**	**2·35**	**2·20**	**2·12**	**2·03**	**1·94**	**1·84**	**1·73**	**1·60**	
120	3·92	3·07	2·68	2·45	2·29	2·18	2·09	2·02	1·96	1·91	1·83	1·75	1·66	1·61	1·55	1·50	1·43	1·35	1·25	120
	6·85	**4·79**	**3·95**	**3·48**	**3·17**	**2·96**	**2·79**	**2·66**	**2·56**	**2·47**	**2·34**	**2·19**	**2·03**	**1·95**	**1·86**	**1·76**	**1·66**	**1·53**	**1·38**	
∞	3·84	3·00	2·60	2·37	2·21	2·10	2·01	1·94	1·88	1·83	1·75	1·67	1·57	1·52	1·46	1·39	1·32	1·22	1·00	∞
	6·63	**4·61**	**3·78**	**3·32**	**3·02**	**2·80**	**2·64**	**2·51**	**2·41**	**2·32**	**2·18**	**2·04**	**1·88**	**1·79**	**1·70**	**1·59**	**1·47**	**1·32**	**1·00**	
ϕ_2 / ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ϕ_1 \ ϕ_2

例 1. 自由度 $\phi_1=5$, $\phi_2=10$ の F 分布の (上側) 5 %の点は 3·33, 1 %の点は 5·64 である.

例 2. 自由度 (5, 10) の F 分布の下側 5 %の点を求めるには, $\phi_1=10$, $\phi_2=5$ に対して表を読んで 4·74 を得, その逆数をとって 1/4·74 とする.

注 自由度の大きいところでの補間は $120/\phi$ を用いる 1 次補間による(→p. 18).